



John Adams  
Library.



IN THE STUDY OF THE  
BOSTON PUBLIC LIBRARY



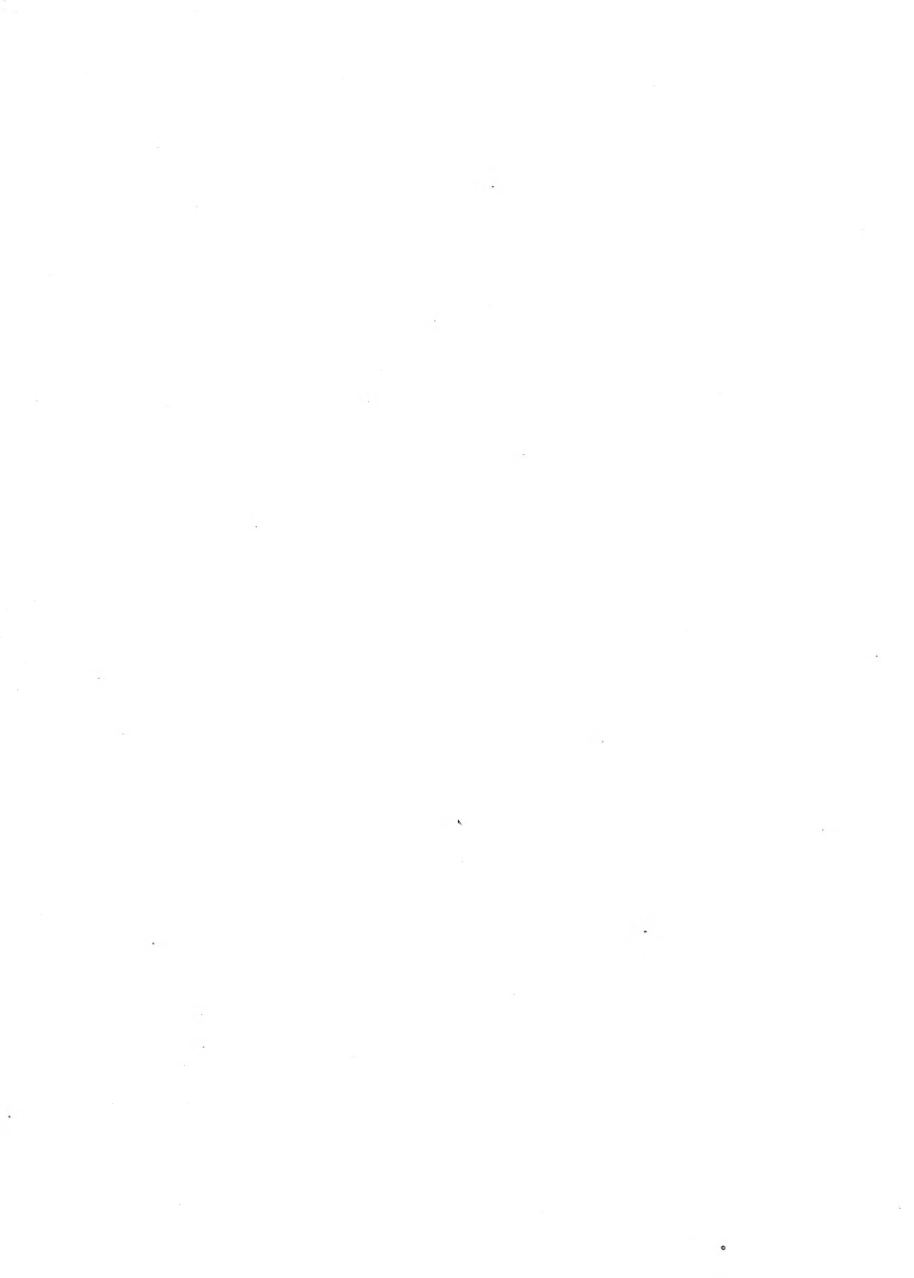
SHELF N°

80.6











# ASTRONOMIE,

PAR M. DE LA LANDE.

---

---

*TOME TROISIEME.*

---

---



# ASTRONOMIE,

PAR M. DE LA LANDE,

*Lecteur Royal en Mathématiques ; de l'Académie  
Royale des Sciences de Paris ; de celles de Londres ,  
de Pétersbourg , de Berlin , de Stockholm , de  
Bologne , &c. Censeur Royal.*

SECONDE ÉDITION REVUE ET AUGMENTÉE.

---

---

*TOME TROISIÈME.*

---

---



A PARIS,

Chez la Veuve DESAINT , rue du Foin  
Saint Jacques.

---

M. DCC. LXXI.

AVEC PRIVILEGE DU ROI.

24

20.6.3





# ASTRONOMIE.

---

LIVRE QUATORZIEME.

*DE L'USAGE DES INSTRUMENS,  
& de la pratique des Observations.*



ES descriptions contenues dans le livre précédent, ont dû faire connoître à peu-près l'usage des instrumens d'astronomie. Cependant comme la pratique des observations suppose un grand nombre d'attentions pour vérifier & pour employer ces instrumens, j'ai cru devoir en traiter séparément dans ce XIV<sup>e</sup> Livre; je suivrai le même ordre que dans le Livre précédent.

*Des Observations qui se font à la Lunette simple:*

2470. L'ON observe avec une lunette simple (2284) les éclipses de lune & de soleil, celles des étoiles, celles des fatellites de Jupiter. Dans toutes ces observations en général on peut employer également

*Tome III.*

A

## 2 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

les télescopes (2408) ; car puisqu'il s'agit seulement de bien voir des astres, il est indifférent qu'on y emploie un télescope ou une lunette, si l'un & l'autre grossissent également ; il est vrai que les télescopes sont plus aisés à manier ; mais les lunettes sont plus faciles à faire, durent plus long-temps, & par conséquent sont plus communes que les télescopes.

Éclipses de  
Lune.

2471. Hévélius avertit les astronomes de ne pas employer pour les éclipses de lune des lunettes de 8 à 10 pieds, ou au-delà, parce que l'ombre de la terre y paroît trop mal terminée (*Selenog. pag. 468*). On a vu la raison de cette difficulté que l'on trouve à bien observer les éclipses de lune (1788) ; c'est ce qui fait qu'on y emploie des lunettes de 4 à 5 pieds seulement, dont l'ouverture soit petite : on est persuadé communément qu'il est difficile de faire cette observation mieux qu'à une minute près ; cependant le P. Hell, observateur très-connu, & dont le témoignage est bien recevable dans cette matière, assure qu'on parvient à trouver la différence des méridiens à 4 ou 5 secondes près, par le moyen d'une éclipse de lune ; pour cela il faut observer le moment où l'ombre arrive à une des taches de la lune, & il ne suffit pas de considérer l'ombre à l'endroit seul qui est le plus près de la tache, mais il faut que l'œil en parcoure la circonférence & la courbure, pour voir si elle forme un arc non interrompu, passant sur le bord de la tache que l'on observe ; il faut aussi tâcher de choisir un terme de l'ombre, c'est-à-dire, une circonférence d'un certain degré d'obscurité, pour employer une ombre de la même densité pendant toute la durée de l'observation ; on doit choisir les taches les plus grandes pour observer l'immersion de leurs deux bords, ce qui est plus facile que d'estimer le milieu de la tache ; enfin il faut observer au moins vingt ou trente taches différentes, dans leurs immersions & dans leurs émerfions.

Attentions  
pour les ob-  
server.

2472. Le P. Hell trouve par ce moyen que l'éclipse de lune du 22 Novembre 1760, observée à Paris par M. Messier, avec un excellent télescope de 30 pouces

de foyer, & à Vienne avec une simple lunette de 5 pieds, donne  $56' 13''$  pour la différence des méridiens, quantité exacte, comme on le fait d'ailleurs; cependant l'éclipse commençoit  $4' 7'' \frac{1}{2}$  plutôt avec la petite lunette du P. Hell, qu'avec le fort télescope dont on se servoit à Paris, & finissoit  $4' 7''$  plus tard; en sorte qu'on a  $8' \frac{1}{4}$  de différence entre le résultat du commencement & celui de la fin, quand on les considère séparément, pour en conclure la différence des méridiens en temps; malgré cette différence le résultat moyen du P. Hell est à  $3''$  près, le même que nous avons eu d'ailleurs par un grand nombre de bonnes observations, qui est  $56' 10''$ , (2494). Il en est de même des satellites (2494, 2983); il peut y avoir quelque chose à rabattre d'une précision si singulière, cependant la méthode que nous venons d'expliquer, mérite toute l'attention des astronomes. (*Ephem. astron. annu 1764, pag. 201. & suiv.*)

Différences  
que produi-  
sent les lu-  
nettes.

2473. Lorsqu'on se sert d'une lunette pour observer le soleil, il est nécessaire d'employer quelque moyen pour se garantir de sa trop grande lumière; je dois avertir à cette occasion que le travail de ceux qui commencent à observer, est fort dangereux pour la vue, lorsqu'on néglige les attentions qui servent à la ménager. Le P. Scheiner raconte (*Rosa ursina, pag. 69*), que le premier inventeur des lunettes ayant voulu observer souvent le soleil, contracta une inflammation des yeux qui lui coûta la vie. Galilée & Cassini devinrent aveugles sur la fin de leur vie; il est très-ordinaire de voir des astronomes dont la vue s'est affoiblie, moins par l'usage d'observer que par leur négligence à prendre les précautions convenables; M. de l'Isle, au contraire, a vécu jusqu'à 80 ans, & il lisoit jour & nuit sans lunettes.

Attentions  
nécessaires  
aux jeunes  
astronomes.

Il est important de ne pas fatiguer ses yeux par une trop forte ou trop longue attention, de ne pas regarder la lune long-temps, & sur-tout de ne jamais recevoir dans l'œil la lumière du soleil, à moins qu'elle ne

#### 4 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

soit suffisamment affoiblie, ou par les vapeurs, ou par un corps obscur.

Tuyaux de  
lunettes.

2474. Il est essentiel que le tuyau d'une lunette soit intérieurement norci, d'un noir qui soit mat, comme le noir de fumée, & ne réfléchisse point de lumière, car les rayons dispersés affoibliraient l'image qui se forme au foyer par les rayons directs. Les tuyaux de bois formés par quatre planches minces bien assemblées sont plus légers & sujets à moins d'inconvénients que les tuyaux de fer blanc, & on les noircit facilement avant de les assembler.

Autre aversifement.

2475. M. Cassini dans son Instruction générale pour les voyageurs, (*Observ. astron. pag. 57*), avertit de se préparer toujours la veille aux observations importantes, comme si l'on vouloit observer la même chose à la même heure, afin que s'il y a quelque difficulté dans l'usage des instrumens, à cause de la situation de l'astre, de l'incommodité du lieu, ou du défaut des instrumens, on la puisse surmonter de bonne heure & y apporter remède; on reconnoît quelquefois l'importance de cet avis après l'avoir négligé.

Hélioscope.

2476. Le P. Scheiner avoit employé pour observer le soleil une lunette qu'il appelloit *Hélioscopium*, dont l'objectif & l'oculaire étoient d'un verre coloré; Hévélius en parle aussi (*Selenog. pag. 23*); M. le Gentil (*Mém. de l'acad. 1755, pag. 449*), s'est servi d'un objectif verd pour regarder le soleil, & il y trouvoit l'avantage de diminuer la couronne lumineuse qui borde les objets à cause des rayons colorés (2298); il trouvoit le soleil mieux terminé & le diamètre plus petit de 5'' qu'avec un objectif blanc; mais il est très-difficile d'avoir du verre coloré assez parfait pour former un bon objectif. M. le Gentil propose aussi de se servir de plusieurs toiles d'araignées couchées légèrement les unes sur les autres à l'extrémité du tuyau de l'objectif; ces toiles forment une espèce de voile transparent qui intercepte une partie de la lumière, & dispense de

## Observations à la Lunette simple. 5

l'usage des verres noirs. (*Mém. acad.* 1752, p. 454).

2477. Les verres colorés en rouge, en jaune, en bleu ou en verd sont fort en usage ; cependant on doit craindre l'irrégularité qu'il y a presque toujours dans la matière & dans l'épaisseur de ces sortes de verres : on apperçoit des défauts monstrueux quand on met ces verres sur l'objectif, comme M. le Gentil l'a éprouvé (*Mém. acad.* 1752, pag. 451). Il vaut mieux employer des morceaux de glace de miroir que l'on peut enfumer soi-même, ou les éprouve en les plaçant sur l'objectif de la lunette, & l'on n'admet que ceux dont l'interposition n'altère point l'image du soleil. Il est vrai que l'erreur résultante de l'imperfection des verres colorés devient beaucoup moindre quand on les met entre l'œil & la lunette, mais cette erreur, quoique peu sensible, mérite encore quelque attention. (*Mém.* 1752, pag. 455).

Danger des verres colorés.

Manière de les éprouver.

2478. Au mois de Mars 1763, j'ai vu qu'on commençoit en Angleterre à employer un autre *Hélioscope*, pour affoiblir la lumière du soleil ; cet instrument est formé de 4 petites glaces qui par derrière ne sont point polies, renfermées dans une boîte de cuivre bien noircie, que l'on adapte au-devant des oculaires du télescope ; elles sont placées de manière que l'image du soleil arrive à l'œil après 4 réflexions, qui suffisent pour obscurcir le soleil, de manière que l'œil puisse en supporter la lumière ; cet instrument a l'avantage de donner au soleil une couleur blanche ; mais lorsqu'il y a des nuages & que le temps est changeant, on est obligé d'y substituer un verre fumé dans lequel il y ait des parties plus ou moins transparentes ; voici donc la méthode que j'ai coutume de suivre.

Hélioscope pour affoiblir la lumière.

2479. Je prens deux morceaux d'une glace mince, mais bien travaillée & bien égale d'épaisseur, je passe un des morceaux légèrement, mais à plusieurs reprises sur la fumée d'une chandelle ou d'une lampe, jusqu'à ce que dans certains endroits du verre je ne voie plus rien que la flamme de la lumière, mais que dans d'autres

Verres fumés.

endroits du verre j'apperçoive un peu les objets environnans. J'applique une bordure de carte sur le verre fumé, je le recouvre avec le verre qui ne l'est pas, & je lie les bords avec du fil, du papier collé, ou de la cire à cacheter; cette méthode m'a toujours paru préférable à celle des verres colorés.

Attention  
pour observer  
Vénus & Mer-  
cure.

2480. M. Huygens nous avertit à la fin de son *Systema saturnium*, que pour observer les diamètres de Vénus & de Mercure, on ne doit pas négliger d'enfumer un peu l'oculaire de la lunette, pour que le disque soit mieux terminé; en effet la surabondance de lumière fait qu'on a peine à voir leur disque bien rond; & l'on apperçoit difficilement sans cette précaution les phases de Mercure.

2481. Pour observer les éclipses de soleil, on emploie différentes méthodes : la plus ancienne consistoit à recevoir l'image du soleil sur un tableau dans l'obscurité : Scheiner, Gassendi, Hévélius, M. de l'Isle, &c. s'en sont servi. Pour employer cette méthode, on a une lunette mobile sur un genou & qui passe au travers d'une fenêtre, dont la lumière est interceptée; on place un carton perpendiculairement à la direction de la lunette, à laquelle il doit être fixé; sur ce tableau on trace un cercle de la grandeur de l'image du soleil, on tâche de contenir toujours cette image en dedans du cercle, en faisant avancer la lunette; on divise ce cercle en 48 parties égales par le moyen de 24 cercles concentriques, on peut marquer sur ce cercle que remplit l'image du soleil, les points où se terminent les cornes de l'éclipse, à chaque fois qu'on observe la grandeur de l'éclipse; d'où il est aisé de conclure ensuite la grandeur du diamètre de la lune, soit par le calcul, soit même par une simple figure (*Hév. selen. pag. 102*).

Si l'on divise le cercle du tableau en degrés, & qu'on suspende entre la lunette & le tableau un fil vertical dont l'ombre vienne tomber sur le centre du cercle, on aura la situation des cornes de l'éclipse par rapport au vertical; d'où l'on peut conclure leur situation

à l'égard de l'écliptique , & le lieu même de la lune.

2482. Lorsqu'on emploie pour observer une éclipse de soleil une lunette garnie d'un micromètre ( 2358 ), on peut faire trois sortes d'observations ; 1°. l'on peut déterminer la grandeur de l'éclipse ou la partie éclairée, de momens à autres ; il faut environ 4 minutes si l'on est seul, pour l'observer avec soin, pour marquer le temps de l'observation, pour l'écrire & se préparer à la suivante. L'héliomètre ou micromètre objectif sert également à observer la grandeur de l'éclipse ; ces observations se calculent comme celles du commencement & de la fin d'une éclipse ( 1973 ).

Observation  
des éclipses  
avec le mi-  
cromètre.

2483. L'on peut aussi mesurer la distance des cornes, ou des pointes de lumière qui sont formées par l'intersection des limbes du soleil & de la lune ; il est même utile de faire alternativement ces deux opérations, mesurer la grandeur de l'éclipse, puis la distance des cornes ; ensuite la grandeur de l'éclipse, &c. C'est ainsi qu'en prenant des parties proportionnelles, on trouvera pour un même instant & la grandeur de l'éclipse, & la distance des cornes ; il y auroit encore plus d'exactitude si deux observateurs faisoient chacun de leur côté une des deux observations, enforte que l'un observât continuellement la grandeur de l'éclipse, & l'autre toujours la distance des cornes : on opère plus vite & mieux lorsqu'on ne change point d'opération.

2484. Cette manière d'observer n'est pas assez usitée pour que j'aie cru devoir en détailler les calculs, cependant elle est devenue précieuse depuis qu'elle a fait trouver l'inflexion des rayons solaires ( 1992 ).

2485. Enfin l'on peut observer une éclipse de soleil avec un quart-de-cercle, comme M. Cassini le pratiqua dans le dernier siècle, & marquer à l'horloge l'instant du passage tant au fil vertical, qu'au fil horizontal, des bords du soleil & de la lune, & des cornes de l'éclipse ; on en déduira les différences de hauteur & d'azimut, ( 2123 ) la distance des cornes, & par conséquent la distance des centres du soleil & de la lune, de deux

Avec le quart-  
de-cercle.

## 8 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

manières différentes , soit par les passages des bords ; soit par ceux des cornes de l'éclipse.

2486. Cette méthode a sur toutes les autres l'avantage d'éviter l'inégalité des réfractions , qui est fâcheuse dans les petites hauteurs , & de faciliter les réductions qui dépendent des parallaxes , parce que la parallaxe de hauteur est la plus facile à calculer ( 1628 ).

2487. La principale difficulté de cette méthode est le changement de situation des cornes , qui arrive pendant l'intervalle de leurs passages au même fil , il est absolument nécessaire d'en tenir compte ; pour cela on fait une table des différences de hauteurs observées successivement plusieurs fois entre la première corne , & la seconde ; on voit par-là combien cette différence de hauteur augmente à chaque minute de temps , & s'il s'est écoulé une minute entre les passages des deux cornes , on diminue de la quantité trouvée la différence de hauteur observée , pour avoir celle qui auroit eu lieu si ces deux cornes avoient été observées au même instant ou qu'elles eussent été stationnaires , & à même distance l'une de l'autre , pendant l'intervalle de temps qu'il y a eu du passage de la première à celui de la seconde.

2488. Quand on a trouvé la distance des centres & l'angle que fait cette ligne avec le cercle de latitude ; on peut en conclure la différence de longitude & de latitude apparente entre la lune & le soleil ( 2129 ) ; par la distance apparente à la conjonction , on cherchera la distance vraie , & enfin la conjonction vraie , avec la latitude vraie au moment de la conjonction ( 1976 ).

2489. On peut faire les mêmes opérations par le moyen du réticule , en cherchant la différence d'ascension droite & de déclinaison entre les deux cornes de l'éclipse , d'où l'on conclut également leur distance.

Du commencement & de la fin.

2490. Pour observer le commencement & la fin d'une éclipse de soleil ou d'étoile fixe par la lune , on choisit les plus longues lunettes , qui sont communément celles de 18 pieds , ou les télescopes de 2 pieds de foyer ; on ne sauroit examiner avec trop d'attention cet instant



instant unique où le soleil commence à paroître entamé, celui où il cesse de l'être, le moment où une étoile disparoît, & celui où elle sort comme un éclair de dessous le disque de la lune; on en conclut ensuite le temps de la conjonction (1971).

Les éclipses annulaires, sont celles qui offrent les phénomènes les plus singuliers; M. Maclaurin en rapportant l'observation qu'il fit de l'éclipse annulaire de 1737 (*Philos. transf. n°. 447*), assure que la plupart de ceux qui observerent cette éclipse avec des lunettes, apperçurent lorsque l'anneau se ferma & que la lune se trouva entièrement sur le soleil, une lumière partagée en différentes taches irrégulières proche du point de contact; que le bord de la lune y parut dentelé, que ces parties irrégulières y paroissoient en mouvement; que quand les deux disques se touchèrent ils semblèrent s'entremêler & couler l'un dans l'autre comme deux gouttes d'eau qui se rencontrent & se rassemblent; M. Maclaurin 15" avant que l'anneau se fermât apperçut comme un point de lumière, pâle mais fort sensible proche du bord de la lune, qui alloit toucher le soleil; & ce point lumineux parut jeter deux rayons vers les cornes de la lune à l'instant où l'anneau se ferma: le Lord Aberdour vit une ligne étroite de lumière sur le bord obscur de la lune, soit avant que l'anneau se fermât, soit après que le bord de la lune eût passé au-delà du soleil.

Phénomènes  
d'une éclipse  
annulaire.

Ces phénomènes devroient, ce semble, avoir lieu toutes les fois que l'on observe le commencement d'une éclipse de soleil; il ne faudroit que s'y bien préparer, & ils nous avertiroient probablement de l'instant si difficile à saisir où l'éclipse va commencer; cependant je ne crois pas que jusqu'ici aucun astronome ait jamais observé le véritable commencement d'une éclipse de soleil; comme l'on n'est point prévenu du point où le soleil va paroître entamé, on n'y apperçoit l'impression de la lune, que lorsqu'elle est déjà considérable.

2491. On peut aussi conclure très-exactement le

moment où une éclipse a commencé, par la distance des cornes mesurée quelques instans après le commencement, pourvu que l'on sache combien la lune se rapproche du soleil en une minute de temps. Cette distance des cornes augmente fort rapidement; car si les diamètres sont de  $32'$  elle est de  $1' 27''\frac{1}{2}$  aussi-tôt que la lune anticipe seulement de  $2''$  sur le disque du soleil ce qui arrive à peu près en 4 secondes de temps, plus ou moins.

2492. Les appulses de la lune aux étoiles dont elle approche, peuvent s'observer comme les éclipses de soleil, ou par des distances répétées de l'étoile à un des bords de la lune, ou par des différences d'ascension droite & de déclinaison, (2505). Il en est de même des conjonctions des planètes avec les étoiles. Les observations d'une éclipse ou d'une conjonction doivent toujours se réduire par le calcul, à trouver un grand nombre de fois le temps de la conjonction, & la latitude au temps de la conjonction (1971, 2152), afin de comparer les tables avec l'observation, & de trouver les différences des méridiens des pays où l'observation aura été faite; car ce sont-là les avantages de ces sortes d'observations.

J'ai parlé assez au long de l'observation des passages de Vénus & de Mercure sur le soleil (2116, 2140).

Éclipses des  
satellites de  
Jupiter.

2493. Les observations des satellites de Jupiter se font communément avec des lunettes ordinaires de 18 pieds, ou des lunettes achromatiques équivalentes; il seroit inutile d'y en employer de plus longues, cela produiroit un défaut de correspondance entre les différens observateurs, qui ne compenseroit pas le petit avantage de voir les émergions plus tard & les immergions plutôt; la plupart des astronomes n'ayant pas de plus longues lunettes, il convient, ce semble, quant à présent, de s'affujétir à la convention générale.

Nous décrirons dans le XVIII<sup>e</sup>. livre (2987) un instrument qui est fort utile pour se préparer à observer

les éclipses des satellites, c'est-à-dire, pour savoir à quel endroit est le satellite dont on veut observer une éclipse; au reste, il suffit de savoir qu'avant l'opposition, & pendant tout le temps que Jupiter passe au méridien le matin ou après minuit, les éclipses se font à gauche de Jupiter, dans une lunette qui renverse, c'est-à-dire, à l'occident de Jupiter; c'est le contraire après l'opposition; la distance du satellite par rapport à Jupiter au moment d'une éclipse, est d'autant plus grande, que Jupiter est plus près de sa quadrature.

Avant l'immersion totale d'un satellite on le voit diminuer peu-à-peu; il est très-bon de compter les secondes de temps qui passent entre l'instant où il commence à diminuer, & celui où il disparoit totalement; lorsqu'on sera bien assuré qu'il ne paroît plus, on quittera la lunette si l'on est seul, mais on continuera de compter jusqu'à ce qu'on soit arrivé à l'horloge; alors on soustraira ce qu'on aura compté depuis le premier moment où le satellite a commencé de diminuer, & l'on y ajoutera le nombre de secondes qu'il a employé à diminuer, pour avoir le moment de la véritable immersion.

Les émerfions des satellites demandent une attention particulière pour saisir le premier instant de l'apparition. A l'instant qu'on commence à voir poindre ou pointiller le satellite, ou à le soupçonner, on commence à compter zéro, une, deux, &c. sans quitter la lunette, jusqu'à ce qu'on soit assuré de ne s'être point trompé; alors on va à l'horloge, & l'on soustrait ce qu'on a compté depuis le moment où l'on a aperçu le satellite jusqu'à celui où l'on est arrivé à l'horloge.

2494. Le P. Heil assure que la différence des lunettes avec lesquelles deux astronomes observeroient des éclipses de satellites, & même la différente conformation de leur vue, n'empêchent point d'en conclure avec exactitude la différence des méridiens, pourvu qu'on compare entre elles autant d'immersions que d'émerfions. La différence des méridiens entre Paris & Vienne en

Les émerfions.

Utilité des satellites pour les longitudes.

## 12 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

Autriche, se trouvoit de  $55' 35''$ , lorsque le P. Hell ne comparoit entre elles que les immersions du premier & du second satellite, observées à Paris avec un excellent télescope de 30 pouces, & à Vienne avec une lunette ordinaire; mais elle se trouvoit de  $56' 43''$ , en ne comparant que les émersions; le milieu entre ces deux résultats est  $56' 9''$ , quantité fort exacte, puisqu'on a trouvé, par un très-grand nombre d'observations,  $56' 10''$  pour la différence de longitude entre ces deux villes (*Ephém. astr.* 1764, pag. 189).

Longitude  
de Vienne.

Différence  
des lunettes en  
temps.

Par de semblables comparaisons on détermineroit à peu-près combien de secondes une immersion doit arriver plus tard avec une lunette de 18 pieds qu'avec une lunette de dix. On a dit qu'il falloit ajouter  $3''$  de temps pour 2 pieds de plus sur la longueur des lunettes, lorsqu'il étoit question du premier satellite. M. le Président de Saron, ayant fait lui-même d'excellens télescopes de 12 & de 30 pieds de foyer, le premier avec 3 pouces, le second avec 6 pouces d'ouverture, a trouvé assez constamment  $10''$  de différence avec ces deux télescopes, en observant les éclipses du premier satellite. Cette quantité est bien plus grande pour les autres satellites (2983), & doit varier pour les lunettes de différentes longueurs, de différentes bontés, de différentes ouvertures; pour les vues plus ou moins fixes, & pour les différentes latitudes du premier satellite (2982). Voyez aussi la *Connoiss. des temps* de 1704, pag. 101).

Support des  
lunettes.

2495. LES LUNETTES simples & celles qui portent des micromètres, ont besoin d'être soutenues du côté de l'oculaire, par quelque support qu'on puisse mouvoir aisément, & l'on se sert communément d'un cric; c'est un instrument composé de 3 pieds, assemblés vers le haut par une tablette horizontale, ou par une pièce de bois verticale creusée en forme de coulisse; dans le milieu de cette coulisse glisse une tringle de bois ou de fer, qui se termine en haut par une traverse en forme de croix, sur laquelle on appuie la lunette.

Pour fixer la croix, ou le support, à différentes hauteurs, on se sert d'une vis de pression; ou bien on y applique une cremaillère & une roue dentée; on l'élève aussi par une corde qui s'enveloppe sur un axe placé sur le côté, & qu'on tourne avec une manivelle; ou bien l'on fait tendre la corde par un contre-poids; chacun imaginera facilement une manière d'ajuster de semblables machines; & comme l'on peut aussi s'en passer, je n'insisterai pas sur cette partie.

2496. Mais une chose bien importante, & que je ne puis assez recommander à tous les observateurs, c'est de placer toujours la lunette de manière qu'on soit à son aise, dans une situation commode, & que la lunette ait un mouvement facile; on ne sauroit mettre trop d'importance dans cette précaution, j'ai vu des astronomes habiles manquer des observations importantes par le défaut de soin dans cette partie; il faut aussi que les yeux soient bien reposés, pour une observation délicate, telle qu'une éclipse de satellite de Jupiter, une émergence d'étoile ou une fin d'éclipse de soleil.

2497. Lorsqu'une lunette est exposée long-temps à l'humidité de l'air pendant les observations nocturnes, le verre se ternit, & l'on ne voit plus rien; pour éviter cet inconvénient, qui est très-grand dans les observations, on peut ajuster au bout de la lunette un tuyau de papier brouillard qui absorbe l'humidité, & l'empêche d'aller jusqu'à l'objectif de la lunette; il y a des temps où l'on fera même obligé de changer plus d'une fois ce tuyau de papier.

### *Des Observations qui se font avec le Réticule.*

2498. LA lunette qui porte un réticule, doit être bien centrée, c'est-à-dire, que le centre de l'ouverture de l'objectif, doit être celui de la plus grande épaisseur du verre, afin que le rayon principal, ou l'axe optique de la lunette passe par le centre de l'objectif;

# 14 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

fans cela le mouvement de l'astre au travers de la lunette feroit inégal, & les meſures priſes en différens points du champ de la lunette, ne feroient pas les mêmes. Pour concevoir l'effet d'un verre mal centré, imaginons un objectif dont on a coupé la moitié; la plus grande épaiſſeur ſe trouvera au bord du verre, de même que l'axe principal autour duquel toutes les images doivent être égales, également diſtinctes, également lumineuſes.

Première  
méthode pour  
centrer les  
verres.

2499. Si l'on expoſe au ſoleil un objectif convexe des deux côtés, & qu'on faſſe réfléchir l'image du ſoleil ſur les objets voiſins, on voit deux images; la plus vive doit être au centre de celle qui eſt la plus grande & la plus pâle; ſi elles ne ſont pas exactement concentriques, c'eſt une preuve que le verre eſt mal centré; on peut alors prendre un cercle de carton qui ſoit ouvert circulairement, & le promener ſur l'objectif juſqu'à ce que l'ouverture tombe ſur une partie de verre qui ſoit bien centrée, & l'on ſe ſervira ſeulement de cette partie de l'objectif; le foyer de réflexion de la ſurface concave ayant le même axe que le foyer de réflexion de la ſurface convexe, on eſt sûr que le verre eſt bien centré.

Seconde  
méthode.

2500. Si l'on place un objectif à l'extrémité d'un tube bien rond, & qu'on faſſe faire au verre un demi-tour ſur ſon axe en regardant un objet terreſtre, l'objet ne doit pas changer de place; il paroîtra toujours au même point des fils du réticule, ſi l'objectif eſt centré; ſ'il ne l'eſt pas, on le ſcellera avec de la cire molle au bout d'un tube plus étroit que le verre, de manière qu'il puiſſe changer de place; on fera tourner le tube, en donnant ſucceſſivement différentes ſituations au verre ſur le tube, & l'on verra celle qui eſt néceſſaire pour que la portion du verre, qui répond à l'ouverture du tube, faſſe un objectif bien centré: ce fera la partie du verre dont il faudra ſe ſervir.

Troisième  
méthode.

2501. La parallaxe optique dont M. Bouguer a beaucoup parlé (2599), fournit un troiſième moyen de centrer une lunette. On pointera ſur un objet fort éclatant;

& ayant fixé la lunette dans une situation invariable ; on enfoncera l'oculaire , autant qu'il sera possible , sans cesser d'appercevoir l'objet ; on le retirera ensuite autant qu'on le pourra , toujours sans que la lunette varie ; si dans ce mouvement de l'oculaire l'objet que l'on regarde paroît toujours sur le milieu des fils , & que la parallaxe optique se fasse autant d'un côté que de l'autre , on sera assuré que le verre est bien centré ; car les deux images que l'on verra dans ces deux situations , étant nécessairement sur l'axe optique principal , ne peuvent être toutes deux sur le milieu de la lunette , à moins que l'axe optique ne concoure avec le rayon moyen , ou avec l'axe du cône de lumière que donne la lunette , ( M. Bouguer , *figure de la Terre* , pag. 212 ).

2502. Enfin , on peut centrer des verres en rendant leur épaisseur circulairement égale , comme nous l'avons dit pour les lunettes achromatiques ( 203 ) ; car si un verre est tourné bien rond , & que son épaisseur prise circulairement , soit toujours la même à égale distance du centre , on est sûr que le verre est centré.

Quatrième  
méthode.

2503. Il est utile à un astronome d'avoir une LUNETTE D'ÉPREUVE , bien centrée , qui porte deux carrés aux extrémités de son tube , & qui puisse servir à vérifier divers instrumens ; cette lunette d'épreuve ( *fig. 198* ) , peut s'appeller aussi *Lunette centrée* , *Lunette contre-pointée* ; les tasseaux carrés *C* & *D* doivent être exactement égaux , rectangles , avec leurs faces opposées parallèles & bien dressées ; l'objectif doit être si bien centré , que la ligne *AB* passant par la croisée des fils , réponde au même point , lorsqu'on place la lunette sur chacune de ses deux faces à volonté. Ceux qui font les instrumens d'astronomie , ont sur-tout besoin de cette lunette d'épreuve , dont nous parlerons plus d'une fois ( 2555 , 2569 , 2595 ).

Lunette  
d'épreuve.

*Fig. 198.*

2504. Le réticule ( *fig. 138* ) , dont nous avons déjà parlé ( 2350 ) , sert à déterminer la différence d'ascension droite & la différence de déclinaison entre une étoile & une planète , dont on veut connoître la posi-

Du réticule :  
simple.  
*Fig. 138.*

tion, entre deux planètes, comme dans les passages de Vénus sur le soleil (2136), ou entre une tache & le bord du soleil & de la lune (3137).

Dans ces sortes d'observations nous appelons *Fil équatorial* ou *Fil parallèle*, (on sous-entend à l'équateur), celui qui est dans la direction du mouvement diurne, & qu'on doit faire parcourir à l'un des astres que l'on observe; le *Fil horaire* est celui qui est perpendiculaire au mouvement diurne, & placé dans le plan d'un cercle de déclinaison.

Attentions  
qu'exige le ré-  
ticule de 45°.

On doit être d'abord fort attentif à mettre le réticule au foyer de l'objectif, pour éviter totalement la parallaxe optique de l'image (2599). Il est aussi très-nécessaire que le réticule soit placé dans la direction exacte du mouvement diurne; c'est-à-dire, qu'un des astres décrive le parallèle sans le quitter le moins du monde, car toute l'erreur se trouveroit sur la différence d'ascension droite; il y a des moyens d'éviter cette condition (2130, 2509), en y suppléant par le calcul; mais il ne faut y avoir recours que quand il est difficile de faire autrement.

Il faut absolument vérifier les angles d'un réticule; avant que de s'en servir; pour cela on trace des angles de 45 & de 90°, avec exactitude sur un grand carton, qu'on place à une distance considérable; en regardant ces lignes dans la lunette, on voit si tous les fils du réticule se confondent exactement avec les lignes qu'on a tracées; la co-incidence doit avoir lieu dans tous les sens.

Conversion  
du temps en  
degrés.

2505. La différence des temps écoulés entre le passage de deux astres au fil horaire du réticule, doit se convertir en degrés pour former la différence d'ascension droite entre les deux astres (88, 212, 877); mais la manière de faire cette conversion exige des attentions (953): si l'horloge est réglée sur le premier mobile (955), c'est-à-dire, si elle fait 24 heures justes entre deux passages d'une étoile au méridien, & que les deux astres soient fixes, comme sont deux étoiles,  
il



il suffit de convertir le temps à raison de 15 degrés par heure, c'est le cas le plus simple; mais si l'horloge ne fait pas exactement 24 heures dans l'intervalle du retour d'une étoile au méridien (2613), il faudra faire cette règle de trois : le nombre d'heures, de minutes & de secondes que fait l'horloge entre deux passages de l'étoile d'un jour à l'autre, est à 360°, comme le nombre d'heures, de minutes & de secondes écoulées entre les passages des deux astres, est au nombre de degrés, minutes & secondes, qui font la différence d'ascension droite entre les deux astres observés.

Si l'on règle son horloge sur le soleil, on sera obligé de prendre pour second terme de la proportion précédente, la somme de 360° & du mouvement propre en ascension droite, qu'a eu le soleil dans l'intervalle des deux passages, qui ont servi à connoître le mouvement de l'horloge.

2506. Si l'horloge suit exactement le temps solaire moyen, il suffira de convertir le temps en degrés, à raison de 360° 59' 8" 3 pour 24 heures, ou 15° 2' 27" 8 pour chaque heure. Si l'horloge retardoit de deux secondes par jour sur le mouvement moyen, il faudroit réduire le temps observé en temps moyen, & y faire une petite correction, en disant, par exemple, pour une heure 24<sup>h</sup> : 2" :: 1<sup>h</sup> : 0", 08 que l'on ajoute à l'intervalle d'une heure compté sur l'horloge à pendule, & l'on trouve 1<sup>h</sup> 0' 0" 08 de temps moyen. On peut aussi ajouter 1" 26, c'est-à-dire, 1"  $\frac{26}{100}$ , ou 1"  $\frac{1}{4}$  pour chaque heure, à la différence d'ascension droite en degrés, ou les retrancher si l'horloge avance de 2" par jour; ce sera le double si l'horloge avance de 4", & ainsi de suite; l'on aura également par ces deux méthodes les degrés qui répondent à un intervalle de temps.

Ces où l'horloge avance.

2507. La différence d'ascension droite ainsi trouvée en degrés, minutes & secondes, s'ajoute à l'ascension droite de l'astre qui a passé le premier, pour avoir celle de l'astre suivant. Si l'un des astres a un mouve-

## 18 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

ment en ascension droite, & que l'autre soit fixe; on aura par l'opération précédente l'ascension droite de la planète pour le moment où elle a passé au fil horaire du réticule.

Du cas où  
les deux astres  
sont mobiles.

Lorsqu'on a observé la différence d'ascension droite entre deux planètes qui ont chacune leur mouvement, par exemple, Mercure & le Soleil, on n'a qu'à convertir le temps en degrés (2505), sans égard aux deux mouvemens; on ajoutera cette différence d'ascension droite à celle du soleil calculée pour le moment de son passage (206) si le soleil a passé le premier, & l'on aura l'ascension droite de Mercure au moment où Mercure a passé. En effet, l'observation nous donne la différence entre le point du ciel qu'occupoit le soleil à son passage au méridien, & le point où étoit Mercure lorsqu'il y est venu à son tour, ce sont les seuls points dont on ait besoin, & l'on peut supposer qu'ils sont fixes pendant toute la durée de l'observation. Dès que le soleil a passé au réticule, il n'importe plus pour cette observation qu'il ait un mouvement, ou qu'il n'en ait point, & dans l'instant où Mercure y arrive, il est égal qu'il ait eu auparavant, ou qu'il doive avoir ensuite un mouvement quelconque, on a toujours sa position pour le moment même du passage de Mercure, par le moyen de la position qu'avoit le soleil quand le soleil passoit au réticule.

2508. Pour trouver la différence de déclinaison entre les deux astres qui ont passé au réticule, il suffit d'observer les passages aux fils obliques, & de convertir l'intervalle en arc de grand cercle, & l'on a la distance de chaque parallèle au centre du réticule (2352).

Cas où le  
réticule a une  
situation quel-  
conque.

2509. Il y a des cas où l'on n'a pas le temps de placer le fil du réticule exactement dans la direction du mouvement diurne, & de le faire suivre par un des deux astres, ce qui exige un tâtonnement quelquefois assez long; on peut alors recourir à la méthode sui-

vante, que M. Cassini & M. de l'Isle employèrent autrefois, & que M. Zanotti a publiée le premier (*Comm. inst. bon. Tom. II, part. 3, pag. 75*).

Soit la route d'un astre ou son parallèle  $BAD$ , (*fig. 146*),  $AC$  le fil horaire du réticule, qui devoit être placé suivant  $Ca$ , perpendiculairement à la route  $BD$ ;  $EC$  &  $DC$  les deux obliques, dont la position devoit être  $Cb$  &  $Cd$ , si le réticule étoit exactement disposé dans la direction du mouvement diurne; on observera les passages d'un astre en  $B$ ,  $A$ ,  $D$ , & l'on en conclura les intervalles de temps  $BA$  &  $AD$ , que j'appelle  $m$  &  $n$ , alors on aura la perpendiculaire  $Ca$ , ou la différence de déclinaison entre l'astre observé & le centre du réticule,  $= \frac{m^2n + n^2m}{m^2 + n^2}$ , qu'il faudra réduire en degrés de grand cercle; & la quantité  $Aa$  sera  $= \frac{m^2n - n^2m}{m^2 + n^2}$ . Cette quantité ajoutée au temps du passage de l'astre en  $A$ , dans le cas où  $BA$  est plus grand que  $AD$ , donnera le passage en  $a$  sur le vrai cercle horaire  $Ca$ , qui passe au centre  $C$  de la lunette. Ayant ainsi les passages de chacun des deux astres par le fil horaire  $Ca$ , l'on en conclura la différence d'ascension droite (2505). Lorsqu'il s'agit du soleil, on peut aussi employer la méthode de M. de Fouchi, (2130) & se passer des fils obliques.

2510. On pourroit observer des différences d'ascension droite & de déclinaison entre une planète & une étoile, sans le secours d'aucun réticule ni micromètre, si l'on avoit seulement un diaphragme ou cercle de carton au foyer des verres, bien rond & bien terminé; les temps que la planète & l'étoile emploieront à le traverser, convertis en degrés & multipliés par le cosinus de la déclinaison seront les valeurs des cordes décrites; connoissant deux cordes d'un cercle, il est aisé de connoître leur intervalle qui est la différence de déclinaison des deux astres, comme la différence des temps où ils ont été au milieu de ces cordes est la différence d'ascension droite.

Il feroit bien utile que les curieux qui ont tant de loisir, & qui souvent jouissent d'un si beau ciel vou-  
lissent passer quelques soirées à chercher de temps en  
temps des comètes, & les comparer à des étoiles par  
une méthode aussi commode. Cette branche de l'astro-  
nomie fera des progrès rapides, si ce genre de curio-  
sité peut se répandre un jour parmi les gens qui ont  
des connoissances & de l'émulation.

Difficulté  
de voir les  
fils.

2 § 11. Dans l'usage des réticules & des micromè-  
tres on est souvent obligé d'éclairer les fils pour les  
appercevoir, & c'est une chose assez embarrassante dans  
les observations; si l'on éclaire trop, on cesse d'apper-  
cevoir les petites étoiles; si l'on éclaire trop peu les  
fils ne paroissent pas; si l'on éclaire le haut de la lu-  
nette en faisant tomber la lumière sur l'objectif, il faut  
que la lumière soit à l'abri du vent, qui en agitant la  
flamme produit une parallaxe dans les fils & fait vacil-  
ler dans la lunette l'image de l'objet. Il y a des astro-  
nomes qui éclairent les fils par une ouverture pratiquée  
vis-à-vis de l'oculaire, mais les fils éclairés de côté  
paroissent alors d'une forme différente par un reflet de  
lumière qui est souvent irrégulier.

2 § 12. On éviteroit bien de l'embarras si l'on par-  
venoit à voir les fils, même dans l'obscurité; cela est  
possible pourvu que l'on obscurcisse l'observatoire &  
que l'œil destiné à regarder dans la lunette ne voie ja-  
mais la lumière; il ne doit pas même servir à regar-  
der l'horloge; c'est l'autre œil avec lequel il faut re-  
garder le cadran & écrire l'observation, & celui-ci même  
ne doit jamais voir directement la lumière. Ces atten-  
tions sont difficiles à observer, mais quand on s'y est  
plié par habitude, on en est bien dédommagé par la fa-  
cilité que l'on trouve dans les observations des plus pe-  
tites étoiles.

2 § 13. Après avoir parlé de l'usage du réticule de  
45°, je passe à l'usage du réticule rhomboïde (*fig. 147*),  
qui a été expliqué ci-dessus (2353) : il y a trois véri-  
fications à faire dans un réticule rhomboïde, car il

*Fig. 147.*  
Vérification  
du rhomboï-  
de.

faut reconnoître 1°, si les deux fils  $EF$ ,  $BD$ , font à angles droits; 2°, s'ils font exactement les deux diagonales du parallélogramme  $BEDF$ , 3°, si l'une des diagonales  $BD$ , est exactement double de l'autre; toutes ces vérifications sont essentielles pour un observateur qui se propose d'employer un semblable réticule; pour y parvenir on doit tracer en grand, mais avec soin, un réticule semblable sur un mur éloigné, sur un carton, ou sur une planche; en examinant cette figure avec la lunette, on voit si les lignes qu'on a tracées correspondent exactement à celles du réticule, & l'on parvient ainsi à connoître les défauts de celui-ci, pour y avoir égard dans le calcul.

2514. Lorsqu'on emploie le réticule dans une observation, on doit d'abord s'assurer que l'un des astres parcourt exactement le parallèle  $EF$ , sans le quitter le moins du monde, depuis son entrée dans la lunette en  $K$ , jusqu'au moment où il se cache en  $E$  sous la lame du réticule; si l'astre ne suit pas bien exactement le fil on tournera la vis qui est ordinairement dans la boîte du réticule, & qui lui donne un petit mouvement de rotation, pour faire incliner le fil jusqu'à ce que l'astre le parcoure exactement. Cette inclinaison se produit par le moyen de quelques dents qui sont ordinairement à la circonférence du chassis du réticule, ou d'une vis comme dans la *fig.* 163: si l'on n'a pas un réticule denté & propre à un semblable mouvement, on peut incliner la lunette jusqu'à ce que l'astre en parcoure exactement le fil, ou bien qu'elle aille de l'angle  $F$  à l'angle  $E$ .

Le réticule étant ainsi disposé dans la direction du mouvement diurne, on compte exactement le temps qu'une étoile emploie à aller de  $F$  en  $E$ ; on le convertit en degrés (2505), pour avoir l'arc de l'équateur ou l'angle au pôle qui répond à  $EF$ , & l'on multiplie cet arc par le cosinus de la déclinaison de l'astre pour avoir l'arc de grand cercle  $EF$  (892).

2515. **EXEMPLE.** Le 14 Novembre 1763 au ma- Trouver la  
grandeur du  
réticule.

tin, voulant comparer Mercure avec l'épi de la Vierge, je trouvai que l'étoile en parcourant le fil équatorial  $FE$ , étoit en  $F$  à  $5^h 22' 12''$  & en  $E$  à  $5^h 25' 24''$ ; ainsi elle employoit  $3' 12''$  à aller de  $F$  en  $E$ ; je convertis cette quantité en degrés, j'ai  $48' 0''$ , c'est l'arc de l'équateur qui passoit pendant le temps que l'étoile alloit de  $F$  en  $E$ ; je multiplie cette quantité par le cosinus de  $90^\circ 55'$  déclinaison de l'épi de la Vierge, j'ai  $47' 17''$  valeur de l'arc  $EF$ , qui est la largeur de mon réticule, & en même temps sa hauteur  $BM$ , qui est égale à la base ( $2353$ ).

Trouver la  
différence de  
déclinaison.

2516. Pour connoître la différence de déclinaison entre les deux astres observés au réticule rhomboïde en  $d$  & en  $m$ , on convertira en degrés chacun des intervalles de temps que les astres ont mis à traverser le réticule, on multipliera chacun de ces intervalles par le cosinus de la déclinaison de l'astre auquel il appartient; la somme des produits se retranchera de la longueur du réticule ou de  $BD$ , & l'on aura la différence de déclinaison  $dm$ . Si les deux astres ont passé du même côté ou dans le même triangle  $BEI$ , on multiplie également les intervalles de temps par le cosinus de la déclinaison de chaque point, & l'on retranche l'un de l'autre pour avoir la différence de déclinaison. Si le réticule n'a qu'environ un degré de largeur, on peut employer le cosinus de la déclinaison moyenne entre celles des deux astres.

2517. RÈGLE GÉNÉRALE. On prendra la somme ou la différence des intervalles de temps employés à traverser le réticule, convertie en degrés & multipliée par le cosinus de la déclinaison moyenne; si c'est la différence, on aura sans autre calcul la différence de déclinaison; si c'est la somme, on la retranchera du double de la largeur du réticule, pour avoir la différence de déclinaison.

2518. EXEMPLE. Après avoir observé l'épi de la Vierge en  $F$  & en  $E$  ( $2515$ ), j'observai Mercure en  $f$ , à  $6^h 15' 4''$  & en  $e$  à  $6^h 17' 9''$ , la différence  $2' 5''$

convertie en arc, donne  $0^{\circ} 31' 15''$ ; multipliant par le cosinus de  $9^{\circ} 55'$  qui est la déclinaison de l'étoile, on a  $30' 47''$  pour l'arc  $ef$ , ou  $Bd$  qui retranché de  $47' 17'' = BM$ , donne  $16' 30''$  pour la différence de déclinaison  $dM$ , entre Mercure & l'épi de la Vierge.

De-là il suit que dans le cas où l'étoile avoit passé au centre  $M$ , il suffisoit de retrancher du temps par  $EF$ , le temps par  $ef$ , ou  $2' 5''$  de  $3' 12''$ ; car le reste  $1' 7''$  étant converti en temps & multiplié par le cosinus de la déclinaison donne  $16' 30''$  qui est la différence de déclinaison  $Md$ , que l'on cherche.

Des observations précédentes il est aisé de conclure que l'épi de la Vierge étoit au milieu  $M$  du réticule, à  $5^h 23' 48''$ , & Mercure en  $d$  à  $6^h 16' 6'' \frac{1}{2}$ , la différence  $52' 18'' \frac{1}{2}$  étant convertie en degrés (à raison de  $23^h 55' 50''$  pour 360 degrés (2506), je suppose que l'horloge retardoit de  $14''$  par jour; on a  $13^{\circ} 6' 54''$  différence d'ascension droite entre Mercure & l'épi de la Vierge, le 13 Novembre 1763 à  $18^h 16' 6''$  de temps vrai.

Différence  
d'ascension  
droite.

Nous parlerons ci-après des corrections qu'il faut faire dans certains cas, à ces sortes d'observations, à raison des parallaxes (2539) des réfractions (2546).

Corrections.

### *Des Observations qui se font au Micromètre.*

2519. LE MICROMÈTRE (2358) détermine les différences de déclinaison bien plus exactement que le réticule, parce qu'il ne suppose pas la mesure du temps. Il sert aussi à mesurer la plus courte distance d'un objet à l'autre, par exemple celle de Mercure & de Vénus au bord le plus proche du soleil (2131); on peut même l'employer à mesurer des différences d'azimut (2123); pourvu qu'il y ait un niveau sur le micromètre; & cela peut être utile dans des observations qui se feroient fort près de l'horizon, où les différences d'azimut sont préférées, comme n'étant point affectées de réfractions.

Usage du  
Micromètre.

Parallélisme  
des fils.

2520. Le premier examen qu'on doit faire dans un micromètre, consiste à rendre le curseur exactement parallèle au fil fixe, & à rendre le fil horaire exactement perpendiculaire aux deux autres; cela se peut faire aisément par le moyen de deux lignes exactement perpendiculaires l'une à l'autre, tracées à une grande distance de la lunette, comme nous l'avons indiqué pour le réticule (2504).

Erreur de  
l'index.

2521. On doit examiner ensuite le premier point de la division, c'est-à-dire, le nombre de parties que marque le micromètre quand le curseur est confondu & réuni avec le fil fixe; c'est ce que nous appelons *erreur de l'index*; on est obligé de la connoître exactement pour en tenir compte dans toutes les observations, car l'index ne marquera la vraie distance des fils, que dans le cas où il marquoit zéro, quand cette distance étoit nulle; s'il marquoit 10'', dans ce cas-là, il faudra retrancher 10'' de toutes les mesures prises avec le micromètre. Pour connoître cette erreur, il ne s'agit que de réunir exactement les deux fils, & de voir ce que l'index marque, plus ou moins que zéro, & ce sera l'erreur, soustractive s'il marque plus, additive s'il marque moins.

Méthode  
pour la con-  
noître.

2522. Dans les micromètres où les fils ne peuvent concourir ensemble, & ne font que se toucher, il faut voir ce que marque l'index, quand les fils commencent à se toucher le plus légèrement, en retrancher encore le nombre des parties qui répondent à une épaisseur de fil (2536), & l'on aura la quantité de parties que l'index auroit marquées si les fils eussent pu concourir l'un sur l'autre.

M. Bradley avoit observé que dans un micromètre les fils en se touchant exactement l'un & l'autre s'unissent par une espèce de cohésion ou d'attraction, qui les retient unis quelque temps, lors même qu'on détourne la vis; enforte qu'on les voit ensuite se quitter subitement, & avec une espèce de secousse. Pour éviter l'erreur qui naît de cette attraction, il faut éviter de  
faire



faire toucher les fils, & il faut déterminer le commencement de la division & l'erreur de l'index par une autre méthode que celle de rapprocher les fils l'un contre l'autre, j'ai oui dire à Londres que M. Bradley se servoit de la méthode suivante.

2523. Soient *A* & *B* (*fig.* 199), deux mires placées à une distance quelconque; *BC* le fil fixe du micromètre placé sur la mire *B*, & *AD* le fil mobile placé sur la mire *A*; on examinera le nombre des parties indiquées par le micromètre; je suppose qu'il soit de 124, c'est-à-dire, un tour de vis & 24 centièmes: on changera ensuite la position du micromètre, en mettant le fil mobile *AD*, sur la mire *BC*; & le micromètre étant fixé invariablement dans cette situation, on fera mouvoir le curseur jusqu'à ce qu'il atteigne la mire supérieure; on examinera les parties que marque alors le micromètre, & si l'on trouve exactement le double de ce qu'on a trouvé dans la première opération, par exemple, 248; on sera sûr qu'il n'y aura rien à ajouter pour l'erreur du commencement de la division, & que l'index seroit à zéro exactement, si les centres des deux fils pouvoient concourir l'un sur l'autre; si l'on ne trouve que 238, c'est-à-dire, 10 de moins que le double de 124, ce sera une preuve qu'il y a 10 parties pour l'erreur & qu'elle est soustractive: en effet la distance des mires n'étant véritablement que de 114, comme le prouve l'espace parcouru par le curseur; le micromètre ne devoit marquer que 114 dans la première situation, au lieu de 124 qu'il marquoit; ainsi l'on ôtera 10 parties de toutes les mesures prises avec ce micromètre, & réduites au centre du fil.

2524. J'ai oui dire qu'en mesurant le diamètre de la lune ou du soleil avec un micromètre, M. Bradley étoit dans l'usage de rendre les deux fils tangentes intérieures au limbe, en sorte qu'au-dehors de chaque fil on commençât d'appercevoir un filet de lumière; dans ce cas, il faut ajouter au nombre des parties qui marquent la distance des deux fils, la valeur d'une épaisseur

Autre manière de la connoître.

## 26 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

de fil, pour avoir le nombre qui s'observeroit si chaque bord du soleil étoit sur le centre de chaque fil. Cependant je préfère de rendre les deux fils tangentes extérieures aux bords de l'astre que je mesure ; cela me paroît plus facile & plus exact ; je distingue mieux l'atouchement quand je vois le disque entier hors des fils, & la rondeur du disque me fait appercevoir, ce semble, avec une très-grande précision si le fil mord sur le disque, ou s'il en est éloigné. Dans ce cas, il faut ôter des parties du micromètre l'épaisseur d'un fil (2536), afin d'avoir la quantité de parties que marqueroit le micromètre, si les bords du soleil étoient exactement sur le milieu de chaque fil ; il faut y appliquer ensuite l'erreur de l'index (2521).

Soustraire  
l'épaisseur du  
fil.

Evaluer les  
parties du mi-  
cromètre.

Fig. 143.

2525. L'intervalle des pas de vis, qui dans un micromètre sert à mesurer les petits angles, étant supposé le même, il répond à un plus petit nombre de secondes, si la lunette est plus longue ; en effet l'intervalle  $GF$  (fig. 143) étant supposé de 2 pouces & l'angle  $GAF$  d'un degré, cette même étendue de 2 pouces portée à une plus grande distance du point  $A$ , ne rempliroit pas l'angle  $GAF$ , elle formeroit un plus petit angle.

Première  
méthode.

Si l'on mesure avec grand soin la distance  $AB$  qu'il y a entre le verre & les fils du réticule, en y ajoutant le tiers de l'épaisseur du verre ; & qu'on mesure aussi la demi-distance  $BF$  des fils quand l'index marque un nombre donné, on pourra dire  $AB : BF :: R : \text{tang. } BAF$ , & l'on aura en minutes & secondes la valeur des parties du micromètre qui répondent à  $BF$  (M. Cassini, p. 125).

Seconde  
méthode.

2526. La seconde méthode pour connoître les parties du micromètre est celle du temps ; on connoît le diamètre du soleil par le temps qu'il emploie à traverser le méridien (894, 1383), on mesurera ce diamètre en parties du micromètre, & l'on saura combien les parties du micromètre valent de minutes & de secondes.

2527. On peut y employer aussi une étoile observée dans le crépuscule, qu'on fera mouvoir le long d'un des

fil du micromètre ; les autres fils étant écartés d'une certaine quantité de parties du micromètre , marquées par l'index , on observera le temps que l'étoile emploie à aller d'un fil à l'autre , on convertira ce temps en secondes de degrés ( 2505 ) ; on multipliera les secondes par le cosinus de la déclinaison de l'étoile ( 892 ) , & l'on aura l'arc de grand cercle qui répond aux parties du micromètre.

2528. Lorsqu'on ne veut point employer la mesure du temps , ni la mesure du foyer d'une lunette , pour trouver la valeur des parties du micromètre , on est obligé de mesurer une base ; mais on a rarement besoin d'en venir-là , puisque le diamètre du soleil est connu aujourd'hui avec la plus grande précision ( 1388 ).

Troisième méthode.

2529. En expliquant cette méthode , je prendrai pour exemple l'opération par laquelle je déterminai les diamètres du soleil avec plus de précision qu'on ne l'avoit encore fait ; savoir , de  $31'30''\frac{1}{2}$  en été. Je mesurai l'étendue de la rue de Tournon , en face de l'observatoire que j'occupois , en employant les grandes perches qui avoient servi à la base de Villejuif ( *Mém. acad.* 1754 , pag. 176 ) ; ayant abaissé un à-plomb , du haut de mon observatoire , & nivellé la rue avec soin , je trouvai 915 pieds  $\frac{3}{4}$  de distance. Je plaçai à l'extrémité de la rue sur le mur de la maison qui fait face au Palais du Luxembourg , une règle *AB* de 9 pieds mise exactement d'à-plomb , avec deux mires *A* & *B* , c'est-à-dire , deux cartons sur lesquels il y avoit un cercle noir avec un cercle blanc dans le milieu. Leur distance ayant été trouvée exactement de 8 pieds  $\frac{1}{3}$  , & l'abaissement *HLA* , au-dessous de l'horizon de  $2^{\circ}36'$  , on trouve par le calcul du triangle *ALB* , que la distance *AB* des mires devoit paroître sous un angle de  $31'$  , en supposant 915 pieds  $\frac{3}{4}$  entre les objectifs de la lunette & le plan des mires. Je mesurai exactement leur distance en parties du micromètre , & je trouvai 4930 ou 49 tours de vis , & 30 centièmes ; telle étoit la valeur de l'angle de  $31'$  ; ainsi il est certain que quand la

Mesure d'une base.

Pl. XXIX.  
Fig. 100.

lune paroîtra sous le même nombre de parties, & qu'elle fera comprise entre les mêmes fils, son diamètre apparent fera aussi de 31', pourvu que le micromètre n'ait pas changé de place & qu'il soit toujours à la même distance des objectifs de la lunette. C'est ainsi que j'ai trouvé les diamètres du soleil (1388).

Dans le calcul précédent la base étoit assez longue pour que le foyer des objets terrestres fût sensiblement le même que celui des astres, enforte que je voyois les mires fort distinctement, sans allonger ma lunette & sans changer la situation des fils; à la rigueur il auroit fallu l'allonger de 12 lignes  $\frac{1}{7}$ ; mais sur un foyer de 9 pieds, le changement d'un pouce est peu sensible dans les lunettes ordinaires.

2530. M. Bouguer en traitant des différentes images qui sont distribuées le long de l'axe d'une lunette, évalue l'espace dans lequel elles sont à peu-près de même force, à un peu moins de la moitié de l'intervalle compris entre les extrêmes, lequel est de  $\frac{1}{27\frac{1}{2}}$  du foyer (*Figure de la Terre*, pag. 204). Le P. Pézenas (*Mém. de Marseille*, année 1755, pag. 105), dit qu'en observant sur terre un objet placé à 443 toises avec une lunette de 15 pieds, l'image restoit tout aussi distincte dans un espace de plus d'un pouce. Mais quoique l'image soit très-distincte, la mesure de l'objet en parties du micromètre va sans cesse en diminuant quand on enfonce l'oculaire; car l'image *GF* (fig. 143), prise un peu plus près de l'objectif *A*, y est nécessairement un peu plus petite; ainsi quand on change la longueur de la lunette, on ne peut plus compter sur la valeur des parties du micromètre, quand même la clarté de l'image seroit la même.

Fig. 143.

Cas où la  
base est trop  
petite.

2531. Si la base dont on se sert n'est pas assez grande, c'est-à-dire, si l'image des mires n'est pas très-distincte & très-nette en laissant l'oculaire au point qui lui convient pour les objets célestes, & si pour la bien voir on est obligé de retirer l'oculaire un peu plus que

pour les objets célestes, on aura pour la mesure de l'objet un trop grand nombre de parties. Dans ce cas-là voici le procédé que l'on suivra : on placera l'oculaire au point où l'image des mires est la plus distincte ; & l'on aura la longueur du foyer pour les mires , ayant trouvé la mesure en parties du micromètre , on dira *la distance des mires aux fils du micromètre , est à la distance des mires à l'objectif , comme le nombre de parties qu'on vient de trouver est à celui qu'on auroit au foyer des rayons parallèles*. On cherchera ensuite exactement le point où il faut placer les fils , ou la quantité dont il faut repousser les fils pour qu'ils soient exactement au foyer des rayons parallèles , par le moyen de cette proportion : *la distance des mires aux fils du micromètre est à leur distance à l'objectif , comme la longueur du foyer pour les mires , est à celle du foyer des rayons parallèles* ; on verra de combien de lignes ce nouveau foyer est plus court que celui des objets terrestres , & l'on enfoncera exactement de cette quantité le tube du micromètre quand il s'agira d'observer les astres ; alors le nombre de secondes qui répond à un tour de vis augmentera en raison inverse de la longueur du foyer.

Dans l'exemple précédent , je suppose que l'oculaire de la lunette ait été placé au point où l'image des mires étoit la plus distincte , & qu'on ait trouvé 1296 lignes pour la longueur du foyer , on dira  $924 \frac{3}{4}$  sont à  $915 \frac{3}{4}$  comme 1296 lignes qui sont le foyer de la lunette , sont à 1283,4 , qui sont le foyer des rayons parallèles , plus court de 12 lignes  $\frac{6}{7}$  ou 12 lignes  $\frac{3}{7}$  que le précédent : il faut dans ce cas rapprocher de l'objectif le micromètre & la lunette , & cela de 12 lignes  $\frac{3}{7}$  pour observer les astres ; alors les parties du micromètre diminuent dans le même rapport. Si l'on peut voir assez distinctement les objets terrestres avec la disposition de l'oculaire qui convient aux astres , on peut se passer de ces opérations ; mais quand on se servira des lunettes achromatiques ( 2298 ) , il sera absolument nécessaire de faire ces calculs , parce que leur foyer n'a

point cette étendue le long de l'axe, qu'on observe dans les lunettes simples. Les micromètres appliqués aux quart-de-cercles, se vérifient par la même méthode.

2532. Pour connoître ainsi par le moyen d'une bafe la valeur des parties d'un héliomètre (2435), il est encore plus essentiel d'allonger la lunette de la quantité convenable à la distance terrestre; & quoique l'on pût voir les objets très-distinctement sans retirer l'oculaire, on trouveroit une erreur très-considérable dans la valeur des parties; en effet les différentes images des objets que l'on regarde, étant distribuées sur un espace de 2 à 3 pouces, le long de l'axe d'une lunette de 18 pieds; l'oculaire vous fera voir l'image qui est à 18 pieds, quand il s'agira d'un objet céleste, & celle qui est à 18 pieds 2 pouces quand vous regarderez un objet terrestre; dans le dernier cas les deux images anticiperont l'une sur l'autre, quoique les deux autres qui sont à 18 pieds de foyer ne fassent que se toucher, parce qu'elles sont plus petites. Il est donc nécessaire d'employer la proportion précédente (2531) pour trouver la quantité dont on doit allonger la lunette en regardant les mires; cette quantité étoit de 4 pouces pour un héliomètre de 18 pieds & une bafe de  $215\frac{1}{4}$  (2529).

2533. Je ne parlerai pas ici de la manière de trouver la valeur des parties du micromètre objectif appliqué à un télescope, le calcul en est extrêmement compliqué; on peut consulter là-dessus le Mémoire du P. Pézenas. Je dois seulement observer qu'il y a des astronomes qui se sont trompés en croyant que la bafe qui sert à évaluer les parties d'un micromètre devoit se compter depuis l'oculaire; on peut voir la démonstration que j'ai donnée pour l'héliomètre simple dans les Mémoires de l'académie 1760, pag. 50. Il s'agit surtout de concevoir que le même écartement des verres de l'héliomètre, & le même nombre de parties du micromètre mesurent le diamètre d'un astre, & celui d'un

objet terrestre qui a le même diamètre vu du centre de l'objectif & non pas vu du foyer de la lunette.

2534. Il est vrai que l'image d'un astre qui a 30' de diamètre, ne se forme pas au même point que celle d'un objet terrestre qui paroît sous un angle de 30', mais cela n'empêche pas que les deux bords ne se touchent dans chacune de ces deux images; les angles qui se forment à ces deux foyers différens ne sont pas les mêmes, il est vrai, mais ils appartiennent à deux objets qui vus du centre de l'objectif paroîtroient sous le même angle, & dont le diamètre est représenté par le même écartement des objectifs & le même nombre des parties du micromètre.

2535. La méthode que j'ai indiquée pour connoître les parties du micromètre (2529), sert à vérifier les pas de la vis, & à connoître leurs inégalités; car si l'on place quatre mires qui soient éloignées l'une de l'autre de la même quantité, & qu'on mesure leurs distances à la première mire en parties du micromètre; on verra si ces distances sont exactement du même nombre de parties, comme elles doivent l'être si la vis est par-tout d'un pas égal.

2536. Cette méthode sert aussi à connoître l'épaisseur des fils, car ayant rendu l'un des fils tangente intérieure à l'un des cercles qui servent de mire, & ensuite tangente extérieure; le changement de l'index indiquera la valeur de l'épaisseur du fil qu'on est obligé d'ajouter dans certains cas au diamètre mesuré entre les fils (2524), & à la hauteur méridienne du bord du soleil (2581).

Épaisseur  
des fils.

2537. Pour connoître les vrais diamètres du soleil & des autres astres, il faut, tant qu'on le peut, mesurer les diamètres dans le sens horizontal, parce que les diamètres verticaux sont diminués par l'effet de la réfraction, & les diamètres inclinés le sont aussi plus ou moins (2246); on a aussi à craindre les ondulations de l'air & les décompositions de rayons, qui se font

On doit mesurer le diamètre horizontal.

## 32 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

de bas en haut, & qui affectent un peu les diamètres verticaux.

Augmen-  
tation du dia-  
mètre ver-  
tical.

2538. M. Bouguer fut étonné en 1748 la première fois qu'il observa le soleil avec son héliomètre, de trouver le diamètre vertical du soleil plus grand que le diamètre horizontal, quoique par l'effet des réfractions il dût être plus petit; & il pensa que cela pouvoit venir de ce que le bord supérieur paroît élevé par les rayons violets, les plus réfringibles de tous, tandis que le bord inférieur est vu principalement par les rayons rouges qui sont les moins réfringibles, & qui s'étendent vers le bas de la partie inférieure du disque solaire, (*Mém.* 1748, pag. 32).

### *Différence entre le Parallèle apparent & le Parallèle vrai.*

Remarques  
sur le parallèle  
apparent,

2539. EN observant les taches de la lune (3189); ou la différence d'ascension droite entre la lune & une étoile qui la suit <sup>(\*)</sup>, on est obligé de faire parcourir au bord de la lune le fil parallèle à l'équateur; mais à cause du changement vrai de déclinaison de la lune & du changement de la parallaxe en déclinaison, il arrive que le fil décrit par le bord de la lune, n'est point parallèle à l'équateur; & il faut faire une double correction à la différence d'ascension droite & de déclinaison. J'appelle donc *Parallèle apparent* la trace que suit la lune, où la direction du fil qu'elle parcourt dans la lunette, & *Parallèle vrai* celui qu'elle suivroit si pendant le temps qu'elle emploie à traverser la lunette, elle ne changeoit point de déclinaison, & que son mouvement fût exactement parallèle à l'équateur; de même j'appelle *Cercle horaire apparent* celui qui est perpendiculaire à la trace apparente ou observée, & *Cercle horaire*

(\*) Si l'étoile précède la lune, | la différence des parallèles vrai & c'est l'étoile qui parcourt le fil & | apparent devient indifférente.

*vrai*



vrai celui qui feroit perpendiculaire au véritable parallèle, & qu'il s'agit de trouver. Soit  $DE$  (fig. 201), un arc d'un degré pris sur l'équateur, & qui passe en quatre minutes de temps,  $LB$  une portion du parallèle qui traverse le cercle horaire dans le même temps: supposons que la lune pendant ces quatre minutes se soit éloignée de l'équateur de la quantité  $BC$ , ou par le changement de la parallaxe, ou par celui de la déclinaison vraie, elle se trouvera en  $C$  au lieu de se trouver en  $B$ , & elle aura parcouru l'espace  $LC$  au lieu du parallèle  $LB$ ; cet arc  $LC$  est le parallèle apparent, & l'arc perpendiculaire à  $LC$  est le cercle horaire apparent, c'est celui par rapport auquel on se trouve avoir mesuré la différence d'ascension droite, quand on a dirigé le fil du réticule sur le parallèle de la lune; l'angle que font entre eux ces deux cercles, est l'angle  $CLB$  du parallèle vrai & du parallèle apparent, c'est cet angle qu'il s'agit de trouver. M. Mayer a donné une formule pour cet effet, dans son mémoire sur la libration, mais il me paroît s'être trompé; en voici une qui est exacte.

2540. Si  $LB$  est le parallèle vrai de la lune dans l'espace de quelques minutes,  $L$  son lieu apparent dans le vertical  $DL$  au premier instant,  $LB$  étant tirée parallèlement à  $DE$ , le point  $B$  feroit le lieu apparent de la lune dans le vertical  $EB$ , si la parallaxe de hauteur & la déclinaison vraie de la lune n'eussent point changé; mais si la parallaxe de hauteur a diminué de la quantité  $BA$ , la lune, au lieu de décrire le parallèle  $LB$ , a décrit le parallèle apparent  $LA$  qui fait avec le premier, un petit angle  $ALB$ , dont nous devons chercher la valeur. Je négligerai ici le changement de la parallaxe d'ascension droite dans le même espace de temps, parce que ce changement ne pouvant altérer  $BL$  que d'une très-petite portion, il n'en résulteroit sur l'angle  $BLC$  qu'une partie encore plus négligeable. Le sinus de l'angle  $ELC$  est égal à  $\frac{BC}{BL}$  (3613), ou parce que les petits

Planc. XXIX.  
Fig. 201.

Première  
cause de diffé-  
rence.

# 34 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

*Fig. 201.* arcs font égaux à leurs sinus, l'angle lui-même exprimé en décimales du rayon fera  $\frac{BC}{BL}$ ;  $ABC$  est égal à l'angle parallactique, on mettra à la place de  $BC$  sa valeur  $AB \cos. B$  (3611); à la place de  $AB$  qui est le changement de la parallaxe de hauteur, on mettra sa valeur en secondes  $= \frac{p. d h. \sin. h}{57.} (1631)$   $d h$  étant le changement de la hauteur de la lune; à la place de  $d h$  on mettra  $BL \sin. B$ ; enfin l'on multipliera par  $57^\circ$  pour convertir en secondes (3359), & l'on aura  $p. \sin. h. \sin. B \cos. B$  pour la valeur de l'angle cherché  $ALB$  exprimé en secondes.

Sa valeur.

2541. Je suppose, par exemple, que la parallaxe horizontale de la lune le 20 Octobre 1763 à  $6^h 30'$  du soir étoit de  $54' 2''$ , sa distance au méridien  $75^\circ$ , la déclinaison  $5^\circ 36'$ , la hauteur  $14^\circ$ , & l'angle parallactique  $B 40^\circ 57'$  (1036); on ajoutera le log. sin. de  $14^\circ$ , ceux du sinus & du cosinus de  $40^\circ 57'$ , & celui de  $54' 2''$  ou  $3244''$ , on aura le logarithme de  $6' 28''$  qui est l'angle cherché  $ALB$ .

On trouveroit à peu-près le même résultat en calculant la parallaxe de hauteur pour deux instans, éloignés, par exemple, de  $4'$  l'un de l'autre; car alors l'arc  $LB$  seroit de  $3600''$  environ, le changement  $AB$  de la parallaxe de hauteur pris dans les tables, seroit trouver  $BC$ , & par conséquent l'angle  $BLC$ ; nous ferons usage de cette correction (3189).

2542. Je joins ici une petite table des angles du parallèle vrai avec le parallèle apparent, à raison de la parallaxe, à différentes distances du méridien, pour la latitude de Paris, en supposant la lune dans l'équateur & sa parallaxe horizontale de  $60'$ . Cette table servira dans bien des occasions, où il fust d'avoir cet

$0^h$	$0'$	$0''$
1	8	13
2	12	33
3	12	30
4	9	31
5	5	2
6	0	0

angle à 4 minutes près, sans craindre plus de 1'' d'erreur sur les différences d'ascensions droites observées en degrés, en supposant la différence de déclinaison d'environ un quart de degré; car  $15' \sin. 4' = 1''$ . L'on comprendra par la table précédente & par l'exemple ci-dessus, que la hauteur de la lune peut varier de  $28^\circ$ , sans faire varier de plus de 12 à 13 minutes l'angle dont il s'agit, puisqu'à  $3^h$  la hauteur étoit de  $28^\circ$ , & qu'elle étoit nulle à  $6^h$ .

Erreur qui peut en résulter.

2543. Le parallèle apparent diffère aussi du parallèle vrai, à raison du changement de la déclinaison vraie de la lune. La déclinaison de la lune change quelquefois de

Seconde causée de différence.

près de  $6^\circ$  par jour, en sorte qu'au lieu de parcourir le parallèle  $LB$  (fig. 201), dans l'espace de 4' de temps, elle parcourra  $LA$ , & la différence  $BC$  fera alors de 1' de deg. Pour trouver en général la valeur de l'angle

Fig. 201.

$ALB$ , je prends la quantité moyenne du mouvement horaire de la lune en ascension droite, qui est de  $33'$ , je les retranche de  $15^\circ$  qui est le mouvement de la sphère en une heure, & j'ai  $867'$  pour le mouvement de la lune par rapport au méridien; ainsi  $LB$  que je suppose parcouru en une heure fera  $867'$  cos. décl. & si l'on appelle  $n$  le mouvement diurne en déclinaison, on

Mouvement de la sphère en une heure.

aura  $\frac{n}{24}$  pour le petit changement  $BC$  en une heure de temps; l'angle  $BLC$  en minutes de degrés est égal à  $\frac{BC}{BL}$  multiplié par  $3438'$ , que contient l'arc égal au rayon

(3359); donc l'angle  $BLC = \frac{3438 n}{24. 867. \cos. \text{décl.}} = \frac{\frac{1}{2} n}{\cos. \text{décl.}}$ , c'est à-dire, la sixième partie des minutes du changement diurne de la lune en décl. divisée par le cosinus de la décl. de la lune, qui donne l'angle cherché en minutes.

2544. Pour appliquer ces deux équations à l'angle de position, on se servira des mêmes dénominations que dans les art. 1036, 1886, en appellant l'angle de position *Oriental*, quand le cerle de latitude est à l'orient du cerle de déclinaison vers le nord.

Règle pour ses deux équations.

La première partie de la correction (2540) qui dépend de la parallaxe sera orientale, & le cerle horaire apparent

# 36 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

fera à l'orient du cercle horaire vrai vers le nord, tant que la lune n'aura pas passé le méridien, ou fera dans l'hémisphère oriental; elle sera occidentale dans l'hémisphère occidental.

La seconde partie sera orientale quand la lune par sa déclinaison se rapprochera du pôle septentrional; car alors le cercle de déclinaison apparent sera plus à l'orient que le cercle de déclinaison vrai, vers le nord, il fera un angle oriental, en vertu de la dernière équation  $-\frac{\frac{1}{2}''}{\text{cof. décl.}}$ , c'est-à-dire, que cette seconde correction sera orientale; ce sera le contraire quand la lune tendra vers le midi.

2545. On prendra la somme de ces deux équations quand elles seront toutes les deux orientales, ou toutes les deux occidentales, sinon on prendra leur différence, & l'on aura la correction totale. Cet angle de correction doit se retrancher de l'angle de position ou de l'angle du cercle de latitude, & du cercle de déclinaison vrai (1036), si les deux angles sont de même dénomination; l'on aura l'angle du cercle de déclinaison apparent avec le cercle de latitude, dont on a besoin; on prendra leur somme, si l'un des angles est oriental, & l'autre occidental: nous en ferons usage (3189).

2546. Le parallèle vrai diffère encore du parallèle apparent, à raison de la réfraction (2160) qui change pendant le temps que l'astre emploie à traverser la lunette; cela arrive sur-tout quand l'on compare une planète à une étoile près de l'horizon (2250), comme dans la plupart des observations de Mercure. Je prendrai pour exemple les observations faites avec le réticule; ayant cherché dans les tables combien la réfraction en hauteur change dans l'intervalle de temps que l'astre met à parcourir la demi-largeur  $MF$  du rhomboïde (fig. 202), je prends  $FH$  égale à cette quantité, en sorte que  $MH$  soit le parallèle vrai, &  $MF$  le parallèle apparent sur lequel est dirigé le losange; l'observation nous donne la différence des passages sur le cercle horaire apparent  $MB$ ;

Equation  
pour la réfrac-  
tion.

Fig. 202.

## *Diff. entre le Parallèle apparent, &c. 37*

il faut les avoir sur le cercle horaire vrai  $MC$ , sur lequel devroit être dirigé le rhomboïde, si dans la pratique on n'étoit pas obligé de s'affujétir au parallèle apparent.

2547. Soit  $BM = l$ , le sinus de l'angle parallactique  $= s$ , son cosinus  $= r$ ; le changement de réfraction qui a lieu pour un degré de hauteur  $= r$ ; la différence des passages au cercle horaire apparent & au cercle horaire vrai, c'est-à-dire, en  $B$  & en  $C$  sera en secondes  $\frac{2 r t s d}{3600 \cos. décl.}$ .

2548. Cette équation s'ajoute à l'ascension droite observée en  $B$  quand la planète monte, & qu'elle est au midi du centre  $M$  de la lunette, ou quand elle descend & qu'elle est au nord.

2549. La correction de la déclinaison est égale à  $\frac{r t t d}{3600}$  qu'il faut ajouter dans tous les cas à la différence de déclinaison  $BM$ , parce que la réfraction accourcit toujours les distances. Je donnerai dans les mémoires de l'académie la démonstration de ces formules, qui est facile à déduire de ce qui précède.

## *DES OBSERVATIONS QUI SE FONT AVEC LE QUART-DE-CERCLE.*

2550. LES hauteurs apparentes des astres au-dessus de l'horizon sont les premières observations que l'on fasse (22), & elles pourroient suffire seules dans presque toutes les recherches d'astronomie; ainsi le quart-de-cercle est le plus important, le plus universel, le plus simple de tous les instrumens (2117). Après la description que j'en ai donnée ci-dessus (2311), il ne me reste qu'à en expliquer les vérifications & l'usage; je supposerai aussi la connoissance du micromètre qu'on y applique ordinairement, & que j'ai décrit fort au long (2366).

La première vérification que l'observateur doit faire dans un quart-de-cercle, consiste à voir si le fil du mi-

Vérification  
du fil hori-  
zontal,

cromètre qui doit être horizontal, n'est point incliné à l'horizon ; pour cela on tirera une ligne verticale sur un mur éloigné, au moyen d'un fil à-plomb, & une perpendiculaire à cette verticale ; on dirigera la lunette du quart-de-cercle sur ces lignes, & l'on verra si le fil horizontal n'est point incliné par rapport à la ligne horizontale ; il y a ordinairement dans les micromètres des vis (2376, 2378), par le moyen desquelles on corrige cette inclinaison, tant pour le fil fixe que pour le fil mobile.

Le passage des étoiles par le méridien sert aussi à reconnoître si le fil est bien horizontal ; car ayant dirigé dans le temps du crépuscule le quart-de-cercle dans le méridien, & vers une des étoiles qui sont à peu-près dans l'équateur, il faut que pendant une ou deux minutes, l'étoile ne cesse d'être coupée exactement en deux parties égales par le fil, & de le parcourir, ou qu'elle s'en écarte également, & dans le même sens, avant & après le passage au fil du milieu.

Commence-  
ment de la di-  
vision.

2551. Lorsque la lunette d'un quart-de-cercle est pointée à l'horizon, sa hauteur étant zéro, le fil à-plomb doit tomber sur le commencement de la division des hauteurs ; lorsqu'on divise un instrument pour la première fois, il seroit très-bon de chercher un point dans l'horizon par le moyen d'un bon niveau (2398) ; on pointerait la lunette sur cet objet, & marquant sur le limbe l'endroit où bat le fil à-plomb, on auroit le commencement de la division. Celui qui construit un quart-de-cercle peut aussi chercher le commencement de la division par l'opération du renversement que nous allons expliquer.

Vérification  
par le renver-  
sement.

2552. Lorsque l'instrument est divisé, l'astronome qui en veut faire usage doit nécessairement le vérifier par le renversement pour savoir si l'axe de la lunette fait exactement un angle de  $90^{\circ} 0' 0''$  avec le rayon qui passe sur le premier point de la graduation des hauteurs. La vérification par le renversement, consiste à mesurer la hauteur d'un objet à peu-près horizontal,

avec le quart-de-cercle droit & renversé, c'est à-dire, le centre étant successivement en haut & en bas ; la moitié de la différence fera l'erreur du quart-de-cercle. Soit  $OC$  (fig. 203), la lunette du quart-de-cercle pointée sur une mire  $M$ , ou sur un objet quelconque, situé vers l'horizon ; supposons que dans cet état le fil à-plomb  $CbP$  tombe sur le point  $B$  du quart-de-cercle, au lieu de tomber sur le point  $A$ , qui est le commencement de la division, l'arc  $AB$  fera la hauteur apparente de l'objet  $M$ , indiquée par la division.

Fig. 203 &  
204.

On renversera le quart-de-cercle, c'est-à-dire, qu'on mettra en bas le centre  $C$ , & la lunette  $OE$  (fig. 204), le commencement  $A$  de la division étant en haut, & la lunette  $OE$  à même élévation au-dessus du sol que la lunette  $OC$ , dans la première observation, (2554) ; l'on pointera la lunette  $OE$  sur le même objet, & l'on suspendra le fil à-plomb avec de la cire sur un point  $D$  de la division, tel que sa partie inférieure vienne battre sur le centre  $C$ , c'est-à-dire, sur le point où le fil étoit suspendu dans la première situation ; l'arc  $AD$  marquera la hauteur de l'objet, ou sa dépression au-dessous de l'horizon ; si cet arc  $AD$  n'est pas égal à l'arc  $AB$  (fig. 203), qui marquoit la hauteur de l'objet dans la première situation, la moitié de la différence fera l'erreur de l'instrument. En effet, si dans la première opération l'on a trouvé la hauteur de l'objet de  $1^{\circ} 20'$  égale à l'arc  $AB$ , & que dans l'autre on ait la hauteur  $1^{\circ} 24'$  égale à l'arc  $AD$  ; il est évident qu'en éloignant de  $2'$  le point  $A$  de la lunette  $O$ , l'on aura  $1^{\circ} 22'$  dans les deux cas, comme cela doit être si le rayon qui passe au point  $A$  fait véritablement un angle droit avec l'axe optique de la lunette. On sentira facilement que le premier point de la division  $A$  étant trop près de la lunette ou du point  $O$ , est aussi trop près du point  $B$ , ou du fil à-plomb dans la fig. 203, ainsi la hauteur  $AB$  prise dans la situation naturelle du quart-de-cercle paroît trop petite. C'est le contraire dans la fig. 204 ; le point  $A$  étant trop près du point  $O$ ,

fig. 203 &  
204.

se trouve trop éloigné du point *D*, où est suspendu le fil à-plomb qui bat sur le centre en *C*, ainsi l'arc *AD* qui indique la hauteur de l'objet, est trop grand, de la même quantité qu'il étoit trop petit dans le cas de la fig. 203, parce que le point du limbe où répond le fil dans les deux situations est placé précisément en sens contraire par rapport au commencement *A* de la division; il est plus près de la lunette *O*, dans la fig. 203, & plus loin dans la fig. 204.

2553. Si l'objet *M* est à peu-près dans l'horizon, on pourra se servir du micromètre (2366) pour mesurer ces hauteurs; on suspendra le fil à-plomb au centre; on inclinera le quart-de-cercle jusqu'à ce que le fil suspendu sur le centre vienne pendre exactement sur le premier point de la division; on fera mouvoir le curseur du micromètre jusqu'à ce qu'il atteigne l'objet *M* (fig. 203), & l'on aura ainsi le nombre de minutes & de secondes qui marque sa hauteur apparente sur le quart-de-cercle. Le quart-de-cercle étant renversé (fig. 204); on suspendra le fil sur le premier point de la division *A*, on inclinera le quart-de-cercle jusqu'à ce que le fil vienne pendre exactement sur le centre *C*, & l'on mesurera encore la hauteur de l'objet avec le micromètre; la différence entre ces deux hauteurs sera le double de l'erreur de l'instrument: par exemple, je suppose que le quart-de-cercle étant droit il a fallu faire descendre le curseur du micromètre à 600 parties pour mesurer la hauteur de l'objet, ce qui donne la hauteur de 600 parties au-dessus de l'horizon, & que dans le renversement il a fallu le faire descendre seulement de 400, la moitié de la différence est 100; c'est l'erreur qu'il faut ôter de toutes les hauteurs observées quand le quart-de-cercle est droit.

Dans le cas où l'on voudroit corriger l'erreur trouvée, par le moyen de la vis du chassis dormant (2374), on élèvera le fil mobile au-dessus du fil fixe de 100 parties, & mettant la clef sur le cadran en *N* (fig. 159), on fera remonter le fil fixe jusqu'à ce qu'il concoure  
exactement



exactement avec le fil mobile ; on mettra ensuite les deux index *A* & *I*, exactement sur zéro , & l'on sera sûr que les hauteurs mesurées avec le quart-de-cercle , se trouveront plus petites de 100 parties qu'elles n'étoient auparavant.

2554. J'ai dit que pour cette vérification , il falloit que la lunette fût à même hauteur au-dessus du sol où l'on est , dans les deux positions du quart-de-cercle (2552) ; car comme l'objet n'est jamais à une distance infinie , sa hauteur seroit différente dans les deux situations , si la lunette étoit plus ou moins élevée ; ainsi quand la lunette sera renversée ( *fig. 204* ), il faudra élever le pied de l'instrument , & au moyen d'une règle faire en sorte que le centre de l'objectif de la lunette soit précisément aussi haut que dans la première situation ( *fig. 203* ).

La lunette doit être à même élévation.

*Fig. 204.*

*Fig. 203.*

Si l'on ne peut pas commodément élever le quart-de-cercle , on mesurera la quantité dont la lunette sera plus basse dans le renversement , aussi bien que la distance de la mire *M* à l'objectif de la lunette , & résolvant le triangle donné par ces deux lignes , on trouvera l'angle qu'il faut ajouter à la hauteur de la mire observée dans le premier état , pour avoir la hauteur qui devroit avoir lieu dans le renversement , indépendamment de l'erreur du quart-de-cercle ; & c'est cette hauteur corrigée qu'il faut comparer avec celle qu'on aura effectivement observée dans le renversement.

On peut aussi éviter ce calcul en plaçant deux mires en *M* & en *N*, c'est-à-dire , deux objets remarquables , qui soient l'un au-dessous de l'autre , précisément de la même quantité que la lunette est plus basse dans une des situations ; on pointera sur la mire la plus élevée *M*, quand la lunette sera la plus haute ; mais on pointera sur la mire inférieure *N*, dans le renversement ; alors tout se fera comme s'il n'y avoit qu'une seule mire , & que la lunette eût été mise à la hauteur de la mire *M* dans les deux situations.

Manière d'y suppléer.

2555. Il est nécessaire pour la sûreté & l'exacti-

Dernier point de la division.

## 42 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

tude des observations, que le dernier point de la division soit vérifié, aussi bien que le premier. Lorsqu'on construit un instrument, que le centre & la lunette sont placés, le limbe dressé & l'arc décrit sur le limbe; il s'agit de marquer le dernier point de la division des hauteurs ou le point de  $90^{\circ}$  degrés, qui est vers la lunette *O*, (*fig.* 203); pour cet effet l'on place une règle bien droite qui passe sur le centre du quart-de-cercle, & qui touche le limbe; on met sur cette règle la lunette d'épreuve (2503), & l'on fait mouvoir la règle jusqu'à ce qu'on voye au centre de la lunette d'épreuve, le même objet qu'au centre de la lunette du quart-de-cercle; c'est une preuve qu'alors la règle & la lunette d'épreuve son exactement parallèles à la lunette de l'instrument; & comme je suppose qu'un des bords de la règle passe toujours sur le centre, la règle marquera par son autre extrémité sur la circonférence du quart-de-cercle, le point où doit finir la division des hauteurs, c'est-à-dire, le point où doit battre le fil à-plomb quand la lunette sera dirigée au zénit. Si l'objet dont on se sert, n'est pas assez éloigné pour que la différence de hauteur qu'il y aura entre la lunette d'épreuve & la lunette de l'instrument soit insensible, il faudra employer deux mires qui soient entre elles à même distance que les lunettes, par la même raison que dans l'art. 2554. Si l'instrument est fait & divisé, l'astronome qui veut en faire usage, doit s'assurer aussi du dernier point de la division; c'est ce qu'on fait par le retournement.

Vérification  
par le retour-  
nement.

2556. La vérification par le retournement se fait au moyen des étoiles voisines du zénit; elle sert à vérifier si le point du zénit a été bien déterminé par l'opération précédente, ou s'il n'est arrivé aucun dérangement à la lunette & au limbe de l'instrument. L'on observe la hauteur d'une étoile voisine du zénit, dans les deux positions de l'instrument; le limbe étant tourné vers l'orient & ensuite vers l'occident; cette hauteur doit être exactement la même, si la lunette est bien parallèle à la ligne de  $90^{\circ}$ ; mais si l'on trouve 4' de dif-

férence entre les deux hauteurs c'est une preuve qu'il y a deux minutes d'erreur au zénit.

2557. En effet, quand on observe une étoile *E* (fig. 205), le fil à-plomb étant sur *CB*, si *A* est le point de  $90^\circ$ , *AB* fera la distance de l'étoile au zénit marquée par le quart-de-cercle, & *DB* fera sa hauteur; si le point *A* est de 2' trop éloigné de la lunette *O*, la distance au zénit *AB* paroîtra trop petite, & la hauteur trop grande; mais quand le quart-de-cercle sera retourné comme dans la fig. 206, le fil à-plomb tombera sur *CE*, l'arc *AE* fera la distance de l'étoile au zénit marquée par le quart-de-cercle; & comme le dernier point de la division des hauteurs où le point *A* est de 2' trop éloigné de la lunette *O*, & par conséquent du point *E*, la distance au zénit *AE* paroîtra trop grande de 2', par la même raison qu'elle paroîsoit trop petite dans la première situation; ainsi l'on trouvera 4' de plus dans cette distance au zénit que dans la première, ce qui fera connoître que l'erreur au zénit est de 2': il faudra ôter ces 2' de la hauteur observée dans la première situation, & par conséquent de toutes les hauteurs que donne le quart-de-cercle, dans sa situation ordinaire.

Fig. 205.

Fig. 206.

2558. Dans cet exemple, l'erreur est différente de ce qu'elle étoit dans l'article 2552; si pareil cas arrivoit ce seroit une preuve que l'arc total au lieu d'être de  $90^\circ$  seroit trop petit de 4', puisque le premier point de la division est trop près de la lunette (2552), & que le dernier point en est trop éloigné (2557). Dans ce cas, il faudroit augmenter toutes les hauteurs à proportion de 4' pour  $90^\circ$ , indépendamment de l'erreur constante de 2' additive à toutes les hauteurs. Nous avons cité plusieurs exemples semblables (2180). On peut aussi reconnoître la même chose avec le compas à verge (2563); mais il est très-bon de se ménager une autre espèce de vérification pour l'arc total, par les méthodes précédentes.

Erreur de  
l'arc total de  
 $90^\circ$ .

*Vérification d'un Sextant à deux Lunettes.*

Utilité d'un  
Sextant.

2559. LE SEXTANT à deux lunettes tient lieu d'un quart-de-cercle; il est plus léger & plus commode, ce qui fait qu'on le préfère communément aujourd'hui, lorsqu'il s'agit des grands instrumens mobiles de 5 ou 6 pieds de rayon; les deux instrumens de 6 pieds qu'avoit M. de la Caille, ceux de Milan, de Vilna en Pologne, qui ont également 6 pieds, & celui de l'Ecole Militaire qui en a quatre, sont faits de la même manière; c'est ce qui m'oblige à parler séparément de la vérification qui leur convient.

Fig. 207.

La première vérification d'un sextant (fig. 207), ou d'un octant, (car il suffit que l'arc ait  $45^\circ$ ), se fait de la même manière que celle du quart-de-cercle; on le vérifie par le retournement, pour déterminer le point *D* qui est le commencement de la division (2556); ou pour connoître la situation de la lunette verticale *CO*, (je l'appelle *verticale*, parce que c'est celle avec laquelle on observe près du zénit); on vérifie aussi le sextant par le renversement (2552), pour déterminer la position de la lunette horizontale *FG*, par rapport au point *D*; mais cette opération étant un peu incommode dans les grands instrumens, on y supplée par les étoiles élevées de  $45^\circ$ . Je supposerai que les divisions du sextant commencent au point *D*, & qu'il y ait  $60^\circ$  au point *I*; les observations faites à la lunette verticale, donneront alors sur le limbe des distances au zénit, & les observations faites à la lunette horizontale donneront des hauteurs.

Vérification  
à  $45^\circ$ .

2560. Le limbe du sextant pouvant se tourner vers l'orient & vers l'occident, l'on observera la hauteur méridienne d'une étoile située vers  $45^\circ$ , avec les deux lunettes & dans les deux situations de l'instrument; toutes les étoiles qui sont entre  $40^\circ$  &  $60^\circ$  de hauteur, peuvent servir à la vérification d'un sextant; pour un octant il faut choisir celles qui sont à  $45^\circ$  de hauteur

méridienne, ou environ. Si l'on ne trouve pas exactement une même hauteur de l'étoile par les deux lunettes & dans les deux positions, c'est une preuve que les lunettes ne font pas entre elles un angle droit, comme elles le devroient faire, & l'on aura la différence ou l'erreur à cet égard; mais on connoît l'erreur de la lunette verticale *CD* par le retournement (2556); on en conclura donc l'erreur de la lunette horizontale *FG*.

Fig. 207.

2561. EXEMPLE. Je suppose qu'à Milan, sous  $45^{\circ} 25'$  de latitude on ait observé dans le crépuscule, au mois de Mars, la distance de la Chèvre au zénit  $0^{\circ} 21'$  du côté du nord, avec la lunette verticale *CO*, la division regardant l'orient & le fil à-plomb tombant hors des  $60^{\circ}$ , ou au-delà du commencement de la division; je suppose qu'ensuite la distance ait été de  $17'$  le lendemain, lorsque le limbe regardoit l'occident & que le fil à-plomb tomboit au-dedans des divisions, comme dans la situation ordinaire; ce sera une preuve que la distance au zénit est exactement de  $19'$ , & que l'erreur de l'instrument est de  $2'$ , qu'il faudra ajouter à toutes les distances au zénit, ou ôter de toutes les hauteurs qu'on aura observées avec la lunette verticale; c'est l'erreur de cette lunette. On choisira une étoile, telle que  $\delta$  d'Orion qui sous la latitude de Milan passe vers  $44^{\circ}$  de hauteur,  $20'$  après la Chèvre; je suppose qu'avec la lunette verticale on l'ait observée au méridien; le fil à-plomb marquant  $45^{\circ} 50'$ , ce qui donne sa hauteur  $44^{\circ} 10'$ , le limbe étant tourné vers l'orient, & que le lendemain avec la lunette horizontale on ait trouvé cette hauteur de l'étoile  $44^{\circ} 7'$ , le limbe étant tourné vers l'occident; on fait par la première vérification qu'il faut ôter  $2'$  de toutes les hauteurs observées à la lunette verticale; donc, au lieu de  $44^{\circ} 10'$  on a  $44^{\circ} 8'$  pour la hauteur exacte; mais la lunette horizontale donne  $44^{\circ} 7'$ , ou  $1'$  de moins, donc il faudra ajouter  $1'$  à toutes les hauteurs observées à la lunette horizontale; à moins que le fil à-plomb ne fût avant le commence-

Erreur de  
la lunette de  
 $45^{\circ}$ .

## 46 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

ment de la division, & la hauteur négative. C'est ainsi qu'on a l'erreur des deux lunettes, par le moyen de cette double vérification au zénit & à  $45^{\circ}$ .

### *Vérification des divisions du Quart-de-Cercle.*

Nécessité  
d'examiner  
les divisions.

2562. LA vérification d'un quart-de-cercle faite au zénit & à l'horizon, fera connoître la situation de la lunette par rapport au premier & au dernier point de la division. S'il y a  $90^{\circ} 0' 0''$  de différence, ou si l'erreur se trouve exactement égale dans les deux cas, ce sera une preuve que l'arc de  $90^{\circ}$  est exact (2558); mais en supposant juste l'arc de  $90^{\circ}$ , les subdivisions peuvent ne l'être pas; un observateur exact ne sauroit mettre trop de soin à examiner celles de l'instrument dont il se sert; & M. de la Caille nous apprend qu'il l'avoit fait sur les siens, (*Astron. fund. pag. 158. Mém. acad. 1751, pag. 407*). Il seroit bien à souhaiter que tous les astronomes imitassent son exemple.

Avec un  
compas.

2563. On peut vérifier très-bien les divisions avec un compas à verge, dont les deux pointes soient très-fines & munies chacune d'un microscope, ou du moins d'une forte loupe; on prend d'abord avec ce compas la distance du centre au premier point de la division, & l'on voit si cette distance est bien égale sur toute la circonférence; car s'il y a la moindre différence, il faut en tenir compte dans le calcul de la distance des points entre eux. On porte aussi ce rayon depuis le commencement de la division jusqu'à  $60^{\circ}$ ; ce point est un des plus importants, & tous les autres en dépendent; on prend ensuite l'arc de  $30^{\circ}$  avec le compas à verge, & l'on voit si étant porté 3 fois sur la circonférence il tombe exactement sur  $60$  & sur  $90^{\circ}$ . Il en est de même des autres subdivisions. Le compas qui porte des verres sur lesquels on trace des lignes très-fines est fort commode pour ces vérifications; (*Boscovich de litter. exped.*).

2564. L'observation des angles sur le terrain (2583) fournit aussi un moyen de vérifier les divisions d'un petit quart-de-cercle, lorsqu'il a une alidade. On mesure divers angles autour de soi, & mettant toujours au même point l'interfection des axes des lunettes, la somme doit faire  $360^{\circ}$ , si l'on fait le tour de l'horizon, & qu'on réduise tous les angles au plan même de l'horizon (2585). C'est ainsi que M. Bouguer reconnut qu'il falloit ajouter  $20''$  à l'arc de  $60^{\circ}$  &  $30''$  à l'arc de  $90^{\circ}$  dans le quart-de-cercle dont il se servoit au Pérou, (*Figure de la Terre*, pag. 62 & 66).

Avec le tour de l'horizon.

M. de la Condamine (pag. 18), nous apprend qu'il vérifia avec succès les divisions de son quart-de-cercle, de degré en degré, en plaçant perpendiculairement à une distance de 500 toises du centre du quart-de-cercle, un cordeau avec des mires en ligne droite à la longueur calculée des tangentes de degré en degré.

Avec des mires en ligne droite.

2565. M. Passemant a proposé un moyen par lequel on pourroit non-seulement connoître, mais corriger très-exactement les plus petites erreurs de la division du limbe; il consiste à placer les points de divisions excentriquement sur des vis de cuivre qui soient bien au niveau du limbe, mais auxquelles on puisse donner un petit mouvement sur leur axe aussi-tôt qu'on aura reconnu qu'un des points n'est pas tout-à-fait à une juste distance du commencement de la division. *Hist. acad.* 1746, pag. 121.

Si l'on n'est pas en état de corriger ainsi les divisions, il faut du moins en connoître l'erreur, & dresser une table de la quantité qui devra se retrancher de chaque hauteur, mesurée sur le quart-de-cercle, pour avoir celle qu'on devoit trouver si les divisions eussent été exactes. On peut très-bien s'assurer par ce moyen d'une exactitude de  $4''$  à  $5''$  sur un sextant de 6 pieds.

Précision que l'on peut espérer.

2566. M. le Duc de Chaulnes a donné, à la suite des arts de l'académie, des méthodes extrêmement ingénieuses pour diviser au microscope & à la machine, des quarts-de-cercles beaucoup plus exactement qu'on ne

# 48 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

l'a jamais fait ; il avoit construit avec ces principes un quart-de-cercle d'un pied , qui donnoit à peu près la même précision que les instrumens ordinaires de 6 pieds (*Mém. acad.* 1765) : ce quart-de-cercle a passé entre les mains de M. le Prince de Conti.

## *Corrections à faire dans les Hauteurs observées.*

Fig. 208. 2567. Le fil horizontal qui traverse le champ d'une lunette , quoique parallèle à l'horizon , ne répond pas dans le ciel à des points qui soient à même hauteur. Soit  $Z$  le zénit (*fig.* 208),  $ZA$  le vertical qui passe au centre de la lunette ,  $ZB$  le vertical qui passe en  $B$  par le bord du champ de la lunette ; dans le triangle sphérique  $ZAB$  rectangle en  $A$ , l'hypothénuse  $ZB$  est plus grande que le côté  $ZA$ , donc un astre qui paroîtra sur le fil en  $A$ , fera plus près du zénit ou plus élevé au-dessus de l'horizon , que l'astre qui paroîtra sur le même fil au point  $B$ . Le fil  $AB$  est dans le plan d'un grand cercle qui passe par mon œil , & qui est incliné à l'horizon autant que la lunette dans laquelle je regarde ; ce plan n'est point celui d'un almicantrat ( 191) ou d'un petit cercle parallèle à l'horizon ; c'est pourquoi les points  $A$  &  $B$  ne sont point à mêmes hauteurs mesurées sur la circonférence des verticaux ,  $ZA$  &  $ZB$ .

Correction  
des hauteurs  
prises au bord  
de la lunette.

Le point de la division d'un quart-de-cercle indiqué par le fil à-plomb , marque la hauteur du point  $A$  qui est le milieu de la lunette ; si l'on a observé un astre , & mesuré sa hauteur lorsqu'il étoit au point  $B$  du fil , le quart-de-cercle n'indiquant que la hauteur du point  $A$ , il faudra en retrancher la quantité dont le point  $B$  est plus bas que le point  $A$ , ou dont l'hypothénuse  $ZB$  est plus grande que  $ZA$ , pour avoir la hauteur du point  $B$ . Je démontrerai que , dans un triangle sphérique rectangle  $AZB$ , dont l'angle  $Z$  est très-petit , aussi bien que le côté  $AB$ , l'excès de l'hypothénuse  $BZ$  sur le côté  $ZA$  est égal à  $\frac{AB^2 \cotang. ZA}{2}$ , c'est-à-dire, la moitié

du



du carré de la distance au centre de la lunette exprimée en secondes, multipliée par la tangente de la hauteur, & divisée par le nombre de secondes que contient l'arc de  $57^\circ$  égal au rayon, (*Mém. acad.* 1757, pag. 516).

Ainsi dans le solstice d'été où la hauteur du soleil à Paris est de  $65^\circ$ , si le soleil étoit observé sur le bord de la lunette dont la moitié du champ eût  $40'$ , il faudroit retrancher  $30''$  de la hauteur indiquée par le quart-de-cercle, pour avoir la hauteur réelle du soleil au moment de l'observation. Il y a une différence pour le cas de la hauteur méridienne (2575).

2568. Par la même raison un astre observé dans le méridien, ne doit pas suivre exactement le fil horizontal du quart-de-cercle, à moins que l'astre ne soit dans l'équateur. En effet, puisque le fil horizontal d'une lunette placée dans le méridien, est dirigé dans le plan d'un grand cercle  $AFB$  (fig. 209), & non pas dans celui d'un parallèle diurne, tel que  $AGD$ ; il en résulte nécessairement que l'astre observé dans le méridien, & qui passe au point  $A$  sur le milieu du fil de la lunette, ne suivra pas le fil  $AF$ , & qu'il s'élèvera de la quantité  $IG$ , mais  $PA=PG$ , donc la différence  $FG$  entre l'hypothénuse  $PF$  & le côté  $PA$  ou  $PG$  est  $\frac{AF^2 \cot. AP}{2. 57^\circ}$  ou

Fig. 209.

$\frac{AF^2 \text{ tang. décl.}}{2. 57^\circ}$ ; cette quantité peut être plus grande pendant quelques instans que la quantité dont l'astre s'abaisse en s'éloignant du méridien; & un astre dont la déclinaison est boréale paroît s'élever dans la lunette après avoir passé le méridien, comme si la hauteur méridienne n'étoit pas la plus grande de toutes; cette espèce de paradoxe fut observé par M. Cassini, (*Figure de la Terre*, 1718, pag. 225), mais son explication ne m'a pas paru satisfaisante.

2569. Il est extrêmement important dans les observations délicates, & sur-tout dans les grands secteurs astronomiques (2380), de mettre la lunette exactement parallèle au plan qui passe par le centre de la suspension,

Du parallèle  
lisme de la  
lunette.

& par le limbe ; pour y parvenir on se sert de la lunette d'épreuve (2503), on la place sur une règle bien droite qui va du centre au limbe de l'instrument, on la dirige sur un objet terrestre fort éloigné, & si la lunette de l'instrument se trouve pointée sur le même objet, on est sûr qu'elle est parallèle au limbe. On est obligé communément d'employer pour cette vérification deux mires, dont l'une soit un peu plus élevée que l'autre, de la même quantité que la lunette d'épreuve est plus élevée que la lunette fixe, & l'on dirige alors la lunette la plus haute sur la mire qui est aussi la plus élevée.

M. de la Condamine & M. Bouguer, ont traité fort au long de l'importance du parallélisme des lunettes dans les grands secteurs, & des erreurs qui peuvent résulter du défaut de parallélisme ; la formule employée ci-dessus (2567) donne un moyen très-simple d'assigner les quantités de ces erreurs dans les deux cas principaux.

Fig. 210.

2570. Soit  $P$  le pôle, (fig. 210),  $PE$  le méridien dans lequel on ait placé un instrument avec tout le soin convenable, au moyen d'une méridienne filaire (2579) : soit  $ED$  la quantité dont la lunette s'écarte de ce plan  $EP$  que je suppose le plan du limbe & du méridien ; soit  $DE$  la perpendiculaire abaissée sur le limbe ; elle tombe au point  $E$ , & le point  $E$  du limbe est celui auquel on rapporte l'astre observé en  $D$ , lorsqu'il étoit au milieu de la lunette, car dans la vérification au zénit (2556), on fait en sorte que la lunette dans les deux positions en  $D$  & en  $G$  donne la même hauteur, la même distance au pôle, ou que  $PD$  soit égale à  $PG$  ; or le point  $E$  de l'instrument auquel répond une étoile observée en  $D$  & en  $G$ , ne peut être le même, sans que la ligne  $DEG$  soit perpendiculaire en  $E$ , sur le plan de l'instrument. Ayant pris  $PF = PD$ , on aura  $EF$  pour l'erreur commise dans la distance de l'astre  $D$

au pôle, & cette erreur =  $\frac{ED^2 \cot. PE}{2.57^{\circ}}$  (2567) est comme la tangente de la déclinaison de l'astre. Elle deviendroit extrêmement considérable si l'on observoit un astre

Erreur qui  
en résulte sur  
les hauteurs.

très-près du pôle, mais cela n'arrive jamais; ainsi l'erreur qui résulte d'un petit défaut de parallélisme qui ne seroit que de 5 à 6', est tout-à-fait insensible dans les observations qu'on a coutume de faire, sur-tout près du zénit.

2571. Examinons un autre cas qui a, peut-être, souvent eu lieu parmi les astronomes, & dans lequel l'erreur est beaucoup plus grande. Je suppose que l'on connoisse bien la marche de son horloge & le temps vrai du passage d'un astre au méridien; au moment où l'on fait qu'il y passe on dirige la lunette au point *E* du méridien (fig. 211); mais la lunette s'écarte du limbe de la quantité *EH*, ainsi le limbe se trouvera placé dans le vertical *ZH*, je dis dans le vertical, parce qu'au moyen du fil à-plomb le limbe est toujours vertical; ayant donc élevé la perpendiculaire *NEH* sur le méridien *ZEK*, le point *H* du vertical ou du plan de l'instrument sera celui où l'on rapportera la hauteur observée; ayant pris  $ZK = ZH$ , l'erreur sera  $= KE = \frac{EH^2 \cot. ZE}{2. 57^{\circ}}$ ; ainsi elle augmente comme la tangente de la hauteur; cette erreur peut devenir considérablement plus grande que celle qui avoit lieu dans le premier cas (2570), parce qu'il est très-ordinaire d'observer des astres près du zénit, où la tangente de la hauteur est presque infinie, ainsi l'on voit combien il importe de placer dans le méridien le limbe & non pas la lunette (2598), lorsqu'on a quelque doute sur leur parallélisme; ce qui fait la nécessité des méridiennes filaires dans ce cas-là (2579).

Cas où elle seroit considérable.

Fig. 211.

2572. Les observations des hauteurs méridiennes; quand elles ne sont pas faites exactement & dans le méridien, & au centre de la lunette, exigent deux considérations qui se rapportent à la même formule: supposons qu'un astre ait été observé à quelque distance du méridien, mais au centre même de la lunette; soit *SH* (Fig. 212), la hauteur méridienne du soleil, *SL* le

Fig. 212.

Fig. 212. perpendiculaire au méridien  $ZSH$ , & dont la portion  $SB$  est confondue avec le fil de la lunette,  $L$  le milieu du fil & en même temps le point où étoit le soleil quand on a observé sa hauteur,  $SM$  une portion de l'almicantarate, ou un arc dont tous les points  $S$  &  $N$  ont la même hauteur au-dessus de l'horizon; si l'on suppose que l'arc  $SB$  soit  $=m$ , la quantité  $BM$  dont le point  $B$  du cercle  $SBC$  ou du fil de la lunette est plus bas que le point  $M$  ou le point  $S$ , est égal à  $\frac{m^2 \text{ tang. } h}{2.57^{\circ}}$  (2567); mais le point  $L$  du parallèle à l'équateur est plus méridional que le point  $B$ , dans le cas de la figure 212, parce que le parallèle à l'équateur  $SL$  s'écarte du grand cercle  $SBC$ , de la quantité  $\frac{m^2 \text{ tang. décl.}}{2.57^{\circ}}$  (2568).

Changement  
des hauteurs.

Ainsi la petite quantité  $ML$ , dont la hauteur de l'astre change à une distance  $m$  du méridien, est égale à  $\frac{m^2}{2.57^{\circ}}$  (tang. haut. + tang. décl.). le signe — est pour les astres qui passent au méridien entre le zénit & l'équateur. Cette formule n'a lieu que quand on observe la hauteur avec un quart-de-cercle mobile qui n'est pas exactement dans le méridien, mais qu'on observe sur l'axe même de la lunette.

2573. C'est ordinairement en temps & non pas en degrés, que la quantité  $m$  se présente à un observateur; il faut alors, non-seulement, réduire le temps en minutes de degrés à raison de  $15^{\circ}$  par heure, mais encore diminuer le nombre de minutes en le multipliant par le cosinus de la déclinaison, afin d'avoir l'arc de grand cercle qui est la distance  $SB$ , où l'arc  $SL$  du parallèle qui lui est sensiblement égal.

2574. EXEMPLE. Une planète ayant  $65^{\circ}$  de hauteur, &  $23^{\circ} 50'$  de déclinaison boréale, a été observée 4 minutes de temps après avoir passé par le méridien; il faut corriger la hauteur observée, & en conclure la hauteur méridienne; on réduit d'abord les 4 minutes en degrés, & l'on a  $1^{\circ}$  ou  $3600''$ , on les multiplie par le cosinus de  $23^{\circ} 50'$ , & l'on a  $3293''$  pour la quan-

tité  $m = SB$ . Du double du logarithme de cette quantité on ôtera le logarithme de l'arc égal au rayon qui est 5, 31442; on ajoutera au reste le logarithme de la tangente de la déclinaison, & l'on aura le logarithme de 23" 3, dont la moitié est 11" 6, second membre de la formule (2572).

On ajoutera au même reste le logarithme de la tangente de la hauteur, & l'on aura le logarithme d'un nombre dont la moitié 56" 4 sera le premier membre de la formule; retranchant le second il restera 44" 8 à ajouter à la hauteur observée, pour avoir la véritable hauteur méridienne.

2575. Quand le centre des fils est exactement dans le méridien & qu'on veut avoir la hauteur méridienne, par le moyen de la hauteur observée au bord de la lunette, on n'a besoin que de la seconde partie de la formule précédente ou de l'art. 2568. C'est ce qui arrive quand on se sert d'un quart-de-cercle, ou mural ou mobile, qui est exactement dans le méridien, & qu'on mesure la hauteur avant ou après le vrai passage au méridien; parce qu'alors on cherche la hauteur non pour le moment de l'observation, mais pour celui du passage en S. L'erreur est nulle pour un astre situé dans l'équateur, parce qu'alors il suit exactement le fil de la lunette, & paroît toujours à la hauteur indiquée par le centre des fils, & par les divisions du quart-de-cercle. On trouvera les tables de ces équations avec des exemples, dans mon *exposition du calcul*, pag. 278, & dans les mémoires de 1757, pag. 522.

2576. CALER un quart-de-cercle mobile, c'est le rendre droit ou vertical dans tous les sens, & le placer à une hauteur donnée. Il faut non-seulement que le fil à-plomb tombe exactement sur le point de la division, mais il faut que le fil soit en l'air & ne frotte pas sur le limbe; on se sert pour cela des vis du pied (fig. 149). Pour être sûr que le fil à-plomb n'est ar-

Manière de  
caler un quart-  
de-cercle.

Fig. 149.

au plan du limbe; & s'il revient battre exactement sur le même point; on est rassuré à cet égard. Il faut rendre le plomb aussi pesant qu'il est possible, c'est-à-dire, lui donner toute la masse que le fil est capable de supporter; on fait tremper le poids dans l'eau afin que les oscillations soient plutôt arrêtées, & qu'on puisse s'assurer à plusieurs reprises que le fil est exactement sur le point (2314).

2577. Si l'on n'a pas une voûte ou un plancher très-solide pour asseoir un quart-de-cercle, il est fort à craindre qu'en allant du fil à plomb à la lunette on ne fasse incliner le plancher; cela causeroit dans l'observation une erreur, dont un astronome qui observeroit seul ne pourroit s'apercevoir. Pour y remédier, il faudroit avoir autour du quart-de-cercle un faux plancher sur lequel on marcheroit, qui ne dépendant point de celui où poseroit l'instrument, ne causeroit aucun dérangement dans sa situation; alors on dépendroit moins de la solidité du bâtiment.

Usage des  
faux plan-  
chers.

Observations  
des hauteurs  
correspondan-  
tes.

Fig. 135.

2578. Lorsqu'on veut observer des hauteurs correspondantes, on commence par diriger le quart-de-cercle vers le soleil, & le caler en tous sens, de manière que le fil à-plomb ne fasse que raser le limbe, y touchant à peine, lors même que l'on fait tourner le plan de l'instrument sur son axe, (2576). On dirige la lunette au soleil, & l'on fait en sorte que le soleil paroisse à droite & en haut de la lunette, par exemple en *S* (fig. 135); car le soleil qui monte réellement paroît descendre dans la lunette. En attendant que le bord du soleil soit descendu sur le fil horizontal *ED*, l'on va au fil à-plomb que l'on regarde au travers des microscope (2314); s'il ne répond pas exactement sur un des points marqués de dix en dix minutes, on donne au limbe un petit mouvement avec la verge de rappel, ou avec les vis du pied si l'on n'a point de verge de rappel; & l'on fait venir le fil exactement sur le point. Alors on retourne à la lunette, & l'on attend que le premier bord du soleil vienne toucher le fil

horizontal *ED*, on compte les secondes, & l'on a l'heure, la minute & la seconde, où le bord du soleil s'est trouvé à la hauteur qui est marquée sur le limbe par le fil à-plomb (221).

Après midi l'on dirige encore la lunette au soleil dans le temps qu'il approche de la hauteur où il a été observé le matin; on met alors le soleil à la droite du centre de la lunette & au-dessous du fil horizontal, c'est-à-dire, en *G*; & comme le soleil paroît monter après midi de *G* en *C* dans la lunette, on a le temps, avant que le dernier bord parvienne au fil horizontal *ED*, d'ajuster le fil à-plomb sur le même point, c'est-à-dire, sur la même dizaine de minutes où l'on a observé le matin. Quand le fil est bien placé, l'on retourne à la lunette, on compte l'heure, la minute & la seconde où le bord du soleil qu'on a observé le matin (par exemple le bord supérieur qui paroît inférieur dans la lunette) arrive au fil horizontal.

2579. La méthode des hauteurs correspondantes sert à placer dans le plan du méridien un mural (2588), une lunette méridienne (2604); elle sert aussi à tracer les méridiennes filaires dont il est absolument nécessaire de se servir quand on observe avec de grands secteurs (2571, 2598). Pour tracer une méridienne filaire, on perce un trou dans le volet d'une fenêtre ou dans une plaque de métal fixée dans le mur; on tend un fil du centre du trou jusqu'à l'autre extrémité de la chambre, à peu-près dans la direction de la méridienne; on abaisse des à-plombs de divers points de ce fil, & l'on tend un cheveu ou un fil très-fin le long de ces à-plombs, sur deux tasseaux de fer scellés aux deux extrémités de la chambre; on est assuré par les à-plombs que le fil se dirige vers le pied du gnomon, c'est-à-dire, qu'il passe sous la perpendiculaire du trou; pour s'assurer que ce fil est aussi dans le méridien, on obscurcira la chambre; l'on observera l'heure, la minute & la seconde où les deux bords de l'image du soleil arrivent au fil, & l'on en conclura le passage du centre du soleil à cette méridienne

Méridienne  
filaire.

filaire : les hauteurs correspondantes prises le même jour (922, 2578) apprendront si le midi vrai est d'accord avec celui que donne la méridienne ; & quand le fil sera bien placé, il faudra rendre le plan de l'instrument parallèle à ce fil, pour être sûr qu'il est exactement dans le méridien.

Usage des  
hauteurs.

2580. Les hauteurs correspondantes sont la meilleure façon de comparer une planète à une étoile fixe, & par-là de déterminer la position de la planète ; mais lorsqu'on ne peut absolument comparer un astre avec des étoiles, dont la position soit connue, il reste encore un moyen pour en déterminer l'ascension droite ; il est moins exact & plus long à calculer ; mais il est souvent le seul qu'il soit possible d'employer. Ce moyen consiste à observer des hauteurs avec le quart-de-cercle ; chacune de ces hauteurs, jointe avec le temps vrai, détermine l'ascension droite, si l'on suppose la déclinaison connue ; & si l'on prend deux hauteurs ensemble, elles déterminent à la fois l'ascension droite & la déclinaison de l'astre. On trouve dans le IV<sup>e</sup> volume des mémoires de Pétersbourg, pour 1729, diverses solutions d'un problème encore plus général, données par Herman, Euler, Bernoulli, Mayer & Krafft ; *ayant trois hauteurs d'un astre, & les intervalles des temps, trouver la hauteur du pôle, la déclinaison de l'astre & l'angle horaire*, ce qui donne l'ascension droite de l'astre ; on la peut trouver aussi par la trigonométrie en y employant de fausses positions, même dans les cas où la déclinaison seroit variable, en cherchant sa variation par les observations faites d'un jour à l'autre ; cette méthode est utile pour les comètes (3008), & je voudrois que les voyageurs qui sont revenus des pays lointains, sans avoir déterminé leurs longitudes, eussent fait seulement sur la lune de pareilles observations, l'objet auroit été rempli. Mais le calcul en est trop long pour qu'on doive employer cette méthode quand on en peut choisir d'autres ; ajoutons qu'elle ne peut donner l'ascension droite & la déclinaison tout à la fois que dans la sphère oblique, & que la précision qu'elle peut



peut donner pour l'ascension droite est toujours aux dépens de celle qu'on pourroit desirer sur la déclinaison ; mais en prenant deux hauteurs, dont l'une soit près du méridien, & l'autre près du premier vertical (249), on trouve avec le plus de précision qu'il soit possible, l'ascension droite & la déclinaison.

2581. Les déclinaisons des astres se déterminent directement par les hauteurs méridiennes, & ce sont les observations les plus fréquentes & les plus utiles pour cet objet ; mais il faut apporter dans ces observations toutes les attentions dont nous avons parlé ci-devant (2576 & suiv.). Il faut y appliquer les corrections des art. 2572 & 2575, si cela est nécessaire ; celle de l'erreur de l'instrument (2556) ; celles de la parallaxe & de la réfraction (Liv. IX & XII). On doit aussi avoir égard à l'épaisseur des fils (2536) : si en observant la hauteur méridienne du bord d'une planète on s'est servi du bord supérieur du fil, on doit retrancher de la hauteur observée la demi-épaisseur du fil. Nous allons donner un exemple de toutes ces corrections.

2582. Le principal usage des hauteurs méridiennes consiste à trouver la vraie déclinaison d'un astre : voici un exemple dans lequel j'ai rassemblé toutes les corrections, expliquées chacune à leur place dans les livres précédens.

EXEMPLE. Le 22 Mars 1752, j'observai à Berlin la distance du bord supérieur du soleil au zénit  $51^{\circ} 20' 36''$ , en faisant toucher le bord supérieur du fil au bord du soleil qui paroissoit en bas ; il faut en ôter  $18''$  pour l'erreur du quart-de-cercle trouvée par le retournement (2556), ajouter  $3''$  pour la demi-épaisseur du fil, ajouter  $1' 22''$  pour la réfraction, ôter  $7''$  pour la parallaxe du soleil, ajouter  $16' 5''$  pour le demi-diamètre du soleil ; & l'on a enfin pour la vraie distance du centre du soleil au zénit  $51^{\circ} 37' 33''$ , qui retranchée de la distance du zénit à l'équateur ou de la hauteur du pôle que j'ai trouvée de  $52^{\circ} 31' 30''$ , en tenant compte de l'erreur des divisions, donne la vraie déclinaison du centre du

## 58 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

soleil pour le 22 Mars à midi,  $0^{\circ} 53' 57''$  (854).

Mesure des  
angles sur le  
terrein.

2583. LORSQU'ON emploie le quart-de-cercle à mesurer des angles sur le terrain (2643), on doit avoir quelques attentions particulières, qui sont expliquées dans les auteurs qui ont traité de la mesure de la terre, tels que M. Bouguer, M. de la Condamine, M. de Maupertuis, M. de Thury, le P. Boscovich, & le P. Liefganig.

Vérification  
de l'alidade.

La première attention consiste à diriger l'alidade ou lunette mobile, aussi bien que la lunette fixe, vers un même objet, pour reconnoître si elles sont bien parallèles, quand l'alidade est sur le commencement de la division; dans le cas où elles ne seroient pas parallèles, on examineroit avec le micromètre combien de minutes ou de secondes il y a de différence, & ce seroit la quantité constante qu'il faut ajouter à toutes les distances observées, si l'index de l'alidade s'est trouvé hors des divisions du limbe dans la vérification qu'on en a faite; soustraire, si l'index s'est trouvé au-dedans du commencement de la division du quart-de-cercle.

La seconde attention, est d'examiner si l'alidade tourne bien concentriquement aux divisions, & si elle ne sort point des divisions un peu plus dans un point que dans l'autre; M. Bouguer ayant trouvé dans son quart-de-cercle un semblable défaut, explique dans son livre la manière d'en tenir compte dans le calcul.

La troisième, est une attention nécessaire pour disposer promptement un quart-de-cercle dans le plan des deux objets dont on veut mesurer la distance; Tycho-Brahé les faisoit tourner sur un genou, comme dans la *fig.* 178, à la manière de nos télescopes & de nos graphomètres ordinaires; Flamsteed se servoit du mouvement parallatique (*fig.* 148): on peut aussi incliner le plan du quart-de-cercle par les vis du pied pour le mettre dans le plan des deux objets; mais le double genou (*fig.* 153), est le moyen le plus commode & le plus général pour mettre promptement le quart-de-cercle dans le plan des deux objets.

*Fig.* 153.

2584. On imagine une ligne droite qui passe par les deux astres ou par les deux objets dont on veut mesurer la distance, & qui aille rencontrer l'horizon; on dirige vers ce point de l'horizon la pièce horizontale du double genou, c'est-à-dire, la pièce *ab* (fig. 169); ou si l'on est maître d'incliner le pied de l'instrument, l'on dirige le double genou vers un point quelconque de cette ligne qui joint les deux objets; alors on fait incliner très-aisément à droite ou à gauche le plan du quart-de-cercle qui est parallèle à *ab* pour le mettre dans le plan des deux objets (M. Bouguer, pag. 77). Le P. Pezenas a donné une autre construction de genou, propre à mesurer les distances inclinées, (*Opt. de Smith, édition d'Avignon II, 511*).

Mettre le quart-de-cercle dans le plan des deux objets.

Fig. 169.

2585. La quatrième attention qu'exige la mesure des angles sur le terrain, est de réduire à l'horizon les distances des objets terrestres qui sont au-dessus ou au-dessous de l'horizon. Soit *S*, le zénit (fig. 213), *HO* l'horizon, *AB* la distance observée entre deux objets dont les hauteurs sont *AH* & *BO*; dans le triangle *ZAB*, l'on connoît les trois côtés, on calculera l'angle *Z* qui mesure l'arc *HO* de l'horizon; c'est la distance horizontale que l'on cherche, & c'est celle dont on est obligé de faire usage quand on détermine une distance par la trigonométrie, comme dans les opérations de la figure de la terre (2643).

Réduction des angles observés.

Fig. 213.

2586. Les angles observés sur le terrain ont ordinairement besoin d'être réduits au centre de la station où l'on observe: on se place à côté d'un signal, à une fenêtre de clocher, & il est nécessaire de trouver quel seroit l'angle observé, si l'on étoit au centre même du signal ou sur la pointe du clocher; cela n'exige que la résolution d'un triangle. M. l'Abbé de la Grive a fait imprimer en 1754, dans son Manuel de trigonométrie des tables de réductions qui sont très-commodes pour ces sortes d'opérations; on les trouve difficilement aujourd'hui, mais je les fournirois volontiers aux astronomes qui auroient à faire de ces grandes opérations.

## 60 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

2587. L'on ne doit observer les signaux, s'il est possible, que quand ils sont dans l'ombre, & pointer à leur milieu, comme au point qui est le moins sujet à changer par les accidens de lumière; c'est une attention importante. On en trouvera plusieurs autres dans les livres de M. Bouguer, du P. Boscovich, &c.

### DES OBSERVATIONS QUE L'ON FAIT AU QUART-DE-CERCLE MURAL.

Planche XLIX.  
Fig. 155.

Erreurs du  
mural de M.  
de la Hire,

2588. DE tous les instrumens d'astronomie, le mural (*fig. 155*), est le plus commode, mais il est le plus difficile à faire & le plus dispendieux. Les passages des astres par le méridien s'observent aussi bien au mural qu'à la lunette méridienne (2387); mais il faut avoir observé la déviation ou l'erreur du mural à différentes hauteurs, par le moyen des hauteurs correspondantes du soleil prises en différens temps de l'année; car il est presque impossible que le limbe d'un grand quart-de-cercle soit assez bien dressé pour qu'il puisse être, à 1" ou 2" près, dans le méridien à toutes les hauteurs: par exemple, l'erreur du mural de M. de la Hire étoit — 15" à 18° de hauteur, elle étoit nulle à 52°, & + 16" à 65° de hauteur, depuis 1683 jusqu'en 1686, suivant des calculs que M. de la Caille me communiqua en 1759; cela est très-nécessaire à savoir pour faire usage des observations qui ont été publiées dans l'histoire céleste de M. le Monnier en 1741; c'est ce qu'il faut ôter des passages observés, ou y ajouter.

2589. Flamsteed ayant fait faire en 1688 un arc mural de  $6\frac{2}{3}$  pieds de rayon, se servit des hauteurs correspondantes, à l'exemple de M. de la Hire, pour déterminer en 1690 les erreurs de son mural; à 60° de hauteur il falloit ajouter 33" aux temps observés, pour avoir les véritables passages au méridien; mais il ne prenoit point de hauteurs correspondantes d'étoiles, & il se servoit des distances observées avec son sextant entre différentes étoiles, pour trouver les ascen-

sions droites de celles qui passoient trop haut ou trop bas; ce fut par le moyen de ces ascensions droites qu'il déterminâ les erreurs de son mural, depuis le tropique du Cancer jusqu'à l'étoile polaire, mais cela est encore plus facile par les hauteurs correspondantes ( 221 , 2578 ).

2590. Il est nécessaire de vérifier un mural au zénit & à l'horizon, aussi bien que tout autre instrument ( 2556 ), mais la méthode n'est pas tout-à-fait la même. Etant à Berlin en 1751, je fis élever sur les deux façades de l'observatoire deux grandes pierres, l'une au nord & l'autre au midi, sur lesquelles je plaçai alternativement le mural dont je voulois me servir, & par-là je me procurai la vérification par le retournement ( 2556 ); mais on n'a pas toujours d'aussi grandes facilités; le Roi qui daignoit prendre à mon travail un intérêt marqué, en avoit aplani tous les obstacles.

Vérification  
au zénit.

Pour se procurer une semblable vérification, M. le Monnier a fait placer en 1753 à Paris, le même quart-de-cercle sur un grand bloc de marbre, & celui-ci tourne sur un boulet de canon, que M. Marris a fait tourner & doucir, aussi bien que la crapaudine, où la concavité dans laquelle il tourne & qui sert de pivot; mais en remédiant ainsi à un inconvénient, on perd le principal avantage d'un mural, celui d'être invariablement fixé dans le méridien.

Seconde  
Méthode.

2591. Flamsteed voulant trouver le commencement de la division, dans son arc mural ( 2327 ), conjointement avec Sharp, se servit d'un moyen fort analogue à celui que nous employons pour vérifier les instrumens mobiles : ayant disposé la lunette verticalement, il suspendit du centre sur l'index qui étoit porté par la lunette, un fil à-plomb, & il observa ainsi plusieurs jours de suite le passage de la belle étoile qui est à la tête du dragon; tandis que Sharp marquoit sur l'index de la lunette le point où battoit le fil à-plomb : il transporta ensuite le centre & la lunette de son mural sur un mur opposé, & il les ajusta convenablement.

Troisième  
Méthode.

avec le fil à-plomb; la lunette ou la surface de l'index regardoit alors l'occident, au lieu de regarder l'orient, comme dans l'opération précédente, où la lunette étoit placée sur l'instrument; il observa dans cette nouvelle position l'étoile près du zénit, tandis que Sharp marquoit sur l'index le point du fil à-plomb; le milieu entre les deux points marqués sur l'index dans les deux positions de l'instrument, étoit le véritable point où devoit battre le fil à-plomb, en supposant l'axe optique de la lunette exactement dirigé vers le zénit; ayant donc remi la lunette sur l'instrument, il fit venir le fil à-plomb sur ce point du milieu, & dans cet état il marqua sur le limbe le point correspondant, d'où devoient commencer les révolutions de la vis qui engrenoit dans la circonférence, & les divisions qui étoient sur le limbe (*Proleg. pag. 110*). Flamsteed continua de faire pendant les années suivantes cette même vérification, & avec d'autant plus de soin qu'il s'aperçut que l'erreur alloit en augmentant d'une année à l'autre, parce que la situation de son mural n'étoit pas assez fixe.

- Vérification à l'horizon. 2592. On ne peut vérifier un mural à l'horizon par le renversement (2552), l'opération seroit trop embarrassante, & la flexion des barres seroit trop à craindre dans deux états aussi différens que ceux des figures 203 & 204; mais on le vérifie très-bien en place par le moyen d'un excellent niveau (2399), de la manière suivante. La lunette du mural porte vers ses deux extrémités en *L* & en *M* (*fig. 155*), deux tasseaux dont les bords extérieurs forment une ligne exactement parallèle à la ligne de foi, ou à l'axe optique de la lunette, ce qui se peut vérifier par la lunette d'épreuve (2503); on place la lunette *LM* parallèlement au rayon *AB* de l'instrument en l'arrêtant sur le premier point de la division en *B*. Je suppose qu'on ait une grande règle fort épaisse (*fig. 154*), & garnie de deux pieds *Y, Z*, on pose les pieds de cette règle sur les deux tasseaux *L* & *M* de la lunette, & le niveau sur la règle, en-
- Fig. 155.*
- Fig. 154.*

suite retournant la règle & le niveau, on apperçoit facilement si la lunette est parfaitement horizontale, & les divisions font connoître la quantité dont il s'en manque ou dont il a fallu incliner la lunette pour que la règle & le niveau retournés dans tous les sens, eussent toujours exactement la même situation.

On peut ensuite pour une plus grande vérification placer la lunette dans une situation verticale, y appliquer la règle *YZ*, tendre un fil à-plomb par les deux points qui sont marqués sur les deux pieds de la règle, & l'on reconnoît si la lunette, quand elle est sur le dernier point de la division, est exactement verticale; ce qui confirme la vérification précédente (2591). On voit par-là si l'arc total est exactement de  $90^\circ$ . Je suppose un niveau assez parfait pour que 1'' ou 2'' y soient sensibles, mais on en peut faire actuellement, en y donnant du soin (2399).

2593. M. Graham employoit le niveau d'une manière un peu différente pour la même vérification : la règle ou plutôt la planche (*fig. 154*), étant supposée un peu plus longue que le rayon, on tend sur les deux pieds *YZ*, un fil d'argent très-délié, on approche la règle du quart-de-cercle, & on la suspend de manière que le fil d'argent réponde exactement sur le point de zéro & sur un point très-fin marqué au centre du mural : dans cet état on trouve par le moyen du niveau si le bord supérieur de la règle est parfaitement horizontal, ou de combien il s'en faut; on suppose comme dans la première vérification que la surface des pieds *YZ*, est sur une ligne exactement parallèle à la surface supérieure *AB*, où l'on met le niveau; mais il n'est pas bien difficile de se procurer deux surfaces parallèles.

*Fig. 154.*

2594. Le parallélisme de la lunette par rapport au plan du mural peut se vérifier de plusieurs manières. Lorsqu'on a la facilité de tourner un mural au nord & au midi, comme je l'avois à Berlin (2590), on reconnoît aisément le parallélisme par les observations d'é-

Parallélisme de la lunette.

toiles, de la manière suivante. Mon quart-de-cercle étoit depuis quelques mois du côté du midi, & j'avois reconnu par des hauteurs correspondantes qu'il étoit exactement dans le méridien vers  $53^{\circ}$  de hauteur; au mois de Juin 1752, je fis transporter le quart-de-cercle au nord, je le plaçai dans le méridien vers  $53^{\circ}$  de hauteur comme il l'étoit au midi; & cela par le moyen des étoiles circompolaires dont j'avois pris des hauteurs correspondantes la veille; j'observai le même jour des étoiles au zénit, & je vis qu'elles passaient  $20''$  plutôt qu'elles ne devoient passer en calculant d'après les passages observés la veille du côté du midi; cela me fit connoître que le haut de la lunette étoit de  $10''$  trop à l'orient au zénit, quoiqu'il fût dans le méridien vers  $53^{\circ}$  de hauteur; & comme le plan du quart-de-cercle étoit placé de la même manière & verticalement dans les deux positions, il ne s'agissoit que d'approcher du limbe le fil horaire du réticule qui étoit mobile par le moyen d'une vis; par-là je pouvois rendre parallèle au limbe, l'axe optique de la lunette qui auparavant faisoit un angle répondant à  $10''$  de temps au zénit, & qui décrivoit un cône au lieu de décrire le plan d'un grand cercle; ce changement du réticule exigeoit aussi un changement dans la situation du plan, mais la lunette devenue parallèle au plan ne pouvoit plus donner 10 secondes d'erreur dans un point, & zéro dans un autre.

2595. On peut aussi vérifier le parallélisme de la lunette d'un mural, par le moyen de la lunette d'épreuve (2503); on démontrera l'alidade ou la lunette du mural; on appliquera la lunette d'épreuve sur le dos ou sur la partie de cette alidade qui est destinée à toucher le limbe & la platine du centre; on pointera les deux lunettes ainsi adossées, sur un objet éloigné, & si toutes deux répondent à la fois au même point, ou plutôt à deux points aussi éloignés l'un de l'autre que le sont les axes des deux lunettes, on sera sûr que l'axe optique de l'alidade est exactement parallèle à la surface  
qui



qui doit porter sur le limbe & sur la platine du centre, c'est-à-dire, qu'elle sera parallèle au plan de l'instrument, quand on l'aura remise en place. On pourroit aussi appliquer sur le même limbe successivement les deux lunettes, & voir si elles répondent exactement au même objet, ce qui prouveroit également le parallélisme. Après cela si l'on met l'instrument dans une situation bien verticale, on sera sûr que la lunette passe par le zénit, & l'on achèvera de mettre le mural dans le méridien par des hauteurs correspondantes ou par les méthodes qui seront expliquées ci-après (2607).

*DES OBSERVATIONS QUI SE FONT  
AUX GRANDS SECTEURS.*

2596. ON n'a employé jusqu'ici les grands secteurs de 12 pieds de rayon que pour l'aberration, la nutation & la figure de la terre. Ces observations se réduisent à observer la distance d'une étoile au zénit à une seconde près; les attentions les plus importantes consistent à bien vérifier un secteur par le retournement (2556), à rendre la suspension bien libre (2,86), & à bien connoître la valeur des parties du micromètre: mais il faut avoir égard à trois choses qui sont particulières à ces grands instrumens; la flexion des barres qui en composent la carcasse, la difficulté de les mettre dans le méridien, & la parallaxe des fils au foyer de la lunette; nous allons dire quelques mots de ces trois objets.

Observations  
aux grands  
Secteurs.

2597. Une barre de fer de 8 pieds de long qui avoit 2 pouces 8 lignes de largeur par un bout, & 3 pouces 3 lignes par l'autre, avec 2 lignes  $\frac{1}{2}$  d'épaisseur étant posée horizontalement de champ, c'est-à-dire, dans le sens où elle devoit se courber le moins, se courboit encore de 3 quarts de ligne (M. Bouguer, pag. 191); & si l'on augmente la longueur de la barre, la flexion croît comme la quatrième puissance de la longueur. Pour remédier le plus qu'il est possible à un

Flexion des  
barres.

## 66 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

inconvenient aussi considérable dans les grands instrumens, il est nécessaire d'employer les barres les plus larges, d'affujétir l'objectif très-fortement avec le centre, & le micromètre avec le limbe, afin que la flexion de l'instrument soit exactement égale à celle de la lunette; il faut aussi éviter de mettre de l'huile dans les vis, ce qui peut produire à la longue quelque jeu dans les assemblages: enfin il faut mouvoir ces instrumens avec précaution, pour empêcher qu'ils ne changent de forme par la flexion. (Voyez M. de la Condamine, *pag.* 143 & *suiv.*).

2598. Il est important que ces instrumens soient placés très-exactement dans le méridien, & cela non par le moyen des hauteurs correspondantes des astres & du temps de leurs passages, mais par le moyen d'une méridienne filaire (2579), sur laquelle on dirige le limbe dans le méridien; sans cela les hauteurs des étoiles qu'on observe fort près du zénit, pourroient être affectées très-considérablement par la moindre erreur dans le parallélisme de la lunette (2571).

Parallaxe  
des fils,

2599. Il est nécessaire que l'image de l'étoile qu'on observe se forme exactement sur le châssis du micromètre; sans cela elle est mal terminée, on distingue avec peine si le fil la coupe exactement en deux parties égales, & le moindre mouvement de l'œil fait qu'on apperçoit l'étoile au-dessus ou au-dessous du fil, par une espèce de PARALLAXE optique, dont il est très-important de se garantir.

Changement  
de foyer dans  
les lunettes.

Le foyer des grandes lunettes est sensiblement différent selon la constitution des yeux de l'observateur, & selon qu'on enfonce plus ou moins l'oculaire; la disposition même de l'atmosphère, & la lumière plus ou moins grande des astres que l'on observe, rend le foyer plus ou moins long; M. de la Condamine & M. Bouguer ont vu dans leur lunette de 12 pieds, le jeu de l'image, ou la parallaxe des fils aller à plus de 2' 5" dans certaines nuits, & devenir insensible d'autres fois. La respiration qui s'échappa une fois sur l'oculaire rendit

tout d'un coup la parallaxe des fils beaucoup moindre ; il paroît que dans ce cas la lunette étoit d'abord un peu trop longue , l'humidité de l'oculaire intercepta les rayons violets & bleus , qui se rassemblaient avant que d'arriver aux fils ; les rayons rouges , qui traversent l'air & l'eau avec moins de réfraction que les autres , prévalurent , & le foyer devenant plus long , l'image se rapprocha du réticule , & diminua la parallaxe.

Pour y remédier , M. Bouguer (*pag.* 209 ), propose plusieurs moyens , principalement de faire en sorte que l'astre passe toujours à peu de distance du centre de la lunette , d'employer un objectif légèrement coloré de rouge ou de jaune ; de restreindre beaucoup l'ouverture de l'objectif , & de le centrer exactement ; les micromètres extérieurs dont j'ai parlé ( 2335 ), & qu'on emploie communément en Angleterre , sont très-utiles pour diminuer les effets de cette parallaxe , en faisant toujours passer l'astre sur le centre de la lunette : mais le meilleur remède qu'on puisse y apporter , c'est de faire des lunettes achromatiques ( 2298 ) ; car comme elles n'ont point de couleurs , elles ont beaucoup moins de parallaxe.

Moyen de  
s'en garantir.

## DES OBSERVATIONS QUI SE FONT

### A LA LUNETTE MÉRIDienne.

2600. AVANT que l'on se serve d'une lunette méridienne ( 2387 ), ou instrument des passages , il faut s'assurer de l'exactitude de ses différentes parties , & de leur situation respective ; pour y parvenir il y a 5 vérifications importantes. Nous allons les détailler successivement.

Il faut d'abord faire en sorte que l'axe optique de la lunette passant par le fil vertical qui est au foyer commun des verres , soit exactement perpendiculaire à l'axe de la machine ; pour cet effet la lunette étant placée sur ses supports dans une situation à peu-près horizontale , on la dirige sur une mire ou sur un objet

La lunette  
doit être à angles  
droits.

## 68 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

terrestre bien terminé, & on la place de manière que le fil vertical du réticule coupe l'objet exactement en 2 parties égales; alors sans toucher aux supports on enlève la lunette le plus doucement qu'il est possible, on la retourne de manière que le pivot qui étoit à droite se trouve à gauche, & l'on regarde le même objet; s'il ne se trouve plus coupé comme dans la situation précédente par le fil vertical du réticule, il faut faire faire la moitié du chemin par le fil vertical au moyen de la vis qui est vers l'oculaire *L* (*fig. 174*), & qui fait mouvoir le réticule au-dedans de la lunette, ensuite on corrigera le reste de cette erreur par la vis *P* du support; avec ces deux corrections, si on les a fait bien égales on tombera précisément sur le même objet dans les deux situations de la lunette, l'on sera assuré que l'axe optique du réticule & des verres de la lunette est perpendiculaire à l'axe des pivots, & que la lunette décrit un grand cercle de la sphère; au lieu que sans cette vérification elle décrirait un petit cercle qui ne partageroit pas le ciel en deux parties égales, & qui ne pourroit former, ni le plan d'un vertical, ni celui d'un méridien. Pour faire avancer le fil de la lunette vers l'objet, comme nous venons de le dire, on se sert d'une vis qui est placée vers l'oculaire *L* sur le côté de la lunette & que l'on tourne avec une petite clef; cette vis conduit le châssis du réticule sur lequel sont tendus les fils, & l'oblige de se mouvoir de côté pour correspondre à l'objet qui est dans le milieu de la lunette; à peu-près comme la vis *fg* (*fig. 163*), servoit à donner au châssis fixe du micromètre un petit mouvement de haut en bas.

*Fig. 163.*

2601. La raison de cette opération est évidente si l'on considère la *fig. 214*: soit *AB* & *CD* deux lignes qui se coupent à angles droits: on voit assez qu'en retournant la ligne *AB* que nous considérons comme l'axe de la machine, la ligne *CD* qui lui est perpendiculaire ne changera point de situation; mais s'il y avoit une autre ligne *EF* inclinée du côté du pivot

*Fig. 214.*

*A*, lorsqu'on retourneroit les pivots, la ligne *FE* seroit aussi retournée, elle se dirigeroit suivant *HG*, puisque son inclinaison est du côté du pivot *A*, qui se trouveroit en *B*, c'est-à-dire, à droite par la nouvelle situation de l'axe. Ainsi il y auroit entre la première position *EF*, & la seconde position *GH*, une différence ou un angle *EKG* double de l'erreur *EKC*, qu'il y avoit à corriger dans la première situation; voilà pourquoi nous avons averti de faire seulement parcourir au réticule la moitié de l'espace *EG* que l'on apercevra entre les situations de l'objet dans les deux cas : cela suffira pour amener la lunette de la situation oblique *EF* à la situation perpendiculaire *CD*.

2602. Il faut aussi faire en sorte que l'axe des pivots soit dans une situation bien horizontale : pour cela on se sert d'un niveau à bulle d'air (2398), ou d'un simple fil à-plomb; ce dernier moyen étant le plus simple, nous nous y arrêterons quant à présent; nous parlerons plus bas de l'usage des niveaux à bulle d'air (2615).

Placer l'axe  
horizontale-  
ment.

Si l'on peut marquer en-dehors sur le tuyau de la lunette une ligne de *C* en *L* (*fig. 174*), qui soit exactement perpendiculaire à l'axe des pivots, & qu'on mette cette ligne dans une position verticale au moyen du fil à-plomb; on sera sûr que l'axe des pivots sera parfaitement horizontal; or on peut faire l'un & l'autre à la fois par un simple renversement.

*Fig. 174.*

Il y a aux deux extrémités de la lunette de petits cylindres de cuivre qui ont une certaine saillie; dans le centre de chacun est marqué un point, comme on le voit en *C* & en *L*, on place la lunette verticalement, & l'on suspend avec de la cire un cheveu chargé d'un petit poids, sur le point *C* qui est en haut; on fait jouer la vis *V*, qui est à l'un des supports, jusqu'à ce que la lunette soit droite, & que le cheveu soit exactement sur les deux points : alors on détache le fil, on retourne la lunette, en sorte que le point *C* qui étoit en haut se trouve en bas, & l'on suspend de

nouveau le cheveu sur le point supérieur; s'il ne tombe pas exactement sur le point inférieur, comme dans la situation précédente, c'est une preuve que la ligne des deux points n'est pas perpendiculaire à la ligne des pivots; on fera faire la moitié du chemin par la vis du support, & l'autre moitié par le point lui-même, soit en en marquant un autre à côté, soit en repoussant le cylindre d'une petite quantité. Pour cet effet, les trous dans lesquels passent les vis d'un de ces cylindres sont ovales, & lui permettent un petit mouvement de droite à gauche lorsqu'on desserre les vis. Sur un axe de 30 pouces, avec une vis dont le filet a une demi-ligne, chaque tour change la lunette de 5' au zénit.

2603. Quand on aura fait en sorte que la ligne des deux points soit parfaitement d'à-plomb dans les deux cas, on sera sûr que l'axe est parfaitement horizontal; car si l'axe n'étoit pas perpendiculaire à cette ligne des deux points, il est aisé de voir par la *fig. 214*, que dans ce cas la ligne des points prendroit une position *EF*; & dans l'autre cas une position *GH*; ainsi elle ne sauroit être à-plomb dans le renversement de la lunette après avoir été à-plomb dans la première position; il n'y a que la seule ligne *CD* qui puisse être verticale dans les deux cas. Lorsqu'au moyen de la ligne *CD*, on a placé l'axe bien horizontalement, on est sûr que l'axe optique de la lunette qui lui est perpendiculaire (2600), décrit exactement un vertical. Lorsqu'on se servira du niveau à bulle d'air pour rendre l'axe parfaitement horizontal, on aura recours à l'article du niveau (2616).

Troisième  
vérification.

2604. Quand on est assuré par les deux vérifications précédentes que la lunette méridienne en tournant sur son axe décrit un grand cercle (2600), & que ce grand cercle est un vertical (2603), il faut faire en sorte que ce vertical soit le méridien même, c'est-à-dire, qu'il passe par le pôle du monde. Si l'on a la liberté de faire tourner la lunette méridienne jusqu'au nord vers les

Par les étoi-  
les circom-  
polaires.

étoiles circompolaires, on se procure très-aisément cette vérification; on observe les passages d'une même étoile

au-dessus & au-dessous du pôle, & si les intervalles de temps sont égaux, c'est une preuve que la lunette passe exactement par le pôle, & qu'elle tourne dans un cercle de déclinaison, ce qui forme la condition la plus importante de cette sorte d'instrument; or l'on a vu que le cercle décrit par la lunette passe aussi au zénit, donc ce cercle est véritablement le méridien.

2605. Si l'on n'a pas la facilité d'observer les étoiles circumpolaires, on se servira ou des hauteurs correspondantes ou des différences de passages entre des étoiles connues. En supposant les deux premières vérifications bien exactes; il suffira de mettre la lunette dans le méridien en un seul point, pour qu'elle y soit dans tous les autres; en effet puisque la lunette est perpendiculaire à l'axe des pivots, & que cet axe est bien horizontal, la lunette est toujours dans le même plan vertical, & décrit un cercle qui passe par le zénit; si ce vertical concourt avec le méridien dans un seul point, ils seront d'accord dans toute la circonférence du ciel.

Il suffit donc de prendre des hauteurs correspondantes du soleil (2578), dans un jour quelconque, pour déterminer l'instant du midi vrai; on observera le même jour avec la lunette méridienne les deux bords du soleil au fil du milieu, d'où l'on déduira le passage du centre du soleil; si c'est à une seconde près la même chose que le midi vrai déduit des hauteurs correspondantes, on sera assuré que l'instrument est bien placé; je dis à 1'' près, car il ne faut pas espérer une précision plus grande que celle de 1'' de temps sur 90°.

Par des hauteurs correspondantes.

2606. On observe alors dans l'horizon sur un mur ou sur un clocher quelque marque distincte sur laquelle on aperçoive le fil de la lunette; cet objet terrestre placé dans le méridien sert à reconnoître si la lunette ne s'est point dérangée, à la remettre dans le méridien en cas d'accident, à corriger, si l'on veut, à chaque observation les petites inégalités que la chaleur aura pu y causer (2609), ou du moins à en tenir compte dans les observations,

## 72 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

Par les différences de passages.

Fig. 215.

2607. Lorsqu'on est assuré que la lunette méridienne décrit un vertical, on peut, au moyen de deux étoiles dont la différence d'ascension droite est connue, trouver sa déviation dans tous les points. Soit  $PZ^R DH$  (fig. 215), le méridien;  $P$  le pôle,  $Z$  le zénit,  $ZCH$  le vertical que décrit la lunette,  $HO$  l'arc de sa déviation dans l'horizon,  $EC$  &  $DF$  les parallèles de deux étoiles fort éloignées l'une de l'autre en déclinaison, comme de 40 à 50°;  $PCE$  le cercle de déclinaison qui passe par le pôle du monde & par l'étoile  $C$  au moment où elle est au fil de l'instrument; la seconde étoile arrivera au point  $E$  après un intervalle de temps qui est connu, parce qu'il est égal à la différence d'ascension droite des deux étoiles convertie en temps; ainsi l'on connoît l'instant où la seconde étoile devroit arriver au point  $E$ ; on observera l'instant où elle arrivera en  $F$  au fil de l'instrument; la différence est le temps mesuré par l'arc  $EF$ ; j'appelle  $t$  ce nombre de secondes de temps, d'où il est aisé de conclure la valeur de l'arc  $HO$  qui est  $\frac{15 \cdot t \cdot \sin. PD \cdot \sin. PB}{\sin. BD \cdot \sin. PZ}$ , en secondes de degrés. Pour l'avoir avec plus d'exactitude, il faut choisir des étoiles qui rendent  $PB$  fort petit &  $PD$  à peu-près de 90°. Connoissant la distance des objets sur lesquels tombe la lunette pointée dans l'horizon, & la grandeur de ces objets, il est aisé de savoir à combien de pouces on doit faire répondre la lunette à droite ou à gauche, pour changer son vertical de la quantité  $HO$  qu'on a trouvée par la formule précédente; on peut aussi par la mesure des pas de la vis  $A$  (fig. 173), ou  $P$  (fig. 174), savoir de combien il faut tourner cette vis pour faire avancer l'axe, & par conséquent la lunette, d'une certaine quantité: si l'on appelle  $l$  le nombre de pouces que contient l'axe de la machine;  $u$  le nombre de filets qu'il y a dans un pouce de la vis,  $e$  l'erreur  $HO$  en secondes de degrés, trouvée par la formule précédente, & qu'un tour de vis soit supposé divisé en 100 parties; on aura  $\frac{el u}{2063}$  pour le nombre de



de centièmes dont il faut tourner la vis du support pour mettre l'instrument dans le méridien.

2608. Dans l'usage ordinaire de la lunette méridienne si le fil vertical auquel on observe les passages n'est pas exactement dans le méridien, & que les deux astres passent un peu plus haut l'un que l'autre, la différence des passages ne fera pas la vraie différence d'ascension droite. Soit *C fig. 215* l'un des astres observés, *CF* la petite portion du vertical qui est dans la lunette; *EF* est la différence qu'il y a du vertical au cercle de déclinaison dans ce point-là. Dans le triangle sphérique *ZPC* l'on a  $\sin. C = \frac{\sin. P \sin. PZ}{\sin. ZC}$  donc  $EF = CF \sin. C = \frac{CF \sin. P \sin. PZ}{\sin. ZC}$ , & sur l'équateur  $= \frac{CF \sin. P \sin. PZ}{15 \sin. ZC \sin. PC}$ ; c'est le temps qu'il faut ôter du passage de l'astre qui est le plus bas, si c'est après le passage au vrai méridien. Cette quantité est aussi égale à la parallaxe d'ascension droite qui auroit lieu en supposant *CF* égale à la parallaxe de hauteur (1645); mais cette correction doit s'appliquer indépendamment de celle de la parallaxe d'ascension droite, qui pour la lune auroit également lieu dans ce cas-là.

Fig. 215.

2609. Quoiqu'on ait mis la lunette exactement dans le méridien, par les méthodes précédentes, on n'est point assuré qu'elle y demeurera toujours; l'action du soleil & de la gelée sur les murs des bâtimens fait changer la situation & la figure des édifices les plus solides; on en a vu une preuve bien sensible dans les expériences de M. Bouguer aux Invalides (*Mém. acad. 1754, pag. 262*); les nuages en se brisant un jour laissent passer tout-à-coup quelques rayons du soleil; à l'instant même la lunette qui étoit suspendue par une chaîne de  $187\frac{1}{2}$  au dôme de l'église, parut changer de direction; c'étoit à la vérité d'une quantité fort petite, mais aussi ce n'étoit qu'un instant & dans un lieu d'une température extrêmement égale; les différences doivent être bien plus considérables dans d'autres circonstances.

Changemens  
accidentels  
dans la situa-  
tion.

2610. Lorsqu'on voit dans la situation de la lunette un petit dérangement  $HO=e$ , qui ne vaut pas la peine de toucher aux supports (2393), on peut, en suivant la même formule, calculer l'erreur qui doit en résulter sur la différence d'ascension droite observée à l'instrument, c'est-à-dire, la petite quantité  $EF=t=$   
 $\frac{e \sin. BD \sin. PZ}{15 \sin. PD \sin. FB}$ . Je suppose que l'axe est toujours exactement de niveau, c'est-à-dire, que le dérangement ne tombe que sur la situation de la lunette de droite à gauche, ou qu'au moins on a corrigé par le niveau celle qui a lieu de haut en bas.

Quatrième  
vérification.

2611. Un des fils de la lunette doit être exactement vertical, afin qu'on puisse observer indifféremment les passages des astres à la partie supérieure, inférieure ou moyenne de la lunette; pour s'en assurer, on suspendra à une certaine distance sur un fond noir une ficelle blanche avec de la craie, chargée d'un petit poids pour lui donner une situation verticale; on regardera cette ficelle par la lunette, & l'on verra si le fil la cache exactement dans tous ses points; si le fil paroît être un peu oblique on desserrera les vis  $H$  &  $K$  qui serrent les collets des portelunettes (*fig. 174*), & l'on tournera tant soit peu la lunette, après quoi l'on resserrera les vis; mais l'on examinera avec soin si en les resserrant il n'en résulte pas quelque dérangement sur les objets des vérifications précédentes (2600 & *suiv.*); il conviendrait même de faire cette vérification avant toutes les autres, à raison du dérangement que l'on peut causer à la lunette dans cette opération; mais comme c'est la moins essentielle, nous avons cru devoir la mettre après les autres.

*Fig. 174.*

Cinquième  
vérification.

2612. La dernière vérification que l'on doit faire dans une lunette méridienne, consiste à savoir si les fils du réticule sont bien au foyer de l'objectif pour les objets célestes, car sans cela on ne distingueroit pas, de nuit, le moment où une étoile passe derrière le fil, & l'on continueroit de la voir, à peu-près comme si le fil n'y étoit pas. Pour cela, on attendra au méridien une

étoile de la première grandeur dans le crépuscule du soir, on lui fera suivre le fil horizontal, on examinera si en élevant l'œil & en l'abaissant, l'étoile continue d'être exactement sur le fil, enforte qu'il n'y ait aucune paralaxe; le fil doit paroître distinctement sur l'étoile, & ne pas diminuer de largeur dans la partie qui est sur l'étoile; dans ce cas on sera assuré que l'objectif est bien placé, sinon il aura besoin d'être retiré ou renfoncé d'une certaine quantité.

2613. LE PRINCIPAL usage de la lunette méridienne consiste à observer les différences d'ascension droite entre deux astres avec une grande facilité; on évite par son moyen la méthode pénible des hauteurs correspondantes, & l'on obtient la même précision, si la lunette décrit exactement le méridien ou du moins un cercle de déclinaison qui en soit fort proche, & dont on connoisse la déviation par des hauteurs correspondantes. Il suffit alors d'observer l'heure, la minute, la seconde, &, s'il est possible, le quart de seconde où chacun des deux astres passe au fil du milieu; on corrige les deux temps par la déviation qui convient à la hauteur de chacun des deux astres; la différence convertie en degrés, suivant la marche de l'horloge, donnera la différence d'ascension droite (2505).

Usage de la  
lunette méridienne.

On se sert aussi de la lunette méridienne pour régler l'horloge des observations: si une étoile qui a passé au méridien à  $8^h 53' 56''$ , & qui devoit passer le lendemain à  $8^h 50' 0''$ , passe à  $8^h 50' 2''$ , c'est une preuve que l'horloge marque  $2''$  de trop & qu'elle avance de  $2''$  par jour. Si l'on se sert du soleil, je suppose que le 2 Janvier 1772, le soleil passe  $26''$  plus tard à la lunette méridienne que le 1 Janvier, on trouve par le calcul de l'équation du temps (967) ou par le livre de la *Connoissance des temps* qu'il doit passer  $28''$  plus tard, on en conclut que l'horloge marque  $2''$  de moins, & par conséquent a retardé de  $2''$  en 24 heures.

2614. On met dans le réticule d'une lunette méridienne deux fils verticaux aux deux côtés du fil horaire

Réduction  
au fil du méridien.

qui est dans le milieu de la lunette, de sorte que l'astre passant successivement à ces trois fils parallèles, on puisse vérifier l'observation du milieu, & la suppléer si elle venoit à manquer. Pour réduire au centre les passages observés aux fils collatéraux, il faut savoir combien les astres doivent employer de temps à aller d'un fil à l'autre suivant leurs différens degrés de déclinaison; supposons qu'on trouve une minute de différence par le moyen d'une étoile qui est dans l'équateur, & qu'on veuille savoir combien employeront les étoiles qui sont à  $30^\circ$  de déclinaison, on divisera  $60''$  par le cosinus de  $30^\circ$ , & l'on aura  $69''\frac{1}{3}$ , c'est le temps que ces étoiles employeront à aller d'un fil à l'autre. De même si l'on a observé qu'un astre à  $20^\circ$  de déclinaison employoit  $64''$  à aller d'un fil à l'autre, ou multipliera  $64''$  par le cosinus de  $20^\circ$ , & l'on aura  $60''$ , temps qu'employent les étoiles situées dans l'équateur pour aller d'un fil à l'autre; tout cela est une suite de l'art. 892.

### *Du Niveau à bulle d'air.*

2615. LE fil à-plomb est un moyen très-sûr & très-exact de trouver la ligne du niveau ou la ligne horizontale (2602); cependant les niveaux à bulle d'air, quand ils sont bien faits, sont encore plus exacts; ils ont l'avantage d'être beaucoup plus commodes, parce qu'ils sont à l'abri des oscillations que cause dans le fil à-plomb la moindre agitation de l'air; aussi voyons-nous qu'on les a appliqués quelquefois en Angleterre à de petits quarts-de-cercles pour tenir lieu du fil à-plomb, & Graham les a employés pour vérifier les grands quarts-de-cercles de 8 pieds qui sont à l'observatoire de Greenwich (2592).

Vérification  
du niveau &  
de l'axe des  
passages.

2616. Pour niveler promptement l'axe autour duquel tourne la lunette méridienne, on doit d'abord présenter le niveau dans les deux sens, & marquer l'endroit où tombe à chaque fois le centre de la bulle d'air;

le milieu de ces deux points est celui où elle doit tomber quand l'axe sera horizontal ; il ne s'agit donc que de tourner la vis *V* du support (*fig. 174*) pour élever le pivot jusqu'à ce que la bulle d'air vienne à ce point du milieu qu'on a marqué sur le tube , après avoir retourné le niveau.

*Fig. 174.*

Cela suppose que le niveau soit bien disposé , & bien réglé ; car si la bouteille ou le tube du niveau n'est pas parallèle à ses supports , on trouvera une erreur plus grande qu'auparavant en retournant le niveau ; & par-là on reconnoîtra que c'est le niveau , & non pas l'axe que l'on devoit faire varier le premier.

2617. Si je veux rectifier le niveau le premier , je fais venir la bulle dans le point qui tient le milieu entre les deux points où elle venoit dans le premier retournement , & cela en tournant la vis *C* du niveau (*fig. 175*) , & le niveau se trouve réglé indépendamment de l'axe. Pour vérifier l'axe à son tour , je retourne le niveau une seconde fois , & marquant aussi sur le tube les deux points où vient la bulle dans le second retournement , je fais venir la bulle au milieu de ces deux points , en tournant la vis *V* du support (*fig. 174*). Par ce moyen l'on a , tout comme dans l'article précédent , la vérification réciproque & complète de l'axe & du niveau ; la raison de ces procédés peut se concevoir si l'on examine la *fig. 214*, dont on a vu l'explication (2601). Ce que nous avons dit au sujet du niveau à bulle d'air doit s'entendre du niveau où il y auroit un fil à-plomb ; l'usage en est le même.

*Fig. 175.*

## DES OBSERVATIONS FAITES À LA LUNETTE PARALLATIQUE.

2618. L'usage de cette machine (2400), consiste  
1°. à trouver dans le ciel un astre que l'on n'aperçoit pas à la vue simple (2622) ; 2°. à suivre d'une manière facile & commode le mouvement diurne des astres ; 3°. à observer les différences d'ascension droite

Usages de la  
Lunette parallatique.

& de déclinaison hors du méridien , avec le réticule qu'on y applique ( 2604 ).

Placer l'axe  
dans le méridien.

La première vérification d'une lunette parallatique consiste à mettre l'axe dans le plan du méridien. Pour cela on dirige la lunette vers une étoile qui soit du côté de l'orient 6 heures avant son passage au méridien ; & l'on fait passer l'étoile au centre de la lunette. Lorsque l'étoile est à l'occident 6 heures après son passage au méridien , & 12 heures après la première observation , on tourne la lunette vers l'étoile , sans changer la position de l'axe ni la déclinaison de la lunette , & si l'étoile se trouve ne passer plus par le centre des fils , c'est une preuve que l'axe est un peu trop à l'orient ou à l'occident ; on le tournera donc ou vers l'orient ou vers l'occident , en sorte que par le mouvement l'étoile soit rapprochée du centre de la lunette , de la moitié de la quantité dont elle en aura paru éloignée vers le nord ou vers le sud dans la seconde observation ; on fera sûr alors que l'axe est exactement dans le méridien. Cette vérification est indépendante de la réfraction , & même de l'erreur qu'il peut y avoir dans l'inclinaison de l'axe ; car cet axe pourroit être incliné trop ou trop peu , d'un demi-degré , sans que l'étoile cessât de passer à peu-près par le centre de la lunette à 90° du méridien , parce que le parallèle que décriroit la lunette autour d'un axe trop ou trop peu élevé , passe sensiblement par le même point que le vrai parallèle , pourvu que l'axe de la machine ne diffère pas trop du véritable axe du monde ; & si l'étoile est dans l'équateur la différence devient tout-à-fait nulle.

Placer l'axe  
à la hauteur  
du pôle.

2619. Lorsque par cette première vérification l'on aura amené l'axe de la lunette parallatique dans le plan du méridien , il faudra examiner si l'axe est au degré d'inclinaison convenable à la hauteur du pôle , c'est-à-dire , s'il fait avec l'horizon le même angle que l'axe de la terre ; pour cela on dirigera le centre de la lunette vers une étoile , 6 heures avant son passage au méridien ; & si le même astre passant au méridien six heures après ,

se trouve passer encore par le centre de la lunette dont la déclinaison n'a point changé, c'est une preuve que l'axe est à son élévation convenable. Si l'étoile en passant au méridien paroît dans la lunette au-dessus du centre, c'est-à-dire, qu'elle soit véritablement au-dessous, il faudra élever le sommet de l'axe, c'est-à-dire, augmenter l'angle qu'il fait avec l'horizon jusqu'à ce que l'étoile se rapproche du centre de la lunette, de la moitié de la quantité dont elle en est éloignée à son passage au méridien : on se sert pour cela de la vis *N* (fig. 176) qui est au bas de l'axe près du cercle équatorial *KCO*. Je néglige ici l'effet de la réfraction dont on pourroit cependant tenir compte en suivant les principes de l'article 2546.

Fig. 176,

2620. Quand on est assuré de la situation de l'axe, il faut, au moyen d'un niveau *P*, d'un fil à-plomb *rR* & de deux lignes tracées sur une table fixe ou sur le pavé le long des règles *BK* & *DE*, s'assurer les moyens de replacer la machine dans la même position, lorsqu'elle aura été déplacée ou transportée d'un endroit à l'autre.

On s'assurera ensuite de la situation des deux alidades, dont l'une marque les heures, & l'autre les déclinaisons. Pour vérifier l'alidade des heures, on observera le passage du soleil au fil horaire de la lunette, l'alidade étant placée sur midi; par le moyen d'une horloge réglée, on verra si le soleil y a passé au moment du midi vrai; dans le cas où il y auroit une différence, on lâchera les vis qui serrent l'alidade *CO* autour de l'axe de la machine; & comme elles passent dans des trous ovales, on fixera aisément cette alidade sur le point de midi, en faisant passer le soleil au milieu de la lunette au moment du midi, qui sera indiqué sur l'horloge à secondes; on pourra faire cette opération à toute autre heure que midi, par exemple, à trois heures, pourvu que le soleil soit au milieu de la lunette à l'instant où l'horloge marque trois heures.

Vérification  
des alidades,

2621. Pour vérifier l'alidade *W* des déclinaisons,

on dirigera la lunette vers une étoile qui soit au nord de l'équateur, & vers une autre qui soit au midi; si l'alidade marque exactement la déclinaison de chacune, telle qu'on la connoît par les hauteurs méridiennes (2582) ou par les catalogues d'étoiles, on fera sûr que l'alidade est bien placée; si elle est mal placée, l'une des déclinaisons paroîtra trop grande & l'autre trop petite; alors on lâchera les vis qui tiennent l'alidade *W* ou le Vernier des déclinaisons attaché sur la mâchoire *S* qui est au sommet de l'axe, & l'on changera l'index de la quantité dont il a été trouvé en erreur par les deux étoiles observées.

Trouver un  
astre pendant  
le jour.

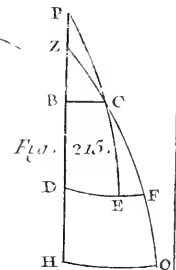
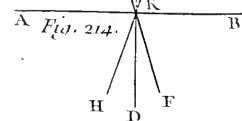
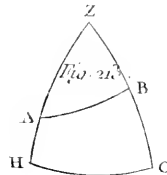
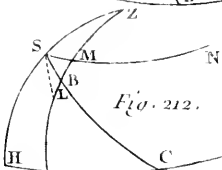
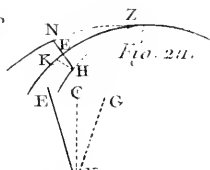
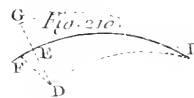
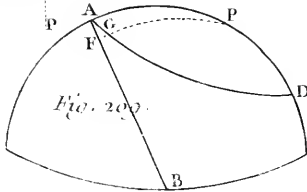
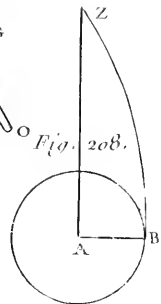
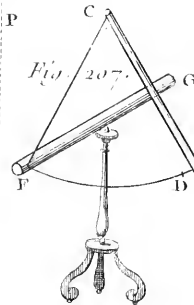
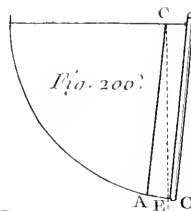
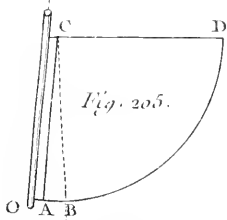
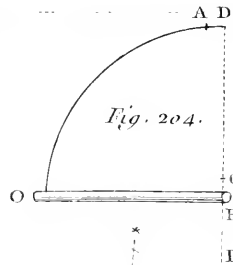
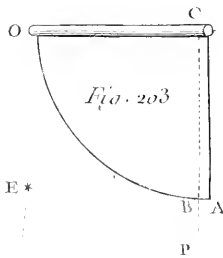
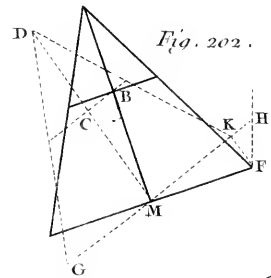
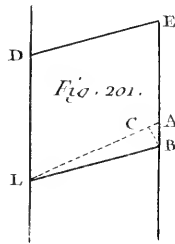
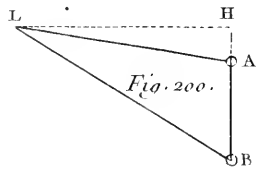
2622. Quand on veut observer un astre pendant le jour avec la lunette parallatique, c'est-à-dire, chercher un astre qu'on ne voit pas, ce qui est très-nécessaire & très-fréquent; on calcule son angle horaire (1008), on tourne l'axe & la lunette jusqu'à ce que l'alidade des heures *CO* marque sur le cercle équatorial l'angle horaire de l'astre ou sa distance actuelle au méridien; on incline aussi la lunette *LL* sur son axe, en sorte que l'alidade *W* marque sur son demi-cercle la déclinaison de l'astre qu'on veut observer; dans cet état, l'on verra l'astre cherché au milieu de la lunette, si toutes les vérifications précédentes ont été bien faites. Seulement dans les petites hauteurs la réfraction peut faire paroître l'astre un peu plus bas dans la lunette, mais cela n'empêchera pas qu'on ne le trouve aisément, l'effet des réfractions étant ordinairement moindre que le champ de la lunette.

Observations  
journalières.

2623. Je terminerai ce traité des observations astronomiques par un exposé succinct des objets qui méritent le plus l'attention des astronomes. On trouve chaque année dans la *Connoissance des temps* le détail des choses qui se présentent à observer, mais il ne sera pas inutile de rappeler ici en peu de mots tout ce que l'on peut faire journellement pour le progrès de l'astronomie.

Les conjonctions de la lune aux étoiles & leurs occultations, arrivent presque tous les jours, & fournissent des occasions continuelles de déterminer les longitudes des







## *Observ. à la Lunette Parallatique.* 81

des lieux (1970), & de perfectionner les tables de la lune; les passages de la lune au méridien doivent être également une observation journalière (3937).

Les éclipses des satellites de Jupiter servent de même aux longitudes (3968); leur théorie a également besoin d'être perfectionnée; c'est sur-tout dans les limites & dans les nœuds qu'ils doivent être observés (2942, 2964).

Les oppositions des planètes supérieures; ce sont les temps les plus favorables pour connoître leurs longitudes vues du soleil, pour déterminer leurs mouvemens, & rectifier leurs tables (1152, 1201).

Les conjonctions de Vénus produisent le même effet pour la théorie de cette planète (1201).

Les plus grandes digressions de Vénus & de Mercure, fournissent les seuls moyens de déterminer le mouvement de l'aphélie & l'excentricité de l'orbite (1286, 1318).

Les passages des planètes par leurs nœuds, & par leurs limites fournissent un moyen de déterminer les nœuds & les inclinaisons de leurs orbites (1332, 1356).

Les passages des planètes par leurs apsidés, servent à déterminer leurs excentricités (1268, 1295).

Les conjonctions des planètes aux étoiles fixes, sur-tout celles de Mars en opposition, peuvent déterminer sa parallaxe (1736), & les variations qu'on a attribuées à son atmosphère (2272).

Les hauteurs solsticiales du soleil servent pour déterminer l'obliquité de l'écliptique & ses variations (2726).

Les hauteurs méridiennes du soleil pour déterminer les réfractions (2215), & pour trouver le moment où il passe par les équinoxes (883), & les parallèles des principales étoiles.

Les différences d'ascensions droites entre le soleil & les étoiles fixes, quand il passe sur leurs parallèles (872), pour déterminer les longitudes du soleil & celles des étoiles, pour former les catalogues (724), & rectifier les tables du soleil.

## 82 ASTRONOMIE, LIV. XIV.

Les positions des étoiles fixes sont nécessaires pour avoir leurs mouvemens propres & leurs dérangemens (2747); pour étendre le catalogue des étoiles, encore très-incomplet, sur-tout par rapport aux étoiles du nord (726).

L'observation des nébuleuses dont le catalogue est encore incomplet (841), & qu'il est nécessaire de connoître quand on veut chercher des comètes (3002).

Les taches de la lune pour déterminer sa libration & la position de son équateur (3205), de même que celles du soleil pour en mieux connoître la rotation (3163).

L'anneau de Saturne, quand il est dans sa plus grande & dans sa moindre phase, pour connoître son inclinaison & ses nœuds (3230).

Les satellites de Saturne; les taches & les rotations des planètes qu'on a si peu & si rarement observées (3219 & *suiv.*).

Les périodes de lumière des étoiles changeantes de la Baleine & du Cygne, & de beaucoup d'autres étoiles que nous croyons sujettes aux mêmes variations (786 & *suiv.*).

Les comètes que l'on rencontreroit peut être bien souvent, si l'on prenoit la peine de les chercher (2510, 3002).

2624. Les personnes qui ne sont pas à portée d'avoir des instrumens de prix peuvent encore faire diverses observations utiles; les plus importantes exigent seulement qu'on ait l'heure avec exactitude, c'est-à-dire, une horloge à pendule, & un quart-de-cercle pour prendre des hauteurs correspondantes; mais ce quart-de-cercle peut se faire en bois sans difficulté, comme sans art.

Il seroit avantageux que les occultations d'étoiles & les éclipses des satellites, si utiles aux longitudes, fussent ainsi observées assidument par les curieux qui habitent dans les pays méridionaux, où le beau temps fournit des occasions continuelles de contribuer au progrès de l'astronomie, tandis que les observatoires de Paris & de Greenwich sont ensevelis une partie de l'année dans les brouillards ou dans les nuages.

# LIVRE QUINZIEME.

## DE LA GRANDEUR ET DE LA FIGURE

DE LA TERRE.

2625. LA terre que nous habitons est de toutes les planètes celle qu'il nous importe le plus de connoître, car sa grandeur absolue doit servir d'échelle & de terme de comparaison pour toutes les autres grandeurs que nous avons à mesurer; comme on l'a vu dans le traité des parallaxes (1746). Si nous avons différé jusqu'ici à parler de la terre, c'est que la détermination exacte de sa figure, telle qu'on a voulu l'avoir dans ces derniers temps, suppose la connoissance & l'usage des meilleurs instrumens d'astronomie, dont le XIII<sup>e</sup>. livre renferme la description :

Nous avons déjà indiqué la manière dont on s'y est pris autrefois, pour connoître la grandeur de la terre (38), ou celle d'un de ses degrés; il suffit de savoir combien il y a de lieues, ou de toises entre le lieu *P* (fig. 216) qui voit une étoile *E* à son zénit, & le lieu *A* où la même étoile paroît éloignée du zénit d'un degré; & d'où l'on voit le soleil à midi plus ou moins élevé d'un degré que dans le lieu *P*; c'est ce que firent autrefois Eratosthène & Posidonius (40, 350, 359); mais avec peu d'exactitude.

Pl. XXX.  
Fig. 216.

2626. Le stade étoit, suivant Pline, de 625 pieds, (L. II. c. 23). Or le pied Romain antique étoit de 10 p. 10 l. g. (Voyez M. de la Condamine, *Mém. acad.* 1757, pag. 363, 410); donc le stade de Pline étoit de 94  $\frac{3}{4}$  toises. Or suivant Pline, le degré de la terre est de 700 stades; donc si ce sont des mêmes stades, on a 66 mille toises pour le degré, suivant l'opinion de Pline, au lieu de 57 mille que nous trouvons aujourd'hui (2651), enforte que nos mesures font le diamètre de

Sentiment  
des anciens  
sur la gran-  
deur de la  
terre.

## 84 ASTRONOMIE, Liv. XV.

la terre plus petit d'un septième que les mesures des anciens, c'est-à-dire, d'Ératosthène. Cependant comme la valeur des stades Grecs & Egyptiens est fort équivoque, on peut voir à ce sujet le P. RICCIOLI, *Geographia reformata*, & les mémoires de l'académie des Inscriptions, tom. XVIII. pag. 346, tom. XXIV. pag. 506, tom. XXVI. pag. 92, &c.

2627. Au lieu du stade Romain, l'on a cru qu'il falloit choisir les stades Egyptiens pour faire cadrer les opérations des anciens avec les nôtres. Le nilomètre du caire ou le devakh qui sert à mesurer la crue des eaux du Nil est marqué sur une ancienne colonne de marbre, placée dans une isle entre deux bras du Nil vis-à-vis du Caire; ce devakh est la mesure la plus authentique & la mieux conservée qui nous reste de l'antiquité. Suivant M. Greaves, la coudée de ce nilomètre à 1 pied, 824, mesure d'Angleterre; suivant M. le Roy, 20p. 544 mesure de Paris; d'où il suit que le stade de 600 pieds Egyptiens devoit avoir 114 toises, c'est celui que M. Fréret applique à la mesure d'Ératosthène (350); il s'en suivroit que le degré, suivant les anciens, étoit de 79891 toises, au lieu de 56820 que nous trouvons actuellement pour la latitude d'Alexandrie, il eût été trop grand de  $\frac{3}{7}$  de sa véritable valeur.

2628. M. le Roy, de l'académie des Inscriptions, dans un mémoire intitulé : *Recherches sur les mesures Grecques*, p. 41 (\*), choisit comme la plus exacte une ancienne mesure de la terre, attribuée à Posidonius qui donnoit 500 stades au degré, c'est celle qui fut adoptée par Marin-de-Tyr, & par Ptolomée; M. le Roy croit qu'elle étoit en stades Egyptiens, qu'il évalue à 684  $\frac{4}{7}$  pieds; ainsi les 500 stades seroient 57067 toises, & cette mesure du degré seroit d'une exactitude bien singulière. » Cependant (dit M. le Roy) supposer qu'Ératosthène se servit du stade Grec qui étoit de 569p, ce

(\*) Voyez aussi *Les Ruines des* par M. le Roy, chez Musier fils, plus beaux Monumens de la Grèce, 1770, 2 vol. in-folio.

» seroit supposer qu'il se trompa grossièrement dans sa » mesure » examinons un instant, si cette dernière supposition n'est pas extrêmement vraisemblable.

Le P. Riccioli (*Geog. ref. pag. 144*) estime que cette opinion de 500 stades pour le degré venoit de Posidonius; il avoit trouvé par la hauteur de Canopus, que l'arc compris entre Rhodes & Alexandrie étoit la 48<sup>e</sup>. partie du cercle (40), il croyoit sur le rapport d'Ératosthène que la distance de ces deux Villes étoit de 3750 stades, il en conclut le degré de 500 stades; mais pour faire voir combien il y avoit peu d'exactitude dans les données, & peu de certitude dans le résultat, il n'y a qu'à considérer deux choses: la première, c'est que la distance de Rhodes à Alexandrie, qu'Ératosthènes trouva de 3750 stades, avoit été jugée de 4 milles ou de 5000 par les navigateurs de ce temps là, & que cependant Ératosthène n'avoit pu la mesurer lui-même au travers de la mer; Cléomède en rapportant cette opinion d'Ératosthène (*Cyclicæ theoriæ, c. 10*) & Plin (v. 31), ne disent pas qu'il l'eût mesurée, ce qui en effet, étoit impossible de son temps; Strabon (L. II, *pag. 125*), dit bien qu'il l'avoit mesurée par le moyen du gnomon, mais on voit assez que Strabon confond la mesure de l'arc céleste avec celle de la longueur itinéraire; la première à la vérité pouvoit bien se faire avec les gnomons, mais la seconde n'y avoit aucun rapport.

2629. La seconde observation qui prouve que cette mesure n'avoit aucune précision, ni aucune certitude, c'est que la distance de Rhodes à Alexandrie que Posidonius supposoit de  $7^{\circ} \frac{1}{2}$  en nombres ronds, n'est tout au plus que de  $5^{\circ} \frac{1}{4}$ , suivant les observations de M. de Chazelles, puisque la latitude de Rhodes est de  $36^{\circ} 28' 30''$ , & celle d'Alexandrie  $31^{\circ} 11' 28''$  (*Mém. acad. 1761, pag. 172*); ainsi il y avoit près d'un tiers d'erreur dans cette partie de la mesure. C'est donc marquer, ce me semble, trop de confiance dans les anciennes opérations, que de chercher à déterminer la

valeur des anciennes mesures par les opinions des anciens sur la grandeur du degré.

2630. Eratosthène jugeoit le degré de 700 stades, mais cette mesure supposoit 5000 stades d'Alexandrie à Syene (350), & un intervalle entre ces deux villes de la cinquantième partie d'un cercle, ou de  $7^{\circ} 12'$ ; or l'on étoit fort peu sûr de cette distance itinéraire de 5000 stades, jusqu'au temps où Néron la fit mesurer par des arpenteurs; (Pline VI, 29), & à l'égard de l'arc céleste compris entre ces deux villes, il étoit certainement plus grand de près d'un demi-degré qu'Eratosthène ne le supposoit; ainsi l'on a bien pu être alors dans l'erreur sur la valeur du degré; & si l'opinion de Ptolomée (2629), se trouve cadrer avec nos mesures, c'est certainement par la compensation fortuite de deux erreurs considérables, dans les anciens, plutôt que par l'erreur que nous pouvons commettre dans la réduction de leurs stades. M. Picard observe que la grandeur du degré estimée par les anciens, a toujours été en diminuant; au temps d'Aristote, c'étoit 1111 stades, elle fut réduite à 700 par Eratosthène, à 666 par la première mesure de Posidonius, & à 500 par ceux qui suivirent; les Arabes diminuèrent encore cette évaluation.

2631. Suivant Abulfeda, dans ses *Prolegomènes*, la mesure qui fut faite par ordre d'Almamou dans les plaines de Sinjar (382), donna le degré de 56 milles  $\frac{2}{3}$ , que M. Picard évalue à 47188 toises.

2632. Ainsi, suivant les suppositions de M. Picard, la mesure d'Almamou, 56 milles  $\frac{2}{3}$  valoit 47188 toises.

Celle de Fernel, 68096 pas Géométriques 56746

De Snellius, 28500 perches du Rhin... 55021

De Norwood, 367200 pieds Anglois... 57424

De Riccioli, 64363 pas de Bologne... 62900

Fernel au commencement de sa Cosmothéorie, rapporte la mesure qu'il avoit faite lui-même en 1550, (454) & qui revient à 56746 toises  $\frac{2}{3}$ . La mesure de



## Grandeur & figure de la Terre. 87

Snellius (489), publiée en 1617, donne 55021 (*Eratosthènes Batavus*). Norwood en 1635 mesura le degré entre Londres & Yorck, & sa mesure se réduit à 57424 toises (*The Seaman's practice*), cette quantité approchoit fort du vrai, mais cela n'empêcha pas le P. Riccioli de supposer le degré de 64363 pas de Bologne; ou environ 62900 toises, (*Geog. ref. pag. 169*). Voy. aussi son *Almagestum II*, 585), où il rapporte les différens résultats des anciennes mesures de la terre.

2633. La mesure de Riccioli étoit trop grande de plus d'un dixième; & telle étoit l'incertitude qu'on avoit sur la grandeur de la terre lors de l'établissement de l'académie des Sciences. Toutes les parties de l'astronomie commencèrent alors à se perfectionner; M. Picard fut chargé de la mesure de la terre, & il trouva le degré de 57060 toises; nous le supposons aujourd'hui de 57072 toises vers  $49^{\circ}\frac{1}{3}$  de latitude (2651), & l'incertitude ne va pas à plus de 10 toises, ou à la six millieme partie du total.

Le degré est  
de 57072 toises.

2634. Avant que d'expliquer la méthode exacte dont on se sert pour mesurer la longueur d'un degré, il faut dire un mot de la mesure dont nous nous servons, puisque c'est une chose de pure convention. Il seroit assurément fort utile aux nations de convenir d'une mesure universelle, & les savans devroient en donner l'exemple: la longueur du pendule simple, quantité invariable & facile à retrouver dans tous les temps, semble donnée par la nature pour servir de mesure dans tous les pays. Mouton, astronome de Lyon, proposoit pour mesure universelle un pied géométrique, *virgula geometrica*, dont un degré de la terre contenoit 600000, & pour en conserver la longueur à perpétuité, il remarquoit qu'un pendule de cette longueur faisoit  $3959\frac{1}{2}$  vibrations en demi-heure. (*Observat. diametrorum* 1670, pag. 433). Picard, en 1671, proposa une idée semblable. M. Huygens qui avoit imaginé en 1656 l'application du pendule aux horloges, en parla de même, (*Horol. oscill.* 1673, part. I, pag. 7, part. IV, pag. 151.), & la

Projet d'une  
mesure uni-  
verselle.

## 88 ASTRONOMIE, Liv. XV.

Société royale de Londres se proposoit de l'adopter. Amontons (*Mém. acad.* 1703, *pag.* 51), Bouguer, *pag.* 300) insistèrent là-dessus. M. du Fay avoit fait agréer au Ministère un projet de règlement que la mort de M. Orry & celle de M. du Fay ont suspendu. M. de la Condamine, (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 489), a écrit sur la même matière & formé le même vœu. M. de la Condamine fait voir que le pendule équinoxial ou équatorial qui est de 36 pouces 7 lig.  $\frac{1}{100}$ , mesure de Paris, en employant la toise qui a servi au Pérou (2638), devroit être adopté par préférence, comme étant une mesure plus naturelle & plus indépendante des prétentions diverses de chaque pays ; par ce moyen notre toise deviendrait plus longue de 14 lig.  $\frac{3}{10}$  ; le degré de la terre sous la latitude de Paris, contiendrait 56143 toises astronomiques, au lieu de 57072 toises de Paris.

Toise de l'Académie des Sciences.

2635. En attendant la convention d'une mesure universelle, je m'en tiendrai à la toise de l'académie des Sciences, qui est celle du grand Châtelet de Paris ; cette toise est de toutes les mesures que l'on connoît, celle qui a été la mieux conservée, la plus examinée, la plus employée dans de grandes & importantes opérations, & j'y rapporterai toutes les autres ; c'est ce qu'a fait déjà M. CRISTIANI, (*Delle misure d'ogni genere, in Brescia* 1760).

2636. Malgré les soins qu'on a pris pour conserver exactement la longueur de notre toise, il s'y est glissé de petites variations qui étoient presque inévitables ; mais que je vais expliquer avec assez de soin pour qu'il n'en puisse résulter aucune incertitude. En 1668 l'ancienne toise des Maçons fut réformée & accourcie de 5 lig. (*Mém. de l'acad.* depuis 1666, tom. VI, *pag.* 536), l'on eut soin pour lors de placer au pied de l'escalier du grand Châtelet de Paris, un *étalon* ou espèce de compas d'épaisseur c'est-à-dire, une barre de fer terminée par deux éminences, deux redents ou talons, qui s'élèvent perpendiculairement à la toise, entre lesquels devoit entrer une toise juste ; on comprit dès-lors

que

que c'étoit la meilleure manière d'avoir une égalité parfaite entre toutes les toises qu'on présenteroit à cet étalon.

M. Auzout se servit de cette toise pour y comparer les mesures étrangères qu'il avoit prises sur les originaux dans ses différens voyages (*Ibid.* tom. VI, pag. 537). Picard dans sa mesure de la terre, publiée en 1671, art. IV. nous avertit que la toise dont il s'est servi dans ses opérations, & qu'il a choisie comme la mesure la plus certaine & la plus usitée en France, est celle du grand Châtelet de Paris, suivant l'original qui en a été nouvellement rétabli; mais, ajoute-t-il, de peur qu'il n'arrive à notre toise comme à toutes les mesures anciennes, dont il ne reste plus que le nom, nous l'attacherons à un original tiré de la Nature, & il parle à ce sujet de la longueur du pendule qu'il avoit trouvée de 36 pou. 8 lig.  $\frac{1}{2}$ , en y employant la même toise: enfin, il termine cet article en disant. « La longueur de la » toise de Paris & celle du pendule à secondes, telles » que nous les avons établies, seront soigneusement con- » servées dans le magnifique observatoire, que Sa Majesté » fait bâtir pour l'avancement de l'astronomie ». Cependant l'étalon du grand Châtelet, abandonné, pour ainsi dire, au public, a été usé & même faussé de manière que dès l'année 1735, il ne pouvoit plus désigner une mesure fixe & exacte, (*Mém.* 1757, pag. 354). La toise de M. Picard étoit perdue, la base même qu'il avoit mesurée entre Villejuive & Juvisy (2641), n'étoit plus déterminée comme autrefois, & l'une de ses extrémités étoit douteuse, en sorte qu'elle ne pouvoit servir à faire retrouver la longueur de cette toise. (*Méridienne de Paris*, par M. Cassini de Thury, 1744, pag. 37). Il est vrai que la longueur du pendule à secondes devoit suffire; Picard l'avoit trouvée de 36 pouces 8 lig.  $\frac{1}{2}$ ; mais il avoit pu se glisser dans cette mesure une erreur d'une millième partie; on n'avoit pas pour lors en vue une précision si singulière, & il paroît en effet que la toise dont se servit M. Picard étoit plus petite que la nôtre d'environ

un millièmè, puisqùe celle-ci a fait trouver la distance de Brie-Comte-Robert à Monthèry, plus petite de  $13\frac{1}{2}$  toises que suivant M. Picard (2649). M. le Gentil me dit en 1756 qu'il avoit vu une toise de M. Cassini, qui étoit un peu plus longue que l'étalon du Châtelet; l'étalon de Canivet, qui lui vient de Langlois son oncle, est aussi un peu plus grand que la toise du Pérou. M. de la Caille avoit une toise de Langlois, dont il s'étoit servi au Cap, (*Mém.* 1751, pag. 433); mais elle se perdit en 1756, lorsqu'il l'apporta dans l'académie pour la comparer avec les autres toises.

Lorsqu'il fut question d'un voyage en Amérique pour la mesure du degré (2668), M. de la Condamine tit faire avec grand soin deux toises de fer, par le sieur Langlois, (*Mém. acad.* 1747, pag. 499). M. Godin alla en vérifier une sur l'étalon du Châtelet de Paris, (*Mesure des 3<sup>es</sup>*, pag. 75 & 76), aussi exactement qu'on le pouvoit faire sur un modèle défiguré par un frottement & une usure de 65 ans: M. de la Condamine vit ces deux toises chez Langlois présentées au même étalon; elles furent comparées aussi dans l'académie; on y appliqua, à l'aide d'une loupe, un compas à verge garni de deux pointes, méthode à la vérité où il pourroit bien se glisser  $\frac{1}{15}$  de ligne d'erreur; elles furent aussi ajustées l'une contre l'autre sur une table, & les deux faces de chaque extrémité, soit au tact, soit à la loupe, parurent de la plus parfaite continuité.

Toise de  
M. de Mairan.

M. de Mairan avoit fait faire quelques mois auparavant, par Langlois, une toise pour servir à ses expériences du pendule simple; c'est une règle, dit-il, *toute pareille à celle qui a été emportée au Pérou*, (*Mém. acad.* 1735, pag. 157). M. Camus & M. Bouguer assurèrent le 23 Juin 1756 à l'académie, le premier comme l'ayant vu, & le second comme l'ayant oui dire cent fois à M. Godin que la toise de l'équateur, & celle du cercle polaire avoient été exactement comparées à celle de M. de Mairan, après avoir été faites toutes ensemble par Langlois, de même qu'une autre qui fut envoyée à

Londres. Cependant M. de la Condamine ne s'est point rappelé d'avoir vu comparer la toise de M. de Mairan avec celle du Pérou dans l'académie en 1735, ni même d'avoir oui dire à M. Godin qu'il les eût confrontées, mais il se rappelle très-bien que celle du Pérou fut comparée à celle qui devoit rester à Paris.

M. de Maupertuis ayant eu besoin de celle-ci quelque temps après pour le voyage du nord, emporta cette toise que M. de la Condamine avoit destinée à être déposée; il ne restoit à Paris que celle de M. de Mairan que l'on supposoit exactement conforme aux deux autres, comme ayant été faites par le même artiste toutes les trois.

2637. Cependant quand au bout de 20 ans l'on a réuni & comparé ces trois toises, en 1756, il s'est trouvé que la toise de l'équateur, étoit de  $\frac{1}{10}$  ou  $\frac{1}{8}$  de ligne plus longue que celle du nord, & celle de M. de Mairan plus courte de  $\frac{1}{15}$  de ligne, en sorte qu'il y a environ  $\frac{8}{75}$ , ou plus d'un dixième de ligne de différence, sur 864 lig. entre la toise de M. de Mairan & celle de l'équateur.

Différence  
entre les toises.

Pour expliquer cette différence on observe que le vaisseau sur lequel étoit la toise du cercle polaire, fit naufrage dans le golfe de Bothnie au retour du voyage; la toise dut être rouillée, & l'on a lieu de croire qu'en la nettoyant on a pu la diminuer de quelque chose; cependant M. Camus soutint dans l'académie, le 3 Juillet 1756, que cette toise n'avoit souffert aucune altération; mais il convint que l'étalon avoit été mis au feu; que la toise n'y entroit plus, & qu'on avoit limé l'étalon, le 28 Juin 1756, pour y faire entrer la toise avant de s'en servir pour la mesure du 1 Juillet 1756; il y a donc toujours quelque lieu de croire que cette toise du nord a pu être égale dans le principe à celle de l'équateur.

La toise de M. de Mairan a été conservée avec tout le soin & tout le scrupule imaginable, elle n'a certainement pas été diminuée; il faut donc que dans le principe elle n'ait pas été rigoureusement égale aux autres. Il n'y a pas apparence que la chaleur de la Zone Torride, ni

les secouffes des voyages ayent rendu la toise de l'équateur plus longue qu'elle n'étoit ; elle a toujours été dans un étui très-solide , & les chaleurs à Quito ne font point excessives. M. de la Condamine ayant su à son retour d'Amérique en 1745 , que la toise qu'il avoit laissée en dépôt à Paris , avoit été portée au cercle polaire , & qu'elle avoit pu être altérée dans le voyage , engagea M. le Comte de Maurepas à faire demander celle de l'équateur , à M. Godin ; M. de Jussieu la renvoya sur le vaisseau le Condé , en 1748 , dans son étui de bois , doublé de ferge ; elle a resté plusieurs années en dépôt au Cabinet du Jardin Royal ; M. de la Condamine l'a retirée ensuite , & elle a été déposée à l'académie le 8 Août 1770 ; elle paroît dans toute son intégrité , & les vives arrêtes n'en font pas le moins du monde altérées.

La coupe des entailles qui déterminent la longueur de la toise de l'équateur n'est pas exactement perpendiculaire à la longueur de la règle ; ces entailles rentrent un peu dans le fond où elles forment une toise plus courte ; mais c'est leur partie extérieure qu'on a choisie pour la véritable longueur de cette toise ; on a fait tous les étalons de manière que le commencement de ces arrêtes y entre à frottement , mais sans aucune violence. Il y a sur l'excédent de cette toise deux points dont on s'est toujours servi pour les opérations de l'équateur , mais ils sont exactement à la même distance.

En vertu d'une Déclaration du Roi du 16 Mai 1766 , rendue par les soins de M. Trudaine de Montigny , M. de Montaran , Intendant du Commerce , & M. Tillet de l'académie des Sciences , ont fait construire par Canivet environ 80 toises semblables à celle de l'équateur , qui ont été envoyées , de même que l'aune de Paris & le poids de Marc , aux Procureurs généraux des Parlemens , de la part de M. le Contrôleur Général , en sorte que dans les principales villes du royaume , cette mesure existe dans toute son exactitude ; on l'a déposée au greffe du Châtelet , on l'a envoyée également en Guyane , en Corse , à Vienne où le P. Liefganig

l'a employée à ses mesures du degré dans la Hongrie & l'Autriche ; le P. Beccaria s'en est servi pour son degré du Piémont. M. Maskelyne y a rapporté la mesure faite dans l'Amérique Angloise.

2638. Cette toise de l'équateur est sur-tout consacrée par l'usage qu'en ont fait trois académiciens célèbres, dans la mesure des trois premiers degrés du méridien (2673) & de la longueur du pendule en divers pays (2699) ; n'ayant donc aucune raison d'y soupçonner de l'altération, l'original ayant été déposé à l'académie & copié plus de cent fois, je crois que c'est celle qui doit servir de règle, & j'y rapporterai toutes les autres mesures. Pour cela il faut ôter 7 toises du degré d'Italie qui fût réglé sur la toise de M. de Mairan ; il faudroit ôter 3 toises de celui du nord, si l'on supposoit que la toise du cercle polaire ait différé de  $\frac{1}{17}$  de ligne de celle de l'équateur, dans le temps même de la mesure du nord, ce qui n'est pas vraisemblable ; mais il faut ôter 0,05 de la mesure du pendule faite par M. de Mairan, qui se réduit à 440 lig. 52 (2699), & 3 toises du degré conclud en 1756 de la mesure de la base de Villejuive (2651).

Toise qui sert de règle.

M. de la Condamine dans son voyage d'Italie, déposa des modèles de toise à Rome & à Florence, (*Mém. acad.* 1757, pag. 352), mais ils sont aussi conformes à la toise de M. de Mairan, ainsi qu'une autre toise envoyée en Espagne.

Cette diversité & cette incertitude dans nos mesures ne paroîtra pas surprenante à ceux qui connoîtront la difficulté de s'assurer de si petites quantités ; on a éprouvé les mêmes incertitudes en Angleterre où le modèle déposé à la Société Royale diffère de celui de M. Bird, (*Philos. transf.* 1768, pag. 326), & plus encore de celui que M. Graham avoit comparé avec notre toise (*Mém. acad.* 1738, pag. 135).

A l'égard des autres pays, je n'en ai trouvé aucun où l'on eût pris, pour constater les mesures nationales, des précautions même approchantes des nôtres.

# 24 ASTRONOMIE; Liv. XV.

2639. Quoique la toise de Paris, dont nous venons de parler, soit une mesure connue aujourd'hui de tous les savans, il ne sera pas inutile d'y rapporter encore les principales mesures de l'Europe, dans la table suivante.

TABLE des principales Mesures de l'Europe, anciennes & modernes, réduites en toises, pieds, pouces, lignes & décimales de ligne, mesure de l'Académie Royale des Sciences & du grand Châtelet de Paris.

	toi.
Le mille Romain cité dans Pline. . . . .	757,5
Le mille Rom. de Strab. suiv. M. Cassini, ( <i>M. ac.</i> 1702). . . . .	766
Le mille moderne de Rome, suiv. le P. Boscovich. . . . .	764
Le mille d'Italie, de 60 au degré. . . . .	958
Le mille d'Angleterre. . . . .	830
Le Li des Chinois ou la 193 <sup>e</sup> partie du degré. . . . .	295
Le stade des anciens Romains, de 625 pieds Romains. . . . .	94,693
Le stade Egyptien, suivant M. Freret & M. le Roy, ( <i>Ruines des Monumens de la Grèce</i> ). . . . .	114,13 pou. lig.
Le pied des anciens Romains, ( <i>Mém. acad.</i> 1757). . . . .	10 10,90
Le pied Grec pris au Capitole, suivant M. Auzout. . . . .	11 3,80
Le pied Grec, suivant M. le Roy. . . . .	11 4,56
Le pied Arabe, ( <i>Anciens Mém. de l'acad.</i> Tom. VI, pag. 532). . . . .	9 10,72
Le pied d'Alexandrie, <i>Ibid.</i> . . . . .	13 2,9
La coudée des Hébreux, selon Eisen Schmid. . . . .	19 10,40
Le pied d'Angleterre, ( <i>Philos. trans.</i> 1768, pag. 326). . . . .	11 3,114
Le pied du Rhin, de Leyde & de Dannemarek, suiv. M. Lulofs. . . . .	11 7,183
Le pied de Bologne, suiv. M. Auzout; la 10 <sup>e</sup> part. de la perche. . . . .	14 0,60
Le pied de Turin, suiv. le P. Beccaria. . . . .	18 11,70
Le Braccio da panno de Florence, suiv. le P. Ximenez. . . . .	21 6,454
Le pied de Venise, suiv. M. Cristiani, ( <i>Delle misure</i> ). . . . .	12 10,0
Le pied de Padoue suiv. M. Cristiani. . . . .	15 9,9
Le pied de Vienne, en Autriche, suiv. le P. Hell. . . . .	11 8,117
La Vire de Castille, ( <i>Mém. acad.</i> 1747). . . . .	30 11,0
Le Palme Romain moderne, suiv. le P. Boscovich. . . . .	8 3,033
Le Palme de Naples, suiv. M. Auzout. . . . .	9 8,15
Le pied de Suède, ( <i>Mém. acad.</i> 1714). . . . .	10 11,75
L'archine de Russie, suiv. les Manuscrits de M. de l'Isle. . . . .	26 6,30
Le pied royal de la Chine, <i>ing-cao-chi</i> , ou <i>ing-t'si'-ao-tchi</i> . ( <i>Observat. astronomica Pekinensia</i> , Tom. I, pag. 363). . . . .	11 9,9

Voyez le Traité des mesures itinéraires anciennes & modernes, par M. D'ANVILLE 1769, in-8°. CRISTIANI, *delle misure d'ogni genere* 1760. *Tables of ancient coins, weights and measures*. ARBUTHNOT 1727 & 1754. On trouve dans ces divers ouvrages un grand nombre d'autres mesures rapportées à la nôtre, ou à celle d'Angleterre; le P. Riccioli, *Chronologia reformatata*, en donne aussi une table, où il les compare avec le pieds de Bologne.



Enfin pour donner aux étrangers quelque idée de notre toise , j'observerai qu'elle contient 72 pouces ou 864 lig. que la planche XXX de ce livre a 7 pouces 5 lig.  $\frac{1}{2}$  de hauteur dans le carré qui en fait la bordure , pris à droite , & 5 pouces 8 lig.  $\frac{1}{2}$  de largeur en bas ; la planche XXIX a 7 pouces 4 lig.  $\frac{7}{10}$  de longueur , & 5 pouces 8 lig. de largeur en bas ; la planche XXXI a 7 pouces 6 lig.  $\frac{5}{8}$  de hauteur , & 5 pouces 9 lig.  $\frac{1}{2}$  de largeur ; la planche XXXII 7 pouces 4 lig.  $\frac{1}{12}$  de longueur , & 5 pouces 8 lig. de largeur. Je suppose dans ces mesures un livre relié , dont le papier a été tiré mouillé & battu , c'est-à-dire , imprimé à l'ordinaire ; mais on ne peut compter sur une pareille indication qu'à une demi-ligne près , à cause des inconvéniens du papier (1629). La ligne qui est dans le livre de M. Cristiani pour représenter un demi-pied , est trop grande d'un tiers de ligne.

2640. Lorsqu'on mesure une distance ou une base sur terre entre deux objets éloignés & invariables , on se sert d'une toise qui est ordinairement de fer ; & comme cette toise est sujette à se dilater par la chaleur , on trouve dans la distance mesurée lorsqu'il fait froid , un plus grand nombre de toises , que quand il fait chaud ; il est donc essentiel quand on rapporte une semblable opération , de dire à quel degré de chaleur on l'a faite , pour faire connoître quelle devoit être alors la longueur de la toise qu'on a prise pour mesure.

Dilatation  
de la toise par  
la chaleur.

M. de la Condamine (pag. 78) a trouvé qu'une toise de fer s'allonge d'environ  $\frac{1}{87}$  de ligne pour chaque degré du thermomètre de M. de Reaumur , ou plus exactement de 0 li, 0117 ; ou bien 0<sup>t</sup>, 00001354 , c'est-à-dire , une toise & un tiers sur cent mille. Le Pere Boscovich se sert de ces expériences de M. de la Condamine , ( Voyage astron. pag. 349 ) ; suivant les expériences de M. Berthoud faites dans une étuve où le thermomètre étoit monté de zéro à 27 degrés , sur des verges de 3 pieds 2 pouces 5 lignes , de 5 lignes de large , & de 3 lignes d'épaisseur , le cuivre jaune s'est allongé de  $\frac{11}{100}$  de ligne , le cuivre rouge de  $\frac{107}{100}$  , le

fer battu à froid de  $\frac{73}{360}$ , l'acier trempé & revenu bleu de  $\frac{77}{360}$ , le fer battu à froid & recuit de  $\frac{75}{360}$ , l'acier trempé & ensuite recuit  $\frac{69}{360}$ . (*Essai sur l'Horlogerie*, 1763, Tom. II. pag. 113). Cette dilatation étant connue, il est facile de réduire toutes les mesures à un même degré de chaleur; on a choisi la température moyenne qui est de 10 degrés sur le thermomètre de M. de Reaumur,  $54\frac{1}{2}$  de Fahrenheit, 132 de M. de l'Isle, (129).

Mesure du  
degré par M.  
Picard.

2641. La première mesure qu'on ait faite avec précision pour connoître la grandeur de la terre, celle qui a été répétée & constatée avec le plus de soin, est la mesure du degré entre Paris & Amiens; je prendrai cette mesure pour exemple, en expliquant la méthode qui a fait trouver avec tant de précision la grandeur & la figure de la terre.

L'objet que se proposa M. Picard en 1669, fut de connoître le nombre de toises qu'il y avoit en ligne droite entre Paris & Amiens, & combien de minutes & de secondes il y avoit pour leur différence de latitude sur la circonférence du méridien de la terre. Ainsi il y a deux opérations principales dans ce travail, mesure géodésique en toises, mesure astronomique en degrés.

Mesure  
géodésique.

2642. A l'égard de la mesure géodésique, il seroit long & difficile de mesurer toise à toise, d'un bout à l'autre un espace de 25 lieues, quoique cela se soit fait en Amérique (*Philos. transf.* 1768). M. Picard préféra d'employer la trigonométrie, & se contenta de mesurer avec soin un espace de 5663 toises de long, du chemin de Villejuive à Juvisy, qui étoit déjà pavé en droite ligne, & d'en conclure tout le reste par des triangles. Depuis ce temps là on a élevé à Villejuive & à Juvisy, deux pyramides qui sont exactement à 5717 toises l'une de l'autre, suivant la mesure que nous avons faite en 1756 (2650).

Base de 5717  
toises.

Fig. 217.

2643. On voit dans la fig. 217, la disposition des premiers triangles de M. Picard; la distance de Villejuive

juive à Juvify ayant été mesurée il se transporta aux deux extrémités de cette base pour mesurer les angles d'un triangle dont le sommet étoit le clocher de Brie-Comte-Robert. Etant placé à Juvify avec un quart-de-cercle de 3 pieds de rayon qui portoit deux lunettes, l'une fixe & l'autre mobile (*fig.* 169), il dirigea l'une sur le moulin de Villejuive, où commençoit sa mesure, & l'autre sur le clocher de Brie; l'angle formé par les deux lunettes (2583), se trouva de  $95^{\circ} 6' 55''$ ; il se transporta pareillement à Villejuive & là pointant une des lunettes sur le pavillon de Juvify, qui avoit servi de terme à sa base, & l'autre sur le clocher de Brie, il trouva l'angle de  $54^{\circ} 4' 35''$ ; de ces deux angles avec le côté compris, il étoit aisé de conclure par le calcul la distance de Villejuive à Brie 11012 toises, 5 pieds; pour vérifier l'observation, il ne négligea pas de mesurer encore immédiatement le troisième angle.

2644. Nous avons parlé ci-dessus (2583 & suiv.), des attentions qu'exigent ces mesures, & l'on peut consulter les divers ouvrages que nous avons cités, sur la manière de faire les réductions qu'exigent ces triangles, de les orienter, d'en estimer les erreurs, & d'en conclure la longueur d'une méridienne.

2645. La distance trouvée par la résolution du premier triangle servit de base au triangle suivant, dont le sommet étoit la fameuse tour de Montlhéry : ayant donc mesuré de même les angles de ce second triangle,  $77^{\circ} 25' 50''$  à Villejuive, &  $47^{\circ} 34'$  à Brie, il fut en état de conclure la distance de Brie à Montlhéry 13121 toises  $\frac{1}{2}$ , il observa aussi la direction de ces triangles ou l'angle que formoit le premier côté avec la méridienne, au moyen des amplitudes du soleil (1040).

Distance  
qu'on en con-  
clut.

2646. Ainsi le premier triangle formé par M. Picard sur la base de Villejuive, se terminoit au clocher de Brie-Comte-Robert; le second avoit pour base la distance de Villejuive à Brie-Comte-Robert, & se terminoit à la tour de Montlhéry; ce second triangle lui fit trouver la distance de Brie à Montlhéry  $13121\frac{1}{2}$ .

toises; c'est celle que nous trouvons actuellement de 13108 toises, parce que notre toise est plus longue d'un millieme que celle de M. Picard. Le troisième & le quatrième triangle furent formés sur cette base, & se terminoient vers le midi au haut du pavillon de Malvoisine, & vers le nord au haut de la tour de Montjay, d'où il tira les distances de Montlhéry à Malvoisine 8870  $\frac{1}{2}$  toises, & de Montlhéry à Montjay 21658. Le cinquième triangle formé sur cette dernière base finissoit au haut du tertre de Mareuil; par cette suite de triangles M. Picard détermina la distance de Malvoisine à Mareuil 31897 toises; il vérifia aussi cette même distance par un simple triangle formé entre Malvoisine, Montlhéry & Mareuil, dont il mesura les trois angles immédiatement avec le même quart-de-cercle de trois pieds de rayon, (*Mesure de la terre par M. Picard, in-8°. pag. 36*).

Signaux par  
le moyen des  
feux.

2647. A l'occasion de ce grand triangle qui avoit 15 lieues de long, M. Picard fut obligé plusieurs fois de faire éclairer des feux à Mareuil, à Montlhéry & à Malvoisine, pour servir de signaux; un feu large de trois pieds, fait à Mareuil & vu de Malvoisine, paroissoit à la vue simple, environ comme une étoile de la troisième grandeur; il n'étoit vu réellement que sous un angle de  $3^{\circ} \frac{1}{4}$ , cependant même avec la lunette il faisoit l'effet d'un objet qui auroit eu 8" de diamètre: cela prouve que les corps lumineux paroissent un peu plus grands qu'ils ne sont réellement (2787), & que les feux sont très-propres à servir de signaux pour les opérations géométriques à de grandes distances.

2648. M. Picard avec 8 autres triangles continua de la même façon jusqu'au clocher de Notre-Dame d'Amiens, qu'il trouva être plus septentrional de 78907 toises que le pavillon de Malvoisine, ce qui se réduisoit à 78850 entre les deux points d'observations; & comme la différence de latitude étoit de  $1^{\circ} 22' 55''$ , il en conclut que 57057 toises devoient faire précisément un degré de changement en latitude; on n'a trouvé qu'en

viron  $17 \frac{1}{2}$  toises de plus en répétant ces mesures avec de meilleurs instrumens & des précautions encore plus grandes, (*Méridienne de l'Observatoire Royal de Paris vérifiée*, &c. 1744, pag. 50).

2649. La distance de Montlhéry à Brie-Comte-Robert que M. Picard avoit trouvée de 13121 toises, n'a été trouvée que de 13108 toises, par la vérification que l'académie en a faites en 1756, en sorte que toutes les distances de M. Picard étoient trop grandes, & cela d'environ une toise sur mille, soit que notre toise actuelle soit un peu plus grande que la sienne, soit qu'il n'eût pas mesuré avec assez de soin la base de Villejuive à Juvisy, qui est le fondement de toutes les autres distances (*Voy. M. de la Condamine*, pag. 249). Dans la dernière mesure faite en 1756, on s'est servi du moulin de Fontenai pour le premier triangle formé sur la base de Villejuive.

Vérification  
faite en 1756.

2650. La distance des centres des deux pyramides érigées à Villejuive & à Juvisy, est de 5717 toises, en employant la toise qui avoit servi à mesurer en 1736 le degré de Laponie, dans le temps où le thermomètre est à 11 ou 12 degrés au dessus de la congélation, c'est-à-dire, un peu au-dessus de la température du printemps; jamais peut-être distance n'a été mesurée tant de fois & avec des précautions aussi grandes; elle l'avoit été 5 fois de suite (*Mérid. de Paris vérif. pag. 35*), en 1740 par M. Cassini & M. de la Caille; elle fut mesurée encore deux fois le premier Juillet & le 31 Août 1756, par huit autres académiciens (*Mém. acad. 1754, pag. 172*); la dernière mesure à laquelle je coopérai moi-même, & dont le résultat est de 5717 toises, donne pour la distance de Montlhéry à Brie-Comte-Robert 13108 toises, ce qui ne diffère pas de deux pieds des mesures faites en 1740, par M. Cassini & M. de la Caille (*Mérid. de Paris vérif. pag. 38*).

Ayant prolongé ces mesures par une suite de triangles jusqu'à Amiens, l'on a trouvé l'arc du méridien terrestre compris entre la face méridionale de l'obser-

vatoire de Paris, & la fleche de la Cathédrale d'Amiens; 60390 toises (*Mérid. vérif. pag. 46 & 50*).

Mesure  
Astronomi-  
que.

265 1. En observant avec soin la distance au zénit, des mêmes étoiles à Paris & à Amiens avec un secteur semblable à celui que j'ai décrit (2380), on trouve  $1^{\circ} 1' 13'' 1$  de différence dans toutes les hauteurs entre deux points dont la distance réduite étoit 58233 toises. (*Degré du mérid. entre Paris & Amiens, par M. de Maupertuis, in-8°. 1740; Mérid. de Paris, pag. 50*); il ne reste donc plus qu'à faire la proportion suivante,  $1^{\circ} 1' 13'' 1$  est à 58233 toises, comme  $1^{\circ} 0' 0''$  est à un quatrième terme qu'on trouve de 57074 toises; c'est la longueur exacte du degré de la terre entre Paris & Amiens, (*Mérid. de Paris, pag. 50 & 112. Mém. acad. 1758, pag. 243*); c'est-à-dire, pour la latitude de  $49^{\circ} 23'$ , en employant la toise qui a servi en Laponie, & choisissant le temps où le thermomètre de M. de Réaumur est à 10 ou 12 degrés (2640). Ce degré se réduiroit à 57072 toises en adoptant la mesure de la base de Villejuive faite en 1756, & même à 57069 en le rapportant à la toise de l'équateur (2638).

Degré de Pa-  
ris à Amiens,  
57074 toises.

265 2. La 25<sup>e</sup> partie de ce degré ou 2283 toises, est la quantité que nous avons coutume de prendre pour la lieue moyenne de France, (1394). Quand on a la valeur du degré, il est aisé, en multipliant par 360, d'avoir la circonférence entière qui sera de 9000 lieues, si l'on en compte 25 au degré. De même on trouvera le diamètre de 2865 lieues, par le rapport de la circonférence au diamètre (3322).

265 3. Par les opérations de trigonométrie décrites ci-dessus (2643), on parvient à mesurer une étendue de 60 lieues à 20 toises près, en employant un quart-de-cercle de 3 pieds pour la mesure des angles; M. de la Condamine après une suite de 32 triangles qui mesuroient une distance de 80 lieues au Pérou, ne trouva qu'une toise de différence sur le dernier côté conclu des triangles qui précédoient, & mesuré ensuite immédiatement (*Mes. des 3 premiers degrés pag. 87*);

ce qui doit faire juger du degré d'exactitude dont ces mesures sont susceptibles, du moins quand elles sont conduites par des mains aussi habiles.

2654. C'est la rondeur ou la courbure de la terre qui produit la différence de niveau, ou le haussement du niveau apparent au-dessus du vrai, car le niveau apparent est sur une ligne droite perpendiculaire au fil à-plomb, ou tangente à la surface de la terre, mais le vrai niveau est sur un cercle qui se courbe comme la terre; quand on a observé deux objets dans la lunette horizontale ou sur la ligne des pinnules d'un niveau, le plus éloigné est nécessairement plus élevé par rapport à la surface de la terre, qui est le vrai niveau; la différence de niveau est égale à l'excès de la secante de l'arc de la terre compris entre les deux objets sur le rayon; cet excès est à peu-près égal au sinus verse de l'arc, ou à l'excès du rayon sur le cosinus du même arc, ainsi il est aisé de le trouver par le moyen des tables des sinus; on peut même facilement retenir que cette différence est d'une aune pour une lieue de distance ou de 44 pouces pour 2000 toises; mais elle croît comme les carrés des distances; pour 1000 toises, elle n'est que de 11 pouces, & pour 4000 toises, elle est de 14 pieds 8 pouces; on peut construire une table de cette différence, en disant le carré de 2000 toises est à 44 pouces, comme le carré d'une distance quelconque est au nombre de pouces qui y répondent pour la courbure de la terre. Il y a des tables de cette espèce, dans le traité du nivellement de M. Picard, dans la figure de la terre de M. Cassini, dans le manuel de trigonométrie par M. l'Abbé de la Grive, & ailleurs.

Abaissement  
du niveau  
vrai.

## DE LA FIGURE DE LA TERRE

### ET DE SON APPLATISSEMENT.

2655. LE DEGRÉ mesuré par M. Picard, entre Paris & Amiens, suffisoit pour connoître la grandeur de la

terre entière, en la supposant sphérique; mais si la terre n'est pas ronde les 360 degrés doivent être différens entre eux (2661), & celui des environs de Paris ne fera plus la 360<sup>e</sup>. partie de la circonférence de la terre; ce fut pour s'en assurer que l'académie des Sciences de Paris songea en 1683 à se procurer la mesure de plusieurs degrés sous différentes latitudes, pour voir si ces degrés étoient égaux, comme ils devoient l'être en supposant la terre sphérique; nous verrons bientôt ce qui en résulta.

Première  
conjecture  
sur la figure  
de la terre.

2656. Je ne fais pas à qui l'on dut la première conjecture qui donna naissance à toutes ces recherches; je trouve seulement que M. Picard, dans l'article IV de sa mesure de la terre, publiée en 1671, parle d'une conjecture *qui avoit déjà été proposée dans l'assemblée, que supposé le mouvement de la terre, les poids devoient descendre avec moins de force sous l'équateur que sous les poles*, & M. Picard observe que delà il en résulteroit une différence sur les pendules qui battent les secondes (2699); il ajoute qu'on a fait à Londres, à Lyon & à Bologne en Italie quelques expériences, d'où il semble qu'on pourroit conclure que les pendules à secondes doivent être plus courts à mesure qu'on avance vers l'équateur, mais qu'on n'est pas suffisamment informé de la justesse de ces expériences pour en conclure quelque chose; d'ailleurs, dit-il, on doit remarquer qu'à la Haye, où la hauteur du pole est plus grande qu'à Londres, la longueur du pendule exactement déterminée par le moyen des horloges a été trouvée la même qu'à Paris.

2657. On ne savoit donc encore rien de positif en 1671, sur la figure de la terre & sur la diminution du pendule sous l'équateur; mais la même année M. Richer fut envoyé à Cayenne, & parmi les objets de son voyage nous voyons qu'il étoit chargé par l'académie d'observer la longueur du pendule à secondes; il partit de Paris par ordre du Roi, au mois d'Octobre 1671; il arriva à Cayenne le 22 Avril 1672. Dans le



chapitre X des observations qu'il fit imprimer à son retour, il donne un article exprès sur la longueur du pendule, & il dit que c'est l'une des plus considérables observations qu'il ait faites. « La même mesure qui avoit » été marquée en Cayenne sur une verge de fer suivant » la longueur qui s'étoit trouvée nécessaire pour faire » un pendule à secondes de temps, ayant été apportée » en France, & comparée avec celle de Paris, leur » différence a été trouvée d'une ligne & un quart, » dont celle de Cayenne est moindre que celle de Paris, » laquelle est de 3 pieds 8 lignes  $\frac{1}{2}$ ; cette observation » a été réitérée pendant dix mois entiers, où il ne s'est » point passé de semaine qu'elle n'ait été faite plusieurs » fois avec beaucoup de soin. Les vibrations du pendule simple dont on se servoit étoient fort petites, » elles » duroient fort sensibles jusqu'à 52 minutes de » temps, & ont été comparées à celles d'une horloge » très-excellente dont les vibrations marquoient les secondes de temps ». (*Recueil d'observations faites en plusieurs voyages*, in-fol. 1693); d'ailleurs le pendule de l'horloge de M. Richer qui battoit les secondes à Paris, retardoit à Cayenne de 2 minutes par jour; ce qui prouvoit que la pesanteur de la lentille étoit moindre à Cayenne, & que la lentille y descendoit vers la terre avec moins de vitesse (*Regiæ scient. academ. historia* L. 1. Sect. 9. c. 3). On en verra la table ci-après (2699).

Accourcissement du pendule sous l'équateur.

2658. Telle fut la première expérience qui prouva démonstrativement, par le moyen du pendule, que la terre tournoit sur son axe; M. Huygens soupçonna dès-lors qu'en vertu de la force centrifuge qui rendoit la pesanteur des corps sous l'équateur moindre qu'à Paris (3395), il pouvoit très-bien se faire que les parties de la terre y fussent aussi plus relevées & plus éloignées du centre, ce qui devoit donner à la terre la figure d'un sphéroïde applati vers les poles; le disque de Jupiter, dont M. Cassini avoit déjà observé l'applatissement, même avant l'année 1666, étoit une grande

raison de croire aussi la terre aplatie ; comme il le dit lui-même (*Mém.* 1701, *pag.* 180).

Ce que c'est  
qu'un degré  
dans le sphé-  
roïde.

*Fig.* 218.

2659. Voyons donc la manière dont les astronomes pouvoient s'assurer de cet applatiffement, en mesurant les degrés de la terre sous différentes latitudes. Si la terre n'est pas ronde, la mesure de ses degrés doit se faire autrement que sur le globe. Soit  $EPQO$  (*fig.* 218) la circonférence aplatie de la terre ;  $EDLQ$  celle d'un cercle circonscrit, & qui a le même diamètre  $ECQ$  ; ayant pris un arc  $DF$  de ce cercle, qui soit  $\frac{1}{360}$  de la circonférence entière, c'est-à-dire, un degré, l'angle  $DCF$  fera aussi d'un degré ; mais l'arc  $GH$  de la terre n'est point ce qu'on doit appeler un degré de la terre, quoiqu'il soit compris entre les lignes  $DGC$  &  $FHC$  qui sont un angle d'un degré au centre de la terre.

Principe  
d'hydrostati-  
que.

2660. Je supposerai d'abord comme un principe d'hydrostatique démontré par l'expérience & par le raisonnement que la pesanteur agit toujours perpendiculairement à la surface de la terre, quelle que soit sa figure. Les niveaux à bulle d'air, les niveaux d'eaux, les niveaux formés par un fil à-plomb, donnent toujours le même résultat dans les nivellemens, cela prouve que le fil à-plomb est exactement perpendiculaire à la surface de l'eau, qui marque la surface de la terre, & qui prend nécessairement la figure que la gravité donne à la terre. Les eaux de la mer ont toujours été nécessairement disposées perpendiculairement à la direction de la pesanteur ; car du premier instant où elles auroient pu ne l'être pas, elles auroient coulé du côté où la pesanteur inclinoit ; elles seroient venu chercher l'équilibre, qui ne peut avoir lieu que quand la pesanteur est exactement perpendiculaire à la surface de l'eau, c'est-à-dire, n'a aucune action latérale.

*Fig.* 219.

Le fil à-plomb qui, dans nos instrumens, marque la ligne du zénit, & auquel nous rapportons les hauteurs des astres, est donc perpendiculaire à la surface de la terre ; & si un observateur en  $P$  (*fig.* 219), par exemple, à Paris, voit une étoile, comme la Claire de Per-  
sée

lée, passer au méridien précisément au zénit, il la verra sur la ligne  $BPZ$ , qui est perpendiculaire à la surface de la terre, & qui ne va point se diriger au centre  $C$  de la terre, à moins que la terre ne soit parfaitement sphérique. Un autre observateur situé en  $A$ , par exemple, à Amiens, voit une étoile sur un rayon  $AS$ , qui est parallèle à  $PZ$  à cause de la grande distance des étoiles (2782); cette étoile paroît éloignée de sa verticale  $XAB$  d'un angle  $SAX$ . Si avec les instrumens exacts qu'on emploie à ces observations (2380), on trouve que la Claire de Persée passe à un degré du zénit d'Amiens, il s'ensuit que l'angle  $SAX$  est d'un degré, ainsi l'angle  $PBA$  qui est égal à  $SAX$  fera aussi d'un degré; dans ce cas-là, nous dirons que l'arc  $AP$  de la terre, compris entre Paris & Amiens, est un degré de la terre; d'où résulte la définition suivante.

Fig. 219.

**2661.** LE DEGRÉ du sphéroïde terrestre (quelle que soit sa figure) est l'espace qu'il faut parcourir sur la terre pour que la ligne verticale ait changé d'un degré. De là il suit que les degrés que nous mesurons par observation, sont des angles  $B$  qui n'ont point leur sommet au centre  $C$  de la terre, mais au point de concours des verticales  $ZPB$  &  $XAB$  perpendiculaires à la terre en  $A$  & en  $P$ , c'est-à-dire, aux deux extrémités du degré. Cette manière de concevoir & de mesurer les degrés nous est donnée par la nature même, à cause du fil à plomb qui s'emploie nécessairement dans les observations, & qui seul peut nous faire trouver les distances des étoiles au zénit, & par conséquent les degrés de la terre.

Définition  
du degré.

**2662.** Il suit de cette définition que dans les endroits les plus aplatis de la terre les degrés doivent être les plus longs; en effet, plus un arc  $PA$  (fig. 220) aura de convexité ou de courbure, l'angle  $F$  étant toujours supposé d'un degré, plus cet arc  $PA$  sera court; si au lieu de  $PA$  nous prenons l'arc  $PD$ , plus convexe & plus courbe que  $PA$ ,  $DG$  étant parallèle à  $AF$ , & l'angle  $PGD$  d'un degré, aussi bien que  $PFA$ ,

Ils sont plus  
longs dans les  
endroits plus  
aplatis.

Fig. 220.

cet arc *PD* fera plus court, quoiqu'il ait la même amplitude, c'est-à-dire, qu'il soit aussi d'un degré; sa longueur en toises sera plus petite que celle de *PA*. Dans une ellipse & dans toutes les courbes qui lui ressemblent, la courbure est la plus grande au sommet du grand axe, & la moindre au sommet du petit axe; donc si la terre est aplatie vers les poles, l'arc d'un degré aura plus de longueur, renfermera un plus grand nombre de toises à mesure qu'on approchera des poles où l'aplatissement est le plus grand: c'est d'après ces principes que nous démontrerons ci-après l'aplatissement de la terre (2672).

2663. Il fustifioit donc de mesurer l'étendue d'un degré, à différentes distances des poles, pour juger si la terre étoit ronde: En conséquence l'académie obtint en 1683 des ordres du Roi pour continuer la méridienne de Paris, au Nord & au Sud, depuis l'Océan jusqu'à la Méditerranée; M. Cassini partit pour aller au Midi, accompagné de MM. Sedileau, Chazelles, Varin, Deshaies & Pernin; M. de la Hire alla au Nord de Paris avec MM. Potenot & le Fevre. L'ouvrage avançoit lorsqu'il fut suspendu tout-à-coup par un événement déplorable.

Mort du  
grand Col-  
bert.

2664. Le grand Colbert, protecteur immortel des talens & des sciences, sous les auspices duquel tous les projets de l'académie s'exécutoient, mourut le 6 Septembre 1683, à l'âge de 64 ans & 6 jours, après 22 ans d'un ministère glorieux. Cette perte, que déplorèrent tous ceux qui conservoient quelque amour pour les sciences, fut principalement ressentie dans l'académie; les astronomes furent rappelés; & la guerre qui recommença en 1688, éloigna encore plus le goût des entreprises littéraires.

2665. M. Einsenschmid en comparant diverses mesures, croyoit trouver un allongement de la terre; on disputoit déjà en 1696, dans l'académie, si la terre étoit aplatie ou allongée, Voyez l'*Histoire de l'acad.* par M. Duhamel, sous l'année 1696, Sec. VIII. c. 3. art. 16.

Mais en 1700 le Roi donna de nouveaux ordres pour la continuation de la méridienne, & M. Cassini partit au mois d'Aout 1700 pour aller du côté du midi, la reprendre où elle avoit été laissée. (*Histoire acad.* 1700, pag. 121).

2666. En comparant les mesures faites au nord & au midi de Paris, on crut appercevoir que l'étendue des degrés étoit un peu plus grande vers le midi, ce qui a fait dire pendant quelques années que la terre pouvoit bien être allongée; mais il me semble que ce n'étoit pas d'abord l'intention de M. Cassini, & de M. de Fontenelle, ils pensoient que cette augmentation étoit favorable aux hypothèses communes, c'est-à-dire, à celles de Newton & de Huygens, & qu'il s'ensuivoit un aplatissement, à en juger par la première édition de l'histoire de l'académie, (*An.* 1701, pag. 96, ligne dernière), & par les *Mémoires*, pag. 181, ligne 2; la théorie de M. Huygens menoit à cette conséquence, & ce fut M. Robaix, Ingénieur, qui, le premier écrivit contre cette opinion, (*Journal Littéraire de l'année* 1717, Tom. IX, pag. 416).

Au reste, les instrumens de ce temps-là n'avoient pas une précision suffisante pour constater une aussi petite différence que celle des degrés de la France; car cette augmentation qui d'abord avoit paru de 71 toises, en allant vers le midi, fut réduite à 11 toises par des mesures plus scrupuleuses, (*Mém.* 1713); & M. Cassini à la page 241 de son *Traité de la grandeur & de la figure de la Terre*, qui fait une suite des mémoires de 1718, trouva l'augmentation, d'un degré à l'autre, de 31 toises, le degré entre Paris & Amiens étant de 57021 toises.

2667. Mais cette différence entre les degrés mesurés dans l'étendue de la France, étoit trop petite pour que l'on pût constater d'une manière décisive la figure de la terre; il est vrai que la mesure du degré du parallèle entre Paris & S. Malo faite en 1733, & celle du degré entre Paris & Strasbourg faite en 1734, semblerent indiquer aussi un sphéroïde allongé; mais les

longitudes de St. Malo & de Strasbourg, ne pouvoient pas se déterminer par les méthodes ordinaires avec une précision assez grande pour donner une détermination certaine de la figure de la terre.

Projet formé par M. de la Condamine.

2668. Au milieu des dissertations que la mesure du parallèle de Paris occasionna en 1733 dans les assemblées de l'académie, M. de la Condamine représenta qu'on lèveroit la difficulté de la façon la plus sûre, en mesurant un degré aux environs de l'équateur, par exemple à Cayenne, & il offrit de l'entreprendre lui-même. En 1734 M. Godin lut aussi un mémoire sur les avantages qu'on pourroit tirer d'un voyage à l'équateur, qu'il offroit d'entreprendre avec M. de Fouchy; M. de Maurepas fit agréer au Roi ce voyage, que M. Godin, M. de la Condamine, & M. de Fouchy devoient faire; mais la santé & les occupations de ce dernier le déterminèrent à remettre cette commission à M. Bouguer, qui étoit alors Hydrographe du Roi, au Havre de Grace; M. l'Abbé Bignon & M. de Réaumur le pressèrent de l'accepter, & on lui donna pour cet effet une place de pensionnaire astronome, qui vint à vaquer par la mort de M. Lieutaud. Les passeports d'Espagne arrivèrent en 1734, & les trois académiciens partirent au mois de Mai 1735 pour aller dans l'Amérique méridionale; ils choisirent les environs de Quito.

2669. Peu après ce départ, M. de Maupertuis ayant eu occasion de voir familièrement M. le Comte de Maurepas, lui représenta qu'on détermineroit avec une précision bien plus grande l'inégalité des degrés, & par conséquent la figure de la terre, si l'on alloit mesurer aussi un degré dans le nord, le plus loin qu'il seroit possible de l'équateur; l'académie reçut les ordres du Roi, & choisit pour ce voyage du nord MM. de Maupertuis, Clairaut, Camus, le Monnier, auxquels on joignit M. l'Abbé Outhier, actuellement correspondant de l'académie, & Chanoine de Bayeux, qui étoit très-accoutumé aux observations; ils partirent en 1736 pour la Suède, & ils arrivèrent à Torneo vers la fin de l'hiver.

2670. Cette entreprise fut exécutée avec autant de promptitude que de soin ; car l'année suivante & le 13 Novembre 1737, dans l'assemblée publique de l'académie des Sciences, M. de Maupertuis lut un Discours qui contenoit la relation & le résultat de ce voyage célèbre, comme il en avoit lu, 18 mois auparavant, le motif & le projet ; elle est imprimée dans son Livre qui a pour titre : *La figure de la Terre, &c.* 1738, 184 pag. in-8° : voici une idée de ces opérations.

2671. L'on commençale 6 Juillet 1736 par reconnoître les sommets des montagnes qui étoient le long du fleuve de Torneo, & y placer des signaux. C'étoit des cônes creux bâtis de plusieurs grands arbres, qui dépouillés de leur écorce rendoient ces signaux si blancs qu'on les pouvoit facilement observer de 10 à 12 lieues ; leur centre étoit toujours facile à retrouver, en cas d'accident, par des marques qu'on gravoit sur les rochers, ou par des piquets. On parvint de montagnes en montagnes & de signaux en signaux jusqu'à *Pello*, village habité par quelques Finnois, auprès duquel est *Kittis* la moins élevée, mais la plus septentrionale des montagnes qui ont servi à ce travail, où l'on mesura les angles le 6 Août. Ce fut ainsi qu'on forma une suite de dix triangles, dans laquelle se trouvoit *Horrilakero* qui en étoit comme le foyer ; c'est le lieu où aboutissoient les dix triangles placés sur un long heptagone dans la direction du méridien.

Mesure faite  
en Laponie.

2672. Vers le milieu de l'heptagone se trouvoit une base de 7407 toises qui fut mesurée sur la surface la plus plate qu'on pût imaginer, puisque c'étoit sur la glace du fleuve de Torneo ; on trouva par la méthode indiquée ci-dessus (2643), que la distance des deux observatoires qu'on avoit établis à Torneo & à Kittis, réduite au méridien, étoit de  $55023 \frac{1}{2}$  toises. On trouva ensuite par les distances des étoiles  $\alpha$  &  $\delta$  du dragon au zénit de chaque endroit, que l'amplitude de l'arc du méridien compris entre les parallèles de ces deux obser-

Degré sous  
le cercle po-  
laire, 57422  
toises.

vatoires, étoit de  $57^{\circ} 28'' \frac{2}{3}$ , d'où il résulte que la longueur du degré du méridien qui coupe le cercle polaire, est de 57438 toises; il faut en ôter 16 toises, à cause de la réfraction que M. de Maupertuis avoit négligée. (M. Bouguer, *pag.* 290. M. de la Condamine, *pag.* 260), & l'on aura le degré de 57422 toises, plus grand de 350 toises que le degré de Paris (2651). Cette augmentation du degré entre  $49^{\circ}$  &  $66^{\circ}$  de latitude, forma une démonstration complète de l'aplatissement vers les poles (2662).

Sous l'équa-  
teur, 56753  
toises.

2673. Les trois académiciens envoyés au Pérou (2668) trouvèrent plus de difficulté dans leur mesure, & y employèrent plus de temps; ce ne fut qu'en 1741 qu'elle fut terminée, mais elle renfermoit la mesure d'un arc de 176950 toises, dont l'amplitude fut trouvée de  $3^{\circ} 7' 1''$  entre les deux observatoires de Cotchesqui & de Tarqui; ainsi la longueur du degré étoit de 56775 toises; mais en le réduisant au niveau de la mer, M. de la Condamine conclut, après l'examen de toutes les observations faites par les trois académiciens, que le premier degré du méridien est de 56750 toises (*Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère austral*, &c. par M. DE LA CONDAMINE, à Paris, de l'Imprimerie Royale, 1751, *pag.* 229), ou 56753 suivant M. Bouguer, *pag.* 290 & 305.

Différences  
des trois de-  
grés.

2674. Ce premier degré du méridien, supposé de 56753 toises est plus petit de 321 que celui de Paris à Amiens, 57074 & de 669 toises que le degré mesuré sous le cercle polaire 57422. Le détail des travaux immenses & des observations curieuses que ce voyage du Pérou a occasionnés, a formé la matière de l'ouvrage de M. de la Condamine que je viens de citer; du livre de M. Bouguer, qui a pour titre: *La figure de la Terre*, &c. à Paris, 1749, & de celui de MM. les Officiers Espagnols, Don Georges-Juan & Don Antonio d'Ulloa, imprimé en Espagnol, à Madrid, en 1749, 3 vol. in-4°, & traduit en François. On verra dans ces ouvrages que



la Physique s'est enrichie d'un grand nombre de connoissances nouvelles qu'on doit regarder comme les fruits de ce voyage.

2675. Deux degrés de la terre suffisent pour en déterminer toutes les dimensions, si l'on suppose que sa figure soit régulière, & elliptique, comme elle devroit l'être en vertu de la pesanteur naturelle dans un fluide homogène, (Newton, *Liv. III.* M. Clairaut, *Figure de la Terre*, 1743. M. d'Alembert, *Recherches*, &c. part. II, pag. 203). Je vais expliquer la manière dont M. de Maupertuis résout ce problème dans sa *Figure de la Terre*, & dans les *Mém. de l'acad.* pour 1735. Soit  $CLE$  le rayon de l'équateur (fig. 219),  $ZPLB$  la verticale de Paris (2660),  $L$  leur point d'intersection; l'angle  $PLE$  est égal à la latitude de Paris, telle que la donnent les observations; en effet, nous ne jugeons de la latitude que par la différence de hauteur entre une étoile placée dans l'équateur, c'est-à-dire, sur la ligne  $CLE$ , & une autre étoile qui passe à notre zénit; du moins nos observations reviennent toutes à cela; or l'angle sous lequel on voit la distance de ces deux étoiles, est égal à l'angle  $ZLE$ ; donc cet angle de la verticale avec le rayon de l'équateur est égal à la latitude du lieu  $P$ ; nous supposerons cette définition dans toutes les explications suivantes.

Définition  
de la latitude,  
Fig. 219.

2676. PROBLEME. Connoissant deux degrés d'une ellipse, trouver ses dimensions. Soit  $APB$  (fig. 221), l'ellipse du méridien,  $CA$  le rayon de l'équateur,  $CP$  le demi axe,  $Ee$  un arc d'un degré, c'est-à-dire, un arc tel que les perpendiculaires  $EG$ ,  $eG$  fassent un angle  $EGe$  d'un degré (2659);  $Ff$  un autre arc aussi d'un degré;  $EKA$ ,  $FLA$  les latitudes des points  $E$  &  $F$ ,  $EM$  l'ordonnée au point  $E$ ; on a par la propriété de l'ellipse,  $y = m\sqrt{1 - xx}$ , la normale  $EK = m\sqrt{1 - xx + mmxx}$  (3274), & le rayon de la développée

Fig. 221.

Soit	$CA = 1$
	$CP = m$
	$CM = x$
	$EM = y$
Sin.	$EKA = s$
Sin.	$FLA = t$
	$Ee = N$
	$Ff = M$

$EG = \frac{1}{m} (1 - xx + mm xx)^{\frac{1}{2}} (3276)$ . Il s'agit de substituer dans l'expression de  $EG$  une valeur de  $xx$  où il n'y ait que le sinus de la latitude, c'est-à-dire, de l'angle  $EKA$ .

Dans le triangle  $LKM$ , rectangle en  $M$ , le rayon est au sinus de l'angle  $K$ , comme  $EK$  est à  $EM$ , c'est-à-dire,  $1 : s :: m \sqrt{1 - xx + m^2 x^2} : m \sqrt{1 - xx}$ , d'où l'on tire  $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mms}$ ; mettant cette valeur de  $xx$  dans l'expression du rayon de la développée, l'on aura  $EG = \frac{1}{m} \left( \frac{mm}{1 - ss + mms} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Par la même raison  $FH = \frac{1}{m} \left( \frac{mm}{1 - tt + mmt} \right)^{\frac{1}{2}}$ .

Les angles  $G$  &  $H$  étant chacun d'un degré, les secteurs  $EGe$ ,  $FHf$  sont semblables, ainsi les rayons sont proportionnels aux arcs; donc  $Ee : EG :: Ff : FH$ , ainsi  $N : M :: \left( \frac{1}{1 - ss + mms} \right)^{\frac{1}{2}} : \left( \frac{1}{1 - tt + mmt} \right)^{\frac{1}{2}}$ ; en divisant les deux valeurs de  $EG$  &  $FH$ , par les quantités qui leur sont communes. On réduira ces deux fractions en séries (3289), en élevant  $1 - ss + mms = 1 + (mm - 1)ss$ , &  $1 + (mm - 1)tt$  à la puissance  $+\frac{1}{2}$ , & l'on aura  $N : M :: \frac{1}{1 + \frac{1}{2}(mm - 1)ss}$  est à  $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}(mm - 1)tt}$ ; donc  $N + \frac{1}{2}N(mm - 1)ss = M + \frac{1}{2}M(mm - 1)tt$ ;  $N - M = \frac{1}{2}M(mm - 1)tt - \frac{1}{2}N(mm - 1)ss = \frac{1}{2}N(1 - mm)ss - \frac{1}{2}M(1 - mm)tt$ ; donc enfin,  $1 - mm = \frac{2(N - M)}{3(Ns^2 - Mt^2)}$ . La différence des lignes  $CA$  &  $CP$ , qui sont  $1$  &  $m$ , est la moitié de la différence de leurs carrés (3288), donc l'aplattissement  $= \frac{N - M}{3(Ns^2 - Mt^2)}$ . On peut négliger dans le dénominateur, qui doit être fort grand, en comparaison du numérateur, la différence entre  $N$  &  $M$  qui est très-petite, & supposer  $M = N$ , pour lors on aura l'aplattissement égal à  $\frac{N - M}{3M(ss - tt)}$ .

Formule de  
l'aplattisse-  
ment

2677. Si l'un des degrés  $M$  se trouve sous l'équa-  
teur

teur même, on aura  $t = 0$ , la latitude du point  $F$  étant nulle, donc on aura  $\frac{N-M}{3Ms}$  pour l'aplatissement cherché; cette expression fait voir que dans l'hypothèse de la terre elliptique, les accroissemens des degrés sont à très-peu-près comme les carrés des sinus des latitudes, car  $N-M$  est proportionnel à  $ss$ , dès que la fraction  $\frac{N-M}{3Ms}$  est constante.

Progrès des  
degrés.

Si l'un des degrés  $M$  étant situé sous l'équateur; l'autre degré  $N$  se trouve exactement au pôle, l'on aura  $\frac{N-M}{3M}$  pour l'aplatissement; ainsi la différence des diamètres n'est que le tiers de celle des degrés; par exemple, les deux degrés extrêmes différant entre eux de  $\frac{1}{77}$ , les diamètres de la terre ne différeront que de  $\frac{1}{231}$ .

2678. En substituant dans cette formule les degrés mesurés en France & au Pérou, M. de la Condamine trouve que l'aplatissement de la terre est de  $\frac{1}{304}$ ; mais en y substituant le degré du Nord & celui du Pérou, il ne trouve que  $\frac{1}{215}$ . Cette différence de résultat fait croire que la terre n'a pas une figure régulièrement & parfaitement elliptique; ou qu'il y a dans les degrés mesurés quelque autre raison d'inégalité, sans quoi on auroit le même degré d'aplatissement, par ces deux différentes comparaisons; le P. Bosovich en a conclu que le degré du Nord étoit peut-être un peu trop grand.

La terre n'est  
pas elliptique.

On peut voir aussi la manière dont on trouve le rapport des diamètres de la terre par la mesure des degrés, dans les *Elements of navigation by John Robertson*, pag. 597, d'après les formules du Docteur Letherland; c'est la méthode, dont M. Maskelyne s'est servi, dans les transactions philosophiques de 1768, pag. 328. Il y a aussi une méthode du P. Bosovich, qui est fort élégante, (*Voyage astron. pag. 472*).

2679. Quand on a trouvé le degré d'aplatissement, il est facile de calculer l'angle de la verticale (1708).

Angles des  
verticales.

# 114 ASTRONOMIE, LIV. XV.

Supposons le demi-petit axe = 1, le demi-grand axe =  $1 + \beta$ , son carré sera  $1 + 2\beta$  (3288), à cause de *Fig. 221.* la petitesse de  $\beta$ ; soit l'abscisse  $CM$  (*fig. 221*) =  $x$  la sous-normale  $MK$  sera =  $x \cdot \frac{1}{1+2\beta}$  (3274) =  $x(1-2\beta)$  (3288); donc  $CK = 2\beta x = 2\beta \cos. \text{latit.}$  La petite perpendiculaire  $KD$  abaissée sur  $CE = CK \cdot \sin. KCD = CK \sin. \text{latit.} = 2\beta \cos. \text{lat.} \sin. \text{lat.} = \beta \sin. 2 \text{ lat.}$  (3625), & le sinus de l'angle  $KED$ , =  $\frac{DK}{DE}$  ou  $\frac{DK}{CE} = \beta \sin. 2 \text{ lat.}$  Nous supposons  $ED$  sensiblement égal au demi-petit axe, car il n'en diffère que d'une quantité qui n'introduiroit rien de sensible dans cette formule. C'est ainsi que l'on peut calculer la seconde colonne de la table LXXXIV.

*Rayons de l'ellipse.* 2680. On démontre par les mêmes principes que dans l'hypothèse de la terre elliptique, les excès des rayons de la terre sur le petit axe sont comme les carrés des sinus des latitudes; par exemple, que  $OA$  (*fig. 218.* 218) est à  $KM$ , comme le carré du sinus total est au carré du sinus de l'arc  $EL$ , en supposant toujours les différences des degrés extrêmement petites. En effet, par la propriété de l'ellipse (3256)  $OA : KL :: CA : BL$  ou  $\beta : KL :: 1 : \sin. \text{lat.}$ ; donc  $KL = \beta \sin. \text{lat.}$ , mais à cause des triangles semblables  $BKC$ ,  $MKL$ , on a  $KL : KM :: CK : BK$  ou  $\beta \sin. \text{lat.} : KM :: 1 : \sin. \text{lat.}$ . Donc  $KM = \beta \sin. \text{lat.}^2$ , c'est-à-dire, que la différence entre le rayon de l'équateur, & le rayon  $CK$  pour une latitude donnée, est égal à l'aplatissement multiplié par le carré du sinus de la latitude. On a donc  $CK = 1 + \beta - \beta \sin^2 \text{ lat.}$  ou  $CK - 1 = \beta - \beta \sin^2 \text{ lat.} = \beta \cos^2 \text{ lat.}$  (parce que  $1 - \sin^2 = \cos^2$ ); donc l'excès de  $CK$  sur  $CO$  est comme le carré du cosinus de la latitude. C'est sur ce principe que sont calculés les nombres de la troisième colonne, dans la table LXXXIV. Je me suis servi des deux propositions précédentes, pour démontrer les formules de parallaxes, que M. de Maupertuis n'avoit pas rendu assez évidentes, comme

l'avoit remarqué M. Pingré, en y suppléant par une autre méthode ( *Mém. acad.* 1764, pag. 362 ).

Connoissant les rayons de l'ellipse, & les angles qu'ils font avec les verticales, ou les normales il est aisé de trouver les longueurs de celles-ci ( 1691 ). On verra bientôt une autre méthode ( 2690 ).

2681. En admettant cette supposition de la terre elliptique, j'ai voulu examiner quel changement il faudroit faire aux trois degrés du Pérou, de la France & du Nord, pour qu'ils s'accordassent à donner le même degré d'aplatissement, ( *Mém. acad.* 1752, pag. 110 ), j'ai trouvé qu'il faudroit ôter 26 toises du degré mesuré sous l'équateur; ôter 77 du degré de Laponie, & ajouter 77 au degré de France; par ce moyen on auroit  $\frac{1}{332}$  pour le degré d'aplatissement, à peu-près comme on le trouve par la théorie de l'attraction, en supposant que la terre soit homogène. On verra ci-après que le P. Boscovich en corrigeant ainsi les degrés mesurés, trouvoit l'aplatissement encore moindre ( 2692 ).

2682. Mais comme ces corrections passent les bornes des erreurs qu'on a droit de supposer dans les mesures des degrés, il paroît en résulter que la terre n'a pas une figure elliptique, ou que son hétérogénéité intérieure est considérable; c'est ce que prouve aussi la longueur du pendule observé en différens pays de la terre ( 2699 ); car la diminution de pesanteur en allant vers le midi, s'est toujours trouvée plus grande qu'elle ne seroit si la terre étoit elliptique & homogène, & l'aplatissement paroît être aussi plus considérable. Voy. cependant l'art. 2692.

2683. Je passe donc à une hypothèse purement astronomique, introduite par M. Bouguer, pour expliquer l'aplatissement, & pour représenter les trois degrés dont j'ai parlé jusqu'ici; mais je vais tâcher de l'expliquer d'une manière plus élémentaire & plus détaillée que l'auteur même ne l'avoit fait.

Le degré de France mesuré sous la latitude de  $49^{\circ} \frac{2}{3}$  surpasse le degré de l'équateur de 321 toises, & celui

Hypothèse  
de Bouguer.

## 116 ASTRONOMIE, LIV. XV.

du cercle polaire surpasse le degré de l'équateur, de 669 ou 675<sup>1</sup> (2674); ces excès de 321 & 669 toises devroient être comme les carrés des sinus des latitudes, c'est-à-dire, comme les carrés des sinus de  $49^{\circ}\frac{2}{3}$  &  $66^{\circ}\frac{1}{3}$ , si la terre étoit elliptique (2677); mais ils sont à peu près comme les carrés carrés, ou comme les 4<sup>es</sup> puissances des sinus des latitudes. En étendant cette hypothèse à tous les autres degrés de la terre, il en résulte une courbe dont nous allons chercher la nature pour pouvoir calculer ses rayons & les angles des verticales avec les rayons (2690).

Dernier degré de latitude.

2684. Il faut d'abord trouver le dernier degré de latitude, en faisant cette proportion : la quatrième puissance du sinus de  $66^{\circ}\frac{1}{3}$  est à celle du sinus total, c'est-à-dire, à l'unité comme l'excès 675 toises est à l'excès du dernier degré sur le premier; M. Bouguer trouve par-là que le dernier degré de latitude, ou celui qui a lieu sous le pôle, est de 57712 toises, plus grand de 959 toises que le premier degré.

Connoissant l'excès du dernier degré, 959 toises, on trouvera l'excès d'un degré quelconque; par exemple, pour Paris, en disant : la quatrième puissance du rayon, qui est toujours 1, est à 959, comme la quatrième puissance du sinus de la latitude de Paris est à l'excès du degré mesuré vers Paris sur le premier degré. Cette proportion se réduit évidemment à multiplier 959 toises par la quatrième puissance du sinus de la latitude donnée pour avoir l'excès du degré.

Trouver le rayon de chaque degré.

2685. Lorsqu'on a l'étendue d'un degré, il est aisé de trouver la longueur du rayon qui répond à ce degré; car on fait que le rayon équivaut à un arc d'environ 57 degrés : si donc on multiplie par 57 la longueur d'un degré, on aura la longueur du rayon; pour plus de facilité, on ajoute le logarithme constant 1,7581226 à celui d'un degré en toises, & l'on a le logarithme du rayon. L'on suppose dans cette opération qu'un degré de la terre est toujours un arc de cercle; mais quelle que soit la figure de la terre, elle diffère

si peu du cercle, que l'on peut, sans aucune erreur sensible, supposer qu'un arc d'un degré est confondu avec l'arc du cercle qui auroit la même courbure & le même rayon. Si l'on avoit là-dessus le moindre scrupule, on pourroit, au lieu d'un degré, se servir de la longueur d'une minute, & l'on trouveroit le même résultat.

2686. Soit  $C$  le centre de la terre (fig. 222);  $PEM$  la circonférence d'un méridien de la terre,  $E$  le point qui est sous l'équateur,  $P$  le pôle,  $Eg$  le degré mesuré sous l'équateur, dont le rayon  $ED$  est de 3251707 toises;  $Mm$  le dernier degré de latitude, dont le rayon  $MG$  est de 3306654 toises (2685); un autre degré de la terre mesuré au point  $B$ , a pour rayon une ligne  $BI$ , & la suite de tous les rayons détermine ainsi une ligne courbe  $DIG$ , qu'on nomme la *développée* de la courbe  $EM$  du méridien, parce que si l'on plie dans sa circonférence un fil  $EDIG$ , & qu'on le développe ensuite, son extrémité  $E$  décrira, par ce développement, la courbe du méridien  $EBM$  (3276). Ainsi la longueur de la développée  $DIG$  est égale à la différence des rayons osculateurs  $ED$  &  $MG$ , du premier & du dernier degré; c'est-à-dire, 54947 toises, & un arc quelconque de la développée, tel que  $DI$ , est égal à la différence des rayons  $ED$  &  $BI$ . Pour en déduire les dimensions du méridien  $PEM$ , on tirera la ligne  $hI$  parallèle à  $EC$ , & une autre ordonnée infiniment proche de  $hI$ ; on aura dans le petit triangle  $fIg$  l'angle  $g$  égal à l'angle  $EKB$ , qui est la latitude du point  $B$  de la terre, donc  $If = Ig \cdot \sin. \text{lat.}$  &  $gf = Ig \cdot \cos. \text{latit.}$

Calcul de la courbe du méridien.  
Fig. 222.

2687. Nous avons dit que la différence des rayons osculateurs  $ED$  &  $MG$ , ou la longueur de la développée  $DIG$  est égale à 54947 toises, ou 57 fois l'excès 959 du dernier degré sur le premier; l'on aura de même la longueur  $DI$  de la développée sous une latitude quelconque, en multipliant  $DIG$  par la quatrième puissance du sinus de la latitude (2684); ainsi pre-

Fig. 222. nant la longueur  $DIG$  pour unité, nommant  $s$  le sinus de la latitude d'un point quelconque  $B$  de la terre, &  $\sqrt{1-s^2}$  son cosinus,  $u$  l'arc  $DI$  de la développée, nous aurons  $u=s^2$ ; prenant la différentielle de cette expression (3294), l'on a  $du=2s ds$ , c'est la valeur du petit arc  $gI$ ; donc  $If=Ig \cdot \sin. \text{latit.} = 2s^2 ds$  &  $gf=2s^2 \sqrt{1-s^2} ds$ , les intégrales de ces deux quantités donneront les lignes  $Dh$  &  $hI$ . Or l'intégrale de  $2s^2 ds$  est  $\frac{2}{3}s^3$ , c'est la valeur de l'abscisse  $Dh$ ; & si l'on fait  $s=1$ , c'est-à-dire, au sinus total, on aura l'abscisse entière  $DQ$  ou  $CG=\frac{2}{3}$  de la développée.

La valeur de l'ordonnée  $Ih$  ou l'intégrale de  $gf$  qui est  $2s^2 \sqrt{1-s^2} ds$ , est  $+\frac{2}{3}(1-s^2)\sqrt{1-s^2}-\frac{2}{15}(1-s^2)\sqrt{1-s^2}+\frac{8}{15}$ , en complétant l'intégrale (3306), & si l'on fait  $s=1$ , on aura  $GQ$  ou  $DC=\frac{8}{15}$ ; ces deux valeurs de  $DQ$  &  $GQ$  nous feront trouver celles de  $KH$ ,  $KC$ ,  $CH$ , & celles des deux diamètres de la terre.

2688. La tangente  $KH$  est égale à  $\frac{8}{15}+\frac{4}{15}s^2$ ; ce qui se démontre ainsi: dans le triangle  $HIZ$  on a cette proportion: le sinus de l'angle  $IHZ$  (égal au cosinus de la latitude, ou  $\sqrt{1-s^2}$ ), est au rayon comme  $IZ$  ( $=QG-hI$ ) est à  $HI$ , c'est-à-dire,  $\sqrt{1-s^2}:1::-\frac{2}{3}(1-s^2)\sqrt{1-s^2}+\frac{4}{3}(1-s^2)\sqrt{1-s^2}:\frac{8}{15}+\frac{4}{15}s^2$ , c'est la valeur de  $HI$ . Pour trouver l'autre partie  $IK$  de la tangente, on fera cette proportion: le sinus de  $IKk$  est au rayon, comme  $Ik$ , (ou  $Dh$ ) est à  $KI$ , c'est-à-dire,  $s:1::\frac{2}{3}s^2:\frac{2}{3}s^2$ ; c'est la valeur de  $KI$  qui ajoutée avec  $HI$ , que nous venons de trouver, donne la valeur totale de  $KH=\frac{8}{15}+\frac{4}{15}s^2$ , la développée entière  $DIG$  étant toujours prise pour unité (2687), ce qui fait 29305 toises  $+\frac{1}{3}$  s. Lorsque  $s$  fera  $=1$ , la partie  $KI$  deviendra égale à  $GC$ , & fera  $\frac{2}{3}$  de la développée; donc  $GC=\frac{2}{3}DIG=43958$  toises.



2689. La courbe *DIG* étant développée en commençant par le point *D*, décrira une courbe *DON*, dans laquelle on voit que les parties coupées *DE*, *OB*, *NM* sont toutes égales au rayon *ED* du premier degré; la partie  $KO = IO - KI = ID - KI = s^4 - \frac{4}{5}s^4 = \frac{1}{5}s^4$ ; ainsi pour avoir *OK*, l'on multipliera la cinquième partie de la développée *GID* par la quatrième puissance du sinus de la latitude.

Fig. 222.

La ligne *HB* ou la verticale comprise entre la surface de la terre *B*, & le point où cette verticale va couper l'axe, est égale à  $BO + OK + KH$ ; ainsi elle est égale à la somme du rayon du premier degré de latitude, des  $\frac{8}{15}$  de la développée entière, de  $\frac{1}{5}$  de la développée multipliée par la quatrième puissance du sin. lat. & de  $\frac{4}{15}$  de la développée multipliée par le carré du sinus de la latitude, ou ce qui revient au même à 3281012 toises, + 10989 multiplié par la quatrième puissance du sinus, plus 14653 multiplié par le carré du sinus de la latitude.

Longueur  
de la verti-  
cale.

Par le moyen de la tangente *KH*, on trouvera facilement la partie *CH*; car dans le triangle rectangle *KHC*, l'angle *K* est la latitude (2675), donc  $CH = KH \cdot \sin. \text{lat.}$  De même dans le triangle *HEB*, on a  $HR = EH \cdot \sin. \text{lat.}$  On en retranchera *CH*, & il restera *CR*; on cherchera aussi  $BR = EH \cdot \cos. \text{lat.}$  On cherchera l'hypothénuse *CB*, qui est le rayon de la terre, & l'angle *CBR* qui retranché de la latitude du lieu *B* (égal à l'angle *REH*) donnera le petit angle *CBH* de la verticale & du rayon de la terre.

Trouver les  
rayons de la  
terre.

2690. EXEMPLE. Pour avoir la verticale *BH* sous la latitude de Paris, qui est à 48° 50', on trouve d'un côté 3529 toises, de l'autre 8304 toises à ajouter avec 3281012, & l'on a pour la verticale *BH* 3292845; d'où l'on tire  $HR = 2478847$ , & *BR* dont il suffit d'avoir le logarithme 6,3359632. La tangente  $KH = 29305 + 8322 = 37627$ , étant multipliée par le sinus de la latitude, donne  $CH = 28325$  que l'on retranchera de *HR*, & l'on aura  $CR = 2450522$ ; si l'on ôte de son loga-

Les angles  
des verticales  
& des rayons,

richme celui de  $BR$ , on aura celui de la tangente de  $CBR$ ; cet angle se trouvera de  $48^{\circ} 30' 24''$ , plus petit que la latitude  $48^{\circ} 50'$  de  $19' 36''$ ; c'est la valeur de l'angle  $CBH$  que forme la verticale avec le rayon pour Paris; enfin  $CR$  divisée par le sinus de l'angle  $CBR$ , donnera le rayon  $CB$  pour Paris 3271581 toises.

C'est par cette méthode que j'ai calculé la table suivante (*Mém. acad.* 1752, pag. 108) pour avoir les parallaxes de la lune dans le sphéroïde applati (1684, 1705, 1708), lorsque je calculois les observations faites à Berlin. On y voit la grandeur absolue de la terre, & le degré d'aplatissement qui résulte des trois degrés que nous avons employés, & de l'hypothèse que nous avons suivie (2683). Le rayon de l'équateur ou la somme de  $ED$  & de  $DC$  est 3281012 toises, le demi-axe ou la différence entre  $GC$ , & le rayon  $GM$  du dernier degré est de 3262688 toises; la différence 18325 toises est l'aplatissement de la terre, de 8 lieues communes de France, ou un cent-soixante-dix-neuvième du rayon de l'équateur, au lieu de  $\frac{1}{230}$  que donne la théorie de l'attraction quand on suppose la terre homogène. Ce degré d'aplatissement de  $\frac{1}{179}$  est celui que j'ai employé dans mes calculs de la parallaxe (1705),  $= \frac{1}{178}$  de l'axe de la terre.

Aplatisse-  
ment.

Degrés de Latitude.	Angle du rayon avec la verticale.	Rayons de la terre, tels que $CB$ , en toises.	Angles dans le sphéroïde elliptique.
0°	0' 0''	3281012	0' 0''
10	5 20	3280572	6 36
20	10 27	3279263	12 26
30	14 58	3277155	16 44
40	18 17	3274377	19 4
50	19 37	3271202	19 4
60	18 22	3268017	16 44
70	14 18	3265252	12 26
80	7 50	3263396	6 36
90	0 0	3262688	0 0

2691. Nous n'avons employé dans les calculs précédens, que trois degrés, celui du Pérou, celui du nord & celui de Paris à Amiens : il y a encore d'autres degrés mesurés avec soin ; savoir au midi de la France par M. de Thury & M. de la Caille ; au Cap de Bonne-Espérance par M. de la Caille seul ; en Italie, entre Rome & Rimini par le P. Boscovich, & le P. Maire, Jésuites ; en Autriche & en Hongrie par le P. Liesganig ; en Piémont par le P. Beccaria ; dans l'Amérique septentrionale par des astronomes Anglois, en Pensylvanie : on en verra les quantités dans la table suivante ; j'observerai seulement que l'étalon de Langlois sur lequel fut faite la toise de M. de la Caille (*Mém. acad.* 1751, pag. 433), (& qui probablement est le même que celui que le sieur Canivet, neveu de Langlois, a acheté à son inventaire) est encore plus long que la toise du Pérou, d'environ  $\frac{1}{18}$  ou  $\frac{1}{20}$  de lig. sans doute qu'il a été usé par le frottement qu'exigeoit entre ses mains l'usage d'un pareil instrument ; au contraire la toise du P. Boscovich étoit conforme à celle de M. de Mairan (2636).

TABLE des dix degrés qui ont été mesurés géométriquement,  
par divers Astronomes.

Latit. moy. des degrés mesurés.	Valeur des degrés en toises.	Auteurs d'où les mesures sont tirées, & qui en ont donnés les détails.
0° 0'	56753	M. Bouguer & M. de la Condamine (2673).
33 18 A	57037	M. de la Caille, <i>Mém. acad.</i> 1751, p. 435.
39 12	56888	MM. Mason & Dixon, <i>Phil. transf.</i> 1768, p. 326.
43 0 S	56979	Le P. Boscovich, de <i>Litter. expéd.</i> 1755.
44 44	57069	Le P. Beccaria, en Piémont 1768.
45 0	57028	<i>Mérid. vér. Mém. acad.</i> 1758, p. 244.
45 57	56881	Le P. Liesg, en Hong. <i>Dimens. grad.</i> 1770, p. 256.
49 23	57069	De Paris à Amiens (2651).
66 20	57422	Sous le cercle polaire (2672).
48 43	57086	Le P. Liesganig, en Autriche, p. 214.

2692. Le P. Boscovich dans ses notes sur le Poëme Latin de M. Stay, examina de quelle manière on pourroit combiner les cinq degrés dont on avoit la mesure pour en tirer l'ellipticité de la terre par une espèce de milieu, & il se proposoit de trouver les corrections à faire aux résultats des mesures, de manière que la somme des corrections positives fût égale à celle des négatives; que les différences des degrés fussent proportionnelles aux différences des sinus versés des doubles latitudes (3626); enfin que la somme des corrections positives ou négatives fût la plus petite de toutes celles que l'on peut avoir en observant les deux premières conditions; & il trouvoit  $\frac{1}{2+8}$  pour la différence des axes. (Tom. II, pag. 424).

Mais employant ensuite les degrés mesurés par le P. Liesganig avec les 8 autres que l'on avoit, le P. Boscovich a trouvé pour l'ellipticité de la terre  $\frac{1}{3+1}$ , & si l'on omettoit le seul degré de Laponie, qui diffère sensiblement des autres, sur-tout du degré de l'Amérique septentrionale, & de celui de Bohême, on auroit, selon cet auteur  $\frac{1}{3+1}$ . Ces deux fractions ne s'éloignent pas beaucoup de  $\frac{1}{3+5}$  que le P. Boscovich trouve par la théorie, en faisant varier les densités d'une manière assez naturelle (*Voyage astronomique & géographique*, édition de 1770, pag. 512 & dernière).

2693. D'après les dimensions de la terre qui sont dans la table de l'article 2690, on peut avoir une idée de sa surface, de sa solidité & de son poids; supposons, pour simplifier le calcul, que l'on décrive un sphéroïde sur les deux diamètres de la terre, dont l'un est de 6562024 toises ou de  $2874\frac{2}{3}$  lieues, l'autre de 6525376 toises ou  $2858\frac{2}{3}$  lieues, son volume ou sa solidité sera  $\frac{2}{3} \pi a^2 b$  (3331) ou 12366044000 lieues cubes.

Si l'on suppose un globe de même volume ou gros-seur, il faudra que son rayon soit de 1434,544 lieues, & sa surface sera 25860560 lieues carrées. Mais si l'on veut avoir la surface du sphéroïde sans recourir à la supposition d'une sphère équivalente, il faudra employer

Gros-seur ou  
volume de la  
terre.



avec grand soin en 1737, près de la montagne de Chimborazo au Pérou, le fil à-plomb étoit détourné de 8'' par la masse de cette montagne; les hauteurs des étoiles prises avec un quart-de-cercle de deux pieds & demi, du côté du midi, paroissoient toutes plus grandes, & les hauteurs prises du côté du nord paroissoient plus petites quand on observoit tout près de la montagne du côté du midi, que quand on en étoit éloigné, à même latitude; ce qui prouvoit que le poids du fil à-plomb étoit attiré au midi, & indiquoit une ligne verticale & un zénit trop près des étoiles méridionales (M. Bouguer, *pag.* 389).

Attraction  
des monta-  
gnes.

Cette montagne qui a 3217 toises de hauteur, est environ 7400 millions de fois plus petite que la terre; mais quand on est placé à 1800 toises de son centre de gravité, c'est-à-dire, 1900 fois plus près de lui que du centre de la terre, son attraction doit être environ  $\frac{1}{1800}$  de celle de la terre; cette quantité auroit dû produire une différence 13 fois plus considérable que celle qu'on a observée, si la montagne n'eût pas été un volcan creusé par l'action des feux souterrains; (M. Bouguer, *pag.* 389). Peut-être que la montagne elle-même n'a été soulevée que par de semblables explosions.

2696. Le P. Beccaria a trouvé en Piémont une différence encore plus grande: entre Turin & Andra l'arc mesuré s'est trouvé de 26'' plus petit qu'en France sur une égale longueur, & le degré qu'on en auroit voulu conclure auroit été trop grand de 900 toises; mais Andra est située sur le penchant de *Monte Barone*, qui va toujours en s'élevant sur une longueur de plus de sept lieues jusqu'au sommet de *Monte Rosa*, que le P. Beccaria regarde comme la plus haute montagne de l'Europe.

Le P. Boscovich ayant trouvé le degré du méridien en Italie de 56979 toises, tandis qu'il auroit dû être de 57110, en le réglant sur ceux du nord & du Pérou (2683), a pensé que les termes de sa mesure étant placés, l'un au nord & l'autre au midi de la grande chaîne des montagnes de l'Appennin, les observations faites par le moyen du fil à-plomb, avoient dû être troublées par l'ac-

traction de cette masse de montagnes , & donner un moindre nombre de toises pour chaque degré.

M. Cavendish croit que le degré qui a été mesuré dans l'Amérique septentrionale pourroit bien avoir été diminué de 60 ou 100 toises par le défaut d'attraction du côté de la mer , & que les degrés mesurés en Italie & au Cap de Bonne-Espérance pourroient être sensiblement affectés de la même cause , ( *Philos. transf.* 1768 , pag. 328 ). Le P. Boscovich pense qu'on pourroit s'en assurer en faisant des expériences à St Malo lorsque la mer est très-basse , & lorsqu'ensuite une élévation de 100 pieds , par l'effet des grandes marées , rend son attraction considérablement plus forte.

2697. M. de la Caille pensoit aussi qu'à Perpignan le voisinage des Pyrénées avoit pu faire dévier le fil à-plomb vers le sud ; faire paroître le zénit plus au nord qu'il ne l'est réellement , & rendre plus petits les arcs compris entre Perpignan & les autres villes de France ; aussi voyons-nous que M. de la Caille abandonne , pour ainsi dire , les observations célestes faites à Perpignan pour conclure la longueur du degré , dont le milieu passe à  $45^{\circ}$  de latitude 57028 toises ( *Mém. acad.* 1758 , pag. 244 ).

2698. Jusqu'ici nous n'avons parlé que des degrés du méridien ou des degrés de latitude ; il y a cependant des cas où l'on a besoin des degrés de longitude ou des degrés des petits cercles parallèles à l'équateur. Si la circonférence de la terre *PEM* (fig. 222) , est supposée sphérique , le rayon *BR* du parallèle qui passe par le point *B* , est le cosinus de la latitude *EB* , les degrés de longitude sont donc aux degrés de latitude , comme le rayon est au cosinus de la latitude ; ainsi le degré de latitude étant à Paris 57074 toises , si l'on multiplie cette quantité par le cosinus de  $48^{\circ} 50' 14''$  , l'on aura 37566 toises , pour l'étendue de chaque degré du parallèle de Paris.

Des degrés  
de longitude.

Fig. 222.

Mais la terre étant aplatie on trouve par cette règle des degrés de longitude qui sont toujours trop petits ,

car  $BI$  est le rayon du degré de latitude en  $B$  (2686); mais  $BH$  est celui qu'il faudroit prendre pour que la proportion précédente eût lieu, & qu'elle fit trouver la véritable grandeur de  $BR$ . On a vu ci-devant la manière de trouver la verticale entière  $BH$  (2680, 2689); cette ligne divisée par 57 (2685) donne le deg. du grand cercle de la terre qui est perpendiculaire au méridien en  $B$ , & ce deg. multiplié par le cos. de la lat. donne le deg. du parallèle sur le sphéroïde aplati, (*M. Bouguer*, pag. 316). ainsi l'on trouveroit pour Paris que le deg. du grand cercle perpendiculaire au méridien, est de 57471 toises, plus grand de 397 que le deg. du méridien; & le deg. du parallèle est 37833, plus grand de 265 toises, qu'il ne seroit sur la terre sphérique.

Mesure des  
degrés de lon-  
gitude.

Delà on voit combien la mesure des degrés de longitude pourroit servir à déterminer l'aplatissement de la terre (*Mém. acad.* 1733, pag. 162); mais pour déterminer l'amplitude des arcs des parallèles en minutes & secondes avec assez d'exactitude, il faut de très-grandes distances, & une très-grande précision dans la différence des méridiens: on y emploie sur-tout des feux pour servir de signaux (*Mérid. vérif.* pag. 98, 105; *Mém. acad.* 1735, pag. 1).

M. de la Condamine dans son voyage d'Italie remarqua qu'on pourroit placer sur un des sommets de l'Appennin, un signal d'où l'on verroit la mer Adriatique à l'orient, & celle de Toscane à l'occident, & même les montagnes d'Istrie & de Croatie d'un côté, & de l'autre celles de Gènes, ce qui formeroit une distance de plus de 5° en longitude, qu'on pourroit mesurer avec assez de précision (*Mém. acad.* 1757, pag. 398).

### *De la longueur du Pendule.*

2699. Les différens pays de la terre étant plus ou moins éloignés du centre de la terre, la force de la pesanteur doit y être différente, & nous verrons dans



la suite quelle est la différence (3588). Les oscillations d'un pendule qui est animé par la pesanteur doivent se faire plus vite sous le pôle que sous l'équateur; il faut donc pour lors allonger un pendule pour lui faire battre les secondes. L'observation a constaté cette vérité, depuis le voyage fait à Cayenne en 1672 (2657), & l'on a observé sous l'équateur & en Laponie, une différence de deux lignes & demie dans la longueur du pendule. Voici une table des longueurs du pendule simple observées jusqu'à présent, dont on pourroit remplir les points intermédiaires, en supposant que les allongemens soient comme les carrés des sinus des latitudes, ainsi que l'a fait M. de Maupertuis, (*Figure de la terre*, pag. 181).

Sous l'équateur à 2434 toif. de haut. (M. Boug. <i>Fig. de la T. p.</i> 342).	36p 6170
Sous l'équateur à 1466 toises, par le même. . . . .	36 6,83
Sous l'équateur au niveau de la mer, par le même. . . . .	36 7,07
A Portobelo, latit. 9° 34', par le même. . . . .	36 7,16
Au petit Goave, dans l'Isle St. Domingue, 18° 27', par le même. . . . .	36 7,33
Au Cap de Bonne-Espérance 33° 55' ( <i>Mém. acad.</i> 1751, p. 438).	36 8,07
A Genève 46° 12', par M. Mallet, avec le pendule invariable. . . . .	36 8,17
A Paris 48° 50' ( <i>Mém. ac.</i> 1735), par M. de Mairan. V. art. 2638.	36 8,52
Par M. Bouguer, après les réductions faites. . . . .	36 8,67
A Leyde 52° 9', par M. Lulofs. . . . .	36 8,71
A Pétersbourg 59° 56', par M. Mallet. . . . .	36 8,97
A Pello 66° 48' (M. de Maupertuis, <i>Fig. de la Terre</i> , pag. 180).	36 9,17
A Ponoï, en Laponie 67° 4', par M. Mallet. . . . .	36 9,17

Les observations du pendule ont besoin de diverses corrections relativement à la chaleur qui dilate les instrumens, à la résistance de l'air, & à la hauteur au-dessus du niveau de la mer; M. Bouguer trouve avec ces corrections que le pendule sous l'équateur, doit être de 36 pou. 7 lig. 21, & pour Paris 36 pou. 8 lig. 67. (*Figure de la terre*, pag. 342).

Le pendule invariable dont s'est servi M. Mallet, est celui dont M. de la Condamine s'étoit servi au Pérou, (*Mém. acad.* 1745, pag. 476). J'ai trouvé qu'il faisoit à Paris en 24 heures de temps moyen 98891 oscillations, M. Mallet en a trouvé 98852 à Genève, 98941 à Pétersbourg, 98964 à Ponoï; & supposant le pendule pour Paris 36 pou. 8 lig. 52, il en a conclu les trois autres

par le rapport des carrés des nombres d'oscillations (3371).

La manière de déterminer la longueur du pendule simple avec la plus grande précision, & d'y faire toutes les corrections nécessaires, a été donnée par M. de Mairan, dans les *Mém. de 1735*, pag. 153.

M. de la Condamine, M. Bouguer & M. Godin donnèrent aussi des Mémoires sur cette matière, dans le même volume; enfin, on peut voir le livre de M. Bouguer, pag. 330. A l'égard des pendules composés, on peut voir le mémoire que j'ai donné à la suite du *Traité d'Horlogerie* de M. Lepaute.

On voit par la comparaison des 3 premières observations, que la pesanteur diminue quand on s'élève sur les montagnes du Chili; on a prétendu que le contraire avoit été observé dans les Alpes en 1768; mais M. Bouguer avoit déjà montré que cela même pouvoit avoir lieu, si les montagnes avoient une densité beaucoup plus considérable que le total du globe. *Ibid. pag. 362.* On trouvera des applications de ces expériences du pendule, art. 3372, 3373 & 3421.



## LIVRE SEIZIEME.

*DE LA PRÉCESSION, ET DE LA PARALLAXE  
annuelle des étoiles fixes, des changemens de  
l'obliquité de l'écliptique, & du déplacement  
particulier de différentes étoiles.*

**L**ES ÉTOILES fixes sont les termes de comparaison auxquels les astronomes rapportent sans cesse les mouvemens planétaires; ainsi les situations des étoiles sont le fondement essentiel de toutes les recherches des astronomes; & la connoissance de leurs mouvemens; vrais ou apparens, influe sur tout le reste de l'astronomie.

2700. On doit considérer six espèces de mouvemens dans les étoiles fixes, la précession, l'aberration, la nutation, le changement général de latitude, les changemens particuliers à différentes étoiles, & la parallaxe annuelle que plusieurs astronomes y ont soupçonnée; nous réserverons l'aberration & la nutation pour le livre suivant, comme ayant été trouvées ensemble, & fort récemment; nous parlerons ici des quatre autres mouvemens.

Six mouvemens dans les étoiles.

2701. LA PRÉCESSION est ce changement annuel d'environ  $50'' \frac{1}{3}$  par année (917), observé dans les longitudes de toutes les étoiles fixes. Le mouvement général de la précession se fait le long de l'écliptique, & autour de ses poles, enforte que les latitudes des étoiles fixes n'en sont point affectées; car tandis que nous voyons toutes les longitudes des étoiles fixes plus grandes en 1750 de  $26^{\circ} \frac{1}{2}$  qu'elles n'étoient au temps d'Hipparque (915), nous n'apercevons qu'à peine un petit changement dans les latitudes des étoiles fixes, changement qui tient à d'autres causes (2739).

## 130 ASTRONOMIE, LIV. XVI.

Par un effet de ce mouvement en longitude, toutes les étoiles changent d'ascension droite & de déclinaison, mais ce changement n'est pas le même pour différentes étoiles; nous allons donc commencer par la recherche de la précession en ascension droite & en déclinaison, qui est d'un usage continuel & indispensable dans l'astronomie.

Il est facile quand on connoît la longitude & la latitude d'un astre, de trouver par la trigonométrie sphérique l'ascension droite & la déclinaison (206); & par conséquent d'avoir le changement de l'une quand on connoît le changement de l'autre; mais il est beaucoup plus facile de trouver la précession pour un petit espace de temps, par la considération des arcs supposés comme infiniment petits; c'est ce que nous allons exécuter par deux méthodes différentes.

Fig. 224.

2702. Supposons que  $ENT$  (fig. 224) soit l'équateur,  $EQ$  l'écliptique,  $ED$  le changement du point équinoxial le long de l'écliptique, ou la précession en longitude,  $DG$  un petit arc perpendiculaire sur  $EG$ ; l'équateur  $ET$  prendra la situation  $DVT$ , en sorte qu'il tournera, pour ainsi dire, autour d'un point  $T$  situé dans le colure des solstices à  $90^\circ$  du point  $E$ ; car puisque l'obliquité de l'écliptique ne change pas, c'est-à-dire, que l'angle  $GED$  est égal à l'angle  $VDQ$ , c'est une preuve que le petit arc  $GE$  est parallèle au petit arc  $DF$ , & que tous deux sont perpendiculaires sur  $DG$ , ce qui n'arrive qu'à  $90^\circ$  de l'intersection  $T$  des deux cercles, ou du pôle de l'arc  $GD$ ; ainsi les longitudes qui se comptoient du point  $E$  le long de l'écliptique  $EDQ$ , se compteront du point  $D$ , & seront toutes changées d'une quantité  $ED$ , qui est la précession de  $50''\frac{1}{3}$  par année. De même les ascensions droites qui se comptoient du point  $E$  le long de l'équateur  $EGNT$ , se compteront du point  $D$ , & seront toutes changées de la quantité  $EG$ , parce que  $TG$  étant égal à  $TD$ , on a  $GE$  pour la différence entre  $TE$  &  $TD$ . Ainsi la précession en ascension droite commune à tous

les astres fera égale à  $EG$ , ou  $ED \cos. E$  (3611), c'est-à-dire, à la précession en longitude multipliée par le cosinus de l'obliquité de l'écliptique. Si l'on appelle  $P$  la précession en longitude qui est de  $50''$  par année, &  $O$  l'obliquité de l'écliptique de  $23^\circ 28'$ , l'on aura la précession moyenne en ascension droite, ou la première partie de la précession en ascension droite  $= P \cos O$ . (Voy. encore l'art. 2706).

2703. Il y a un autre changement dans la précession en ascension droite qui varie pour les différentes étoiles, parce qu'il dépend de leur situation. Soit  $A$  un astre quelconque,  $AB$  sa déclinaison lorsque l'équateur étoit en  $ET$ ;  $AC$  sa déclinaison lorsque l'équateur est en  $DT$ , la différence entre  $TB$  &  $TC$  ou entre  $GB$  &  $DC$  qui est égale au petit arc  $BK$  de l'équateur, marque un autre changement d'ascension droite dans l'étoile  $A$ , puisqu'au lieu de répondre au point  $B$ , elle répond au point  $C$  qui en diffère de la quantité  $BK$ , changement qui est indépendant du changement  $GE$  que nous avons évalué ci-devant. De même  $KC$  indique la différence entre la déclinaison  $AB$  & la déclinaison  $AC$ ; c'est-à-dire, la précession en déclinaison, qui dérive de la précession en longitude,  $ED$ .

La différence  $KB$  vient de ce que les petits arcs  $KB$ ,  $CH$ , ne sont pas parallèles entre eux; ces arcs sont convergens vers le point d'intersection  $T$ , & cela d'autant plus que le cosinus de l'arc  $T$  augmente; car dans le triangle  $CKT$  supposé rectangle en  $C$ , la trigonométrie sphérique nous apprend que le sinus de l'angle  $K$ , est comme le sinus de son côté opposé  $TC$  (3665), donc le sinus de cet angle change comme sin.  $TC$ ; mais les petites augmentations des sinus sont comme les cosinus (3307), donc la variation de l'angle  $C$  est comme le cosinus de  $TC$  ou le sinus de l'ascension droite  $DC$ ; ainsi le petit angle  $T$ , mesuré par  $GD$ , étant égal à  $P \sin. O$  (3611), la convergence ou l'angle des arcs  $BK$ ,  $CH$ , ou de leurs tangentes, est  $P \sin. O \sin. asc. dr.$  C'est aussi l'angle des arcs  $AB$  &  $AK$  ou de

Précession  
en ascension  
droite.

leurs tangentes en  $K$  & en  $B$ ; mais l'angle que font ces deux tangentes, à leur point de concours a pour rayons les tangentes elles-mêmes des arcs  $AB$ ,  $AK$ ; tandis que l'arc compris  $BK$  a pour rayon le sinus total, ou le rayon de la sphère, donc le rayon est à la tangente de la déclinaison  $AB$ , comme l'angle des deux tangentes est à l'arc  $BK$ ; ainsi il faut multiplier l'angle des tangentes en  $B$  & en  $K$ , que nous avons trouvé ci-devant, par la tangente de la déclinaison  $AB$ , pour avoir l'arc  $BK$ . Donc, cette seconde partie  $BK$  de la précession en ascension droite sera  $P. \sin. O. \sin. \text{ascenf. dr. tang. déclinaison}$ . On en verra bientôt une autre démonstration (2706).

Seconde partie de la précession en ascension droite.

2704. La précession en déclinaison  $CK$  est à  $GD$ , ou  $P. \sin. O$ , comme  $\sin. TG$  est à  $\sin. TK$ , ou  $\cos. DC$  (892), donc  $CK = P. \sin. O. \cos. EK$ ; donc la précession en déclinaison est égale à  $P. \sin. O. \cos. \text{ascenf. droite}$ .

Fig. 223.

2705. Je vais actuellement chercher les mêmes quantités par la considération des poles de l'écliptique & de l'équateur, parce que c'est la manière dont M. Euler, & d'autres géomètres ont coutume de traiter les mouvemens des cercles de la sphère, & qu'elle est plus commode en certains cas. Soit  $P$  (fig. 223) le pole de l'équateur,  $E$  le pole de l'écliptique,  $S$  une étoile,  $PS$  le cercle de déclinaison,  $ESL$  le cercle de latitude,  $HI$  une portion de l'équateur,  $KL$  une portion de l'écliptique,  $FS$  un petit arc parallèle à l'équateur,  $DS$  parallèle à l'écliptique; je suppose l'arc  $KL$  ou l'angle  $KEL$  égal à la précession en longitude, & l'arc  $HI$  ou l'angle  $HPI$  égal à la précession en ascension droite; ce sont les quantités dont il faut trouver le rapport, c'est-à-dire, que par le moyen de  $KL$  il faut avoir  $HI$ .

L'angle  $DSF$  est égal à l'angle de position  $PSE$ ; car l'angle  $PSF$  est droit, aussi bien que l'angle  $ESD$ ; si l'on retranche l'angle commun  $ESF$ , il reste  $PSE = DSI$ . Le petit triangle  $DSF$  étant sensiblement

retiligne, si l'on appelle 1 le sinus total, on aura

$\frac{DS}{SF} = \frac{1}{\text{cof. } PSE}$ , (3611). Puisque  $EL$  est un quart-de-cercle, on a  $\frac{KL}{DS} = \frac{1}{\text{fin. } ES}$  (892), &  $\frac{SF}{HI} = \frac{\text{fin. } PS}{1}$ . La

fraction  $\frac{KL}{HI}$  peut être aussi exprimée de la sorte  $\frac{KL \cdot DS \cdot SF}{DS \cdot SE \cdot HI}$ ,

car  $DS$  &  $SF$  se détruisent; substituant dans cette expression les valeurs que l'on vient de trouver, on aura

$\frac{\text{fin. } PS}{\text{fin. } ES \cdot \text{cof. } PSE}$ ; mais  $\frac{1}{\text{cof. } PSE} = \frac{\text{tang. } PSE}{\text{fin. } PSE}$ , ainsi l'expres-

sion revient à  $\frac{\text{tang. } PSE \cdot \text{fin. } PS}{\text{fin. } ES \cdot \text{fin. } PSE}$ ; mais par la trigonométrie

sphérique (3690),  $\text{fin. } ES \cdot \text{fin. } PSE = \text{fin. } PE \cdot \text{fin. } EPS$

donc  $\frac{KL}{HI} = \frac{\text{tang. } PSE \cdot \text{fin. } PS}{\text{fin. } PE \cdot \text{fin. } EPS}$ .

2706. Il faut dans cette expression faire évanouir  $\text{tang. } PSE$ , puisqu'on peut exprimer l'angle  $S$  par l'angle  $P$  & par les côtés  $PS, PE$ , au moyen de l'ascension droite & de la déclinaison de l'étoile, avec l'obliquité de l'écliptique, qui sont les données de ce problème. Ayant abaissé un arc perpendiculaire  $EX$ ,

on a,  $\text{tang. } S = \frac{\text{tang. } P \cdot \text{fin. } PX}{\text{fin. } SX}$  (3693); mais  $\text{fin. } SX = \text{fin.}$

$(PS - PX) = \text{fin. } PS \cdot \text{cof. } PX - \text{fin. } PX \cdot \text{cof. } PS$

(3619), donc  $\frac{\text{fin. } SX}{\text{fin. } PX} = \frac{\text{fin. } PS}{\text{tang. } PX} - \text{cof. } PS$ ; mais  $\frac{1}{\text{tang. } PX}$

$= \frac{1}{\text{cof. } P \cdot \text{tang. } PE} = \frac{\text{fin. } SX}{\text{fin. } PX}$  (3668), donc  $\frac{\text{fin. } SX}{\text{fin. } PX} = \frac{\text{fin. } PS}{\text{cof. } P \cdot \text{tang. } PE} -$

$\text{cof. } PS = \frac{\text{fin. } PS - \text{cof. } PS \cdot \text{cof. } P \cdot \text{tang. } PE}{\text{cof. } P \cdot \text{tang. } PE}$ ; donc  $\frac{\text{fin. } SX}{\text{fin. } PX} \text{ tang.}$

$P$ , c'est-à-dire, tangente  $S = \frac{\text{cof. } P \cdot \text{tang. } P \cdot \text{tang. } PE}{\text{fin. } PS - \text{cof. } PS \cdot \text{cof. } P \cdot \text{tang. } PE}$ ;

substituant pour  $\text{tang. } P \cdot \text{cof. } P$  sa valeur  $\text{fin. } P$ , & divi-

sant tout par  $\text{tang. } PE$ , on a enfin  $\frac{\text{fin. } PS \cdot \text{cof. } PE - \text{cof. } P \cdot \text{cof. } PS}{\text{fin. } P \cdot \text{cof. } PS}$ ;

c'est la valeur de  $\text{tang. } S$ ; cette expression sera employée

dans plusieurs endroits de ce livre (3722 & suiv. 3826);

si l'on met cette valeur dans l'expression de  $\frac{KL}{HI}$ , qui est

$\frac{\text{tang. } PSE \cdot \text{fin. } PS}{\text{fin. } PE \cdot \text{fin. } EPS}$  (2705), elle deviendra . . . .

Fig. 223.

Précession  
en ascension  
droite.fin.  $P$ . fin.  $PS$ .

fin.  $P$   $L$ . cot.  $PE$ . fin.  $P$ . fin.  $PS$  — fin.  $P$   $L$ . fin.  $P$ . cot.  $P$ . cot.  $PS$ , divisant le numérateur & le dénominateur par fin.  $P$  fin.  $PS$ , & mettant cot.  $PE$  à la place de fin.  $PE$ . cot.  $PE$ , on aura

$\frac{KL}{HI} = \frac{1}{\cot. PE. — \sin. PL. \cot. P. \cot. PS}$ ; mais l'angle  $P$  est le complément de l'ascension droite, donc la précession en ascension droite  $HI$  est égale à la précession en longitude multipliée par  $(\cot. 23^\circ \frac{1}{2} — \sin. 23^\circ \frac{1}{2}. \sin. \text{asc. dr. tang. décl.})$ .

Autre dé-  
monstration.

2707. On peut démontrer autrement la même formule en concevant que l'étoile est fixe en  $S$ , & considérant le pôle de l'équateur qui se meut autour du pôle  $E$  de l'écliptique, sur le petit arc  $Pp$  d'un parallèle à l'écliptique; car toutes les fois que l'intersection de deux cercles change de place par le mouvement d'un des cercles, l'inclinaison restant la même, il s'ensuit que le pôle du cercle mobile décrit aussi un arc de cercle autour du pôle du cercle immobile (1353). Supposons un grand cercle  $PpR$  perpendiculaire à  $EP$ , c'est-à-dire, le colure des équinoxes, qui est confondu avec le parallèle à l'écliptique sur le petit espace  $Pp$ , & un arc perpendiculaire  $SR$ ; l'étoile  $S$  change de longitude par deux raisons; la première, c'est que le colure des solstices  $PEA$  passe en  $pEB$ , & va répondre sur l'équateur en un autre point  $B$ , en sorte que  $BA = BEA$ . fin.  $EA$  (892), c'est-à-dire, égal à la précession en longitude multipliée par le cosinus de l'obliquité de l'écliptique; c'est une quantité constante qui affecte toutes les étoiles, puisque toutes les ascensions droites se rapportent au colure des solstices  $PEA$  ou  $pEB$ , ou au colure des équinoxes qui en est toujours à  $90^\circ$ . C'est la première partie de la précession en ascension droite (2702, 2706).

Mais il y a une seconde cause de changement dans les ascensions droites de différentes étoiles, elle vient de ce que l'angle  $SPR$  se change en un angle  $SpR$ ; or dans le triangle  $SPR$ , dont l'angle  $R$  est constant,



ainsi que le côté  $SR$ , tant qu'on n'a égard qu'au changement  $Pp$ , & que le point  $S$  reste toujours le même, le changement de l'angle  $P$  ou  $dSPR = Pp \cdot \sin. P \cdot \cot. PS$  (3764); mais  $Pp = P \cdot Ep \cdot \sin. 23^\circ \frac{1}{2}$  (892), & l'angle  $SPR$  est égal à l'ascension droite de l'étoile; donc ce changement de l'ascension droite  $= P \cdot Ep \cdot \sin. 23^\circ \frac{1}{2} \cdot \cot. P \cdot \sin. \text{asc. droite}$ ; c'est-à-dire, à la précession en longitude, multipliée par le sinus de l'obliquité de l'écliptique, par le sinus de l'ascension droite de l'étoile & par la tangente de sa déclinaison, comme dans l'art. 2703.

Fig. 223.

2708. Si l'on appelle  $L$  la précession en longitude, on aura la précession en ascension droite composée de deux parties; l'une  $L \cdot \cos. 23^\circ \frac{1}{2}$ , l'autre  $= L \cdot \sin. 23^\circ \frac{1}{2} \cdot \sin. \text{asc. dr. tang. décl.}$ . Si l'on appelle  $M$  la première partie  $L \cdot \cos. 23^\circ \frac{1}{2}$  de l'expression précédente, & qu'à la place de  $L$  on mette dans la seconde  $\frac{M}{\cos. 23^\circ \frac{1}{2}}$ , on aura pour cette seconde partie  $M \cdot \tan. 23^\circ \frac{1}{2} \cdot \sin. \text{asc. dr. tang. décl.}$ . Ainsi la première partie de la précession en ascension droite sera constante, & la seconde sera égale au produit de la première par la tangente de  $23^\circ \frac{1}{2}$ , par le sinus de l'ascension droite de l'étoile, & par la tangente de sa déclinaison. Je suppose la précession en longitude  $L$  pour dix ans, égale à  $8' 23'' 36$ , en la multipliant par cosinus  $23^\circ \frac{1}{2}$ , on a  $7' 4'' 4$  qui est la première partie  $M$  de la précession en ascension droite, commune à toutes les étoiles. Si l'on multiplie cette première partie par tang. obl. éclip. par sin. asc. dr. & par tang. décl. on a la seconde partie en forme d'équation, qu'on peut appliquer à chaque étoile; j'en ai donné une table à la suite de celles de M. Halley, pag. 176; & je m'en suis servi pour la précession de toutes les étoiles qui sont dans le catalogue, vers la fin des tables de cet ouvrage.

Précession  
en ascension  
droite.

2709. On suppose dans la figure 223 l'étoile  $S$  dans les six derniers signes d'ascension droite, puisque le point  $S$  est plus près du pôle de l'écliptique que l'équa-

Fig. 223. teur, ainsi la quantité  $-\cos.P$  de la formule (2706) devient positive quand l'ascension droite est moindre que six signes; l'équation devra donc être ajoutée dans les six premiers signes d'ascension droite; mais dans les six autres, le sinus devenant négatif, elle doit être retranchée. On observera aussi que pour les étoiles dont la déclinaison est australe, la tangente de la déclinaison doit devenir négative & changer les signes des équations (3606).

2710. La précession en déclinaison, est exprimée par  $DF$ ; or dans le triangle  $DFS$  on a  $\frac{DF}{DS} = \sin. S$  (3613), & au lieu de  $DS$  substituant  $KL \sin. E S$  (892), on a  $DF = KL \sin. E S \sin. S$ ; mais  $\sin. E S \sin. S = \sin. P E \sin. P$  (3690); donc  $DF = KL \sin. PE \sin. P$ ; donc la *précession en déclinaison est égale à la précession en longitude multipliée par le sinus de l'obliquité de l'écliptique & par le cosinus de l'ascension droite de l'étoile*, c'est-à-dire,  $L \sin. 23^{\circ} \frac{1}{2} \cos. asc. dr.$  & mettant pour  $L$  comme ci-devant  $\frac{M}{\cos. 23^{\circ} \frac{1}{2}}$ , la précession en déclinaison devient  $M \tan. 23^{\circ} \frac{1}{2} \cos. asc. droite$ ; c'est ainsi que j'ai formé la table que j'ai ajoutée à celles de M. Halley, pag. 177; de même que les précessions en déclinaison du catalogue des étoiles.

Précession  
en déclinaison.

2711. On peut avec une même table trouver la seconde partie de la précession en ascension droite pour  $45^{\circ}$  de déclinaison, & la précession en déclinaison; car une même table peut exprimer  $M \tan. 23^{\circ} \frac{1}{2} \sin. asc. droite$ ,  $\tan. déclinaison$  (2708), si  $\tan. déclinaison = 1$ , & exprimer  $M \tan. 23^{\circ} \frac{1}{2} \cos. asc. dr.$  (2710), pourvu qu'il y ait des argumens qui soient renversés, c'est-à-dire, différens de trois signes; ainsi la partie  $M \tan. 23^{\circ} \frac{1}{2} \sin. asc. droite$ , qui répondra à  $1^{\circ}$  d'argument fera la même chose que  $M \tan. 23^{\circ} \frac{1}{2} \cos. asc. droite$  pour  $4^{\circ}$  d'argument; on peut donc réunir à côté d'un même nombre les argumens  $1^{\circ}$  &  $4^{\circ}$ ; lorsqu'on emploiera  $1^{\circ}$ , on aura la précession en ascension droite (pour  $45^{\circ}$  de

de

de déclinaison) ; lorsqu'on emploiera 4<sup>s</sup>, on aura la précession en déclinaison ; la première devra être multipliée par la tangente de la déclinaison pour avoir la seconde partie ou équation de la précession en ascension droite ; (2708). Tel est l'artifice que M. l'Abbé de la Caille a employé dans l'ouvrage intitulé : *Astronomie fondamentale*, pag. 9, table XIV ; mais dont je ne ferai point usage ici, puisque les tables que j'ai faites en tiennent lieu.

2712. Les étoiles qui ont l'angle de position égal à 90 degrés, c'est-à-dire, dont le cercle de déclinaison & le cercle de latitude se coupent à angles droits, ont la seconde partie de la précession en ascension droite détruite par la première, enforte que la précession en ascension droite est nulle ; tous ces points sont sur la courbe que forme l'intersection d'un cône oblique dont les deux côtés passent par les poles de l'écliptique & de l'équateur, & dont la base est tangente à la sphère sur un des poles, c'est-à-dire, perpendiculaire à un des côtés du cône : voici une table qui montre pour chaque longitude par quel degré de latitude passe cette courbe ; elle détermine les étoiles qui ont la plus grande parallaxe en déclinaison, & au-dedans, elle renferme celles dont la précession est négative, c'est-à-dire, décroissante pendant que la longitude augmente.

Longit.	Latitude.
0	90° 0'
10	85 41
20	81 34
30	77 44
50	71 36
70	67 47
90	66 32

Inégalité de la précession en ascension droite.

2713. La précession en ascension droite & en déclinaison, trouvée par les expressions précédentes, est sensiblement uniforme pendant un espace de dix ans ; mais dans les dix années suivantes, il peut y avoir une demi-seconde de plus ou de moins (*Expos. du calcul astron.* pag. 92), par exemple, la précession en déclinaison pour *Amars*, entre 1745 & 1755 est 1' 29" 3 ; mais de 1755 à 1765, elle n'est que de 1' 23" 7 ;

cette inégalité même se pourroit facilement réduire en tables.

Lorsqu'on voudra avoir la précession en ascension droite pour un long espace de temps, il faudra calculer la longitude, & ensuite l'ascension droite qui lui répond, ou bien calculer le mouvement de 10 en 10 ans par les formules précédentes, en changeant à chaque fois l'ascension droite & la déclinaison (2750).

Changement  
de l'angle de  
position.

Fig. 223.

2714. La précession apporte aussi un changement à l'angle de position (1045); car l'angle  $EDP$  (fig. 223), est plus ou moins grand que l'angle  $ESP$ ; sa variation est égale à l'angle  $DES$  multiplié par le sinus de  $PE$ , & le cosinus de l'angle  $P$ , le tout divisé par le sinus de  $PS$  (3086). Ainsi le changement annuel de l'angle de position est  $\frac{50'' \sin. 23^\circ \sin. asc. dr.}{\cos. décl.}$ . Il est de 20'' 05 pour les étoiles situées dans l'équateur, & en même temps près du colure des solstices; mais les étoiles situées sur le colure des équinoxes, dont l'ascension droite est  $0^\circ$  ou  $180^\circ$ , n'ont aucun changement dans leur angle de position. Cet angle va en augmentant dans le premier & le troisième quart d'ascension droite; j'en ai donné une table (Tom. I, pag. 488).

### DIMINUTION DE L'OBLIQUITÉ DE L'ÉCLIPTIQUE.

2715. Les formules précédentes (2708) suffisoient pour trouver le changement des étoiles en ascension droite & en déclinaison, s'il étoit exactement vrai que la latitude fût invariable, & que tout le changement vînt du mouvement de l'équateur & de celui des points équinoxiaux le long de l'écliptique. Hipparque, Ptolomée, & tous les astronomes qui suivirent jusqu'au temps de Tycho, supposèrent en effet que les latitudes des étoiles fixes étoient constantes, & que leur mouvement de précession se faisoit parallèlement à l'écliptique; mais

Tycho ayant observé avec plus de soin que personne, les positions d'une multitude d'étoiles, apperçut que les étoiles voisines des solstices avoient changé de latitude; en effet, on voit que toutes les latitudes méridionales des étoiles situées vers trois signes de longitude, sont devenues plus petites, & les latitudes boréales plus grandes, au moins d'un tiers de degré (Tycho, *Progymn. pag. 233*).

Toutes les  
étoiles chan-  
gent de lati-  
tudes,

2716. J'ai fait voir en calculant plus exactement les observations primitives rapportées dans l'Almageste de Ptolomée, & qui servirent autrefois à déterminer les latitudes des étoiles fixes, qu'en effet les points de l'écliptique situés vers le solstice d'été, se sont rapprochés de l'équateur & des étoiles méridionales (*Mém. acad. 1758, pag. 347*). On verra bientôt la cause de ce mouvement (2728); en voici encore d'autres preuves tirées des observations multipliées qu'on a faites de l'obliquité de l'écliptique.

2717. Ptolomée nous dit expressément (*Almag. I. 9*), qu'il a trouvé pendant plusieurs années, la distance des tropiques de 47 degrés avec deux tiers d'une portion majeure (ou d'un degré), & trois quarts d'une portion mineure (ou d'une minute), c'est-à-dire,  $47^{\circ} 40' 45''$  dont la moitié est  $23^{\circ} 50' 22''$ ; ainsi, ajoute-t-il, c'est à peu-près la même partie qu'a trouvé Eratosthène, & dont Hipparque s'est servi, car la distance des points solsticiaux, est, selon eux,  $\frac{2}{3}$  de la circonférence du méridien.

Preuve tirée  
de Ptolomée,  
& des anciens.

2718. Ptolomée dit ailleurs que la hauteur du gnomon étant de 60 parties, la longueur de l'ombre à Marseille étoit de 20 parties &  $\frac{1}{60}$ . On attribue à Pythæas cette détermination que rapporte Ptolomée. Voy. Strabon, L. II. Gassendi, *Tom. IV, pag. 523, in vita Peir. & epist. ad Vendel. de prop. gnom. ad solstitium*. M. de Louville, *Hist. acad. 1716, pag. 48. Acta erudit. jul. 1719. Vaidler, hist. astron. pag. 120*. Quoi qu'il en soit, ces deux témoignages s'accordent à donner l'obliquité de l'écliptique 200 ans avant J. C. de  $23^{\circ} 51'$  ou  $52'$ .

Le P. Riccioli s'efforce de prouver que l'obliquité de l'écliptique n'étoit cependant que de  $23^{\circ}\frac{1}{2}$  dans ce temps-là (*Astr. ref. pag. 19. Geogr. ref. l. 7. c. 28*) ; mais on ne sauroit avoir actuellement de preuves assez démonstratives pour contredire quatre témoignages ou quatre observations anciennes, faites par Eratosthène, Hipparque, Pythéas & Ptolomée ; cette observation étoit d'ailleurs facile à faire, on ne doit pas présumer que Ptolomée s'y soit trompé pendant plusieurs années.

Il est vrai qu'en consultant Pappus d'Alexandrie (*Collec. l. VI, prop. 35, Riccioli, Astron. ref. pag. 20*), qui vivoit 200 ans après Ptolomée, on trouve à peu près l'obliquité de l'écliptique telle qu'elle est aujourd'hui, mais c'est en admettant l'interprétation de Commandinus, à laquelle Vendelinus n'a pas cru devoir déferer, d'ailleurs Pappus n'étoit pas autant observateur qu'Eratosthène, Hipparque & Ptolomée, & son but n'étoit pas de donner une détermination astronomique de l'obliquité de l'écliptique.

Des Chinois. 2719. Dès l'an 106 avant J. C. les astronomes Chinois donnent comme un principe connu que l'obliquité de l'écliptique est de  $24^{\circ}$  Chinois, qui font  $23^{\circ} 39' 18''$  (P. Gaubil II. 114), cette quantité est moins considérable que celle des Grecs, mais elle prouve cependant aussi une diminution dans l'obliquité de l'écliptique.

Des Arabes. 2720. Albategnius qui vivoit vers l'an 880 (*De sci. stell. c. 4, pag. 14. edit. 1645*), dit qu'il a observé avec le plus grand soin la plus grande distance du soleil au zénit dans le méridien, à Aracte, de  $59^{\circ} 36'$ , & la plus petite de  $12^{\circ} 26'$ , d'où il conclut la distance des tropiques  $47^{\circ} 10'$ , la hauteur du pôle d'Aracte  $36^{\circ}$ , & l'obliquité de l'écliptique  $23^{\circ} 35'$ . Cette observation fut faite avec une alidade très-longue & très-bien vérifiée ; il faut encore y ajouter  $40''$  pour l'effet de la réfraction moins la parallaxe, & l'on aura  $23^{\circ} 35'\frac{2}{3}$ , pour l'obliquité de l'écliptique vers l'an 900 (385), ce qui suppose une diminution de  $7' 20''$ , ou de  $50''$  par

siècle ; & quoique cette diminution ne soit pas si considérable que celle qu'on déduit des observations de Ptolomée, cependant il est toujours évident que le témoignage d'Albategnius s'oppose à l'interprétation du P. Riccioli, & au système de ceux qui croient l'obliquité constante ; mais le P. Riccioli croit qu'Albategnius a pu fort bien se tromper de 5 minutes.

2721. Par les observations de Co-cheou-King, on trouve pour 1278,  $23^{\circ} 32' 12''$  (418).

Par celles de Waltherus faites à Nuremberg, M. de la Caille trouve pour l'an 1490,  $23^{\circ} 29' 47''$  (*Mém. ac.* 1757, pag. 114). De Waltherus.

2722. Suivant Tycho-Brahé (*Progymn. pag. 17*, 28, *epist. pag. 10*), l'obliquité de l'écliptique en 1587, étoit de  $23^{\circ} 31' 30''$ ; le P. Riccioli la réduit à  $23^{\circ} 30' 24''$  en corrigeant la réfraction & la parallaxe. Le 12 Juin 1590, Tycho donna l'attention la plus particulière aux observations solsticiales ; la hauteur méridienne du soleil fut prise quatre fois, les instrumens avoient été exactement vérifiés avant l'observation, *ad amussim corrigebantur*, on fut occupé depuis cinq heures du matin jusqu'à 8 heures du soir à observer les déclinaisons du soleil ; & s'il y a des observations solsticiales qui aient été faites avec attention, & qui méritent confiance, ce sont celles de 1590 ; en calculant des observations, je trouve  $23^{\circ} 29' 52''$  ; celles des autres années donnent un peu moins, mais toutes cependant indiquent une diminution depuis Tycho jusqu'à nous. De Tycho.

2723. Le P. Riccioli lui-même se détermine pour  $23^{\circ} 30' 20''$ , *ob recentissimas & majoribus instrumentis peractas observationes.* (*Astron. reform. pag. 121* ; il rapporte cette détermination à l'année 1646 ; il ajoute seulement qu'on pourroit y changer  $10''$  sans risque ; ce qui prouve qu'il ne pensoit pas à une incertitude de  $2'$  : Boulliaud dans le même temps trouvoit à Paris, l'obliquité de l'écliptique de  $23^{\circ} 32'$  (*Astron. philolaica, pag. 229*). Par plusieurs observations d'Hévélius faites depuis 1652 jusqu'en 1671, je trouve  $23^{\circ} 29' 10''$ . De Riccioli & Boulliaud.

Par les observations du  
dernier siècle.

2724. M. Cassini le fils, par les observations de Richer faites à Cayenne en 1672, trouva l'obliquité de  $23^{\circ} 28' 54''$  (*Elem. d'astron. pag. 112*), & par celles de M. Cassini son pere, faites au gnomon de S. Pétrone,  $23^{\circ} 29' 0''$ ; c'est ainsi qu'il l'employa lui-même dans ses tables. Nous voyons aussi que Flamsteed en 1689 & 1690, trouva par des observations répétées l'obliquité de l'écliptique de  $23^{\circ} 28' 56''$  (*Proleg. pag. 114*), il en faut ôter  $8''$  (2861), & l'on aura l'obliquité moyenne pour 1690,  $23^{\circ} 28' 48''$ , quantité plus grande de  $30''$  que celle de tous les observateurs modernes.

Il est vrai que dans le même endroit Flamsteed examine des observations de Waltherus, de Tycho, de Riccioli, d'Hévelius, de Mouton, de Richer, de la Hire & de Margraf; & il trouve toujours le même résultat par les plus voisines, comme par les plus éloignées; mais le système qu'avoit embrassé Flamsteed, lui faisoit peut-être donner la préférence aux observations qui lui étoient favorables.

Par celles de  
ce siècle.

2725. M. Bianchini en 1703, trouva l'obliquité de l'écliptique  $23^{\circ} 28' 35''$ , (*de gnomone Clementina*). M. Horrebow par les observations de Romer, faites en 1709, trouve l'obliquité de l'écliptique  $23^{\circ} 28' 47''$  (*Astrum astronomia, pag. 33*); c'est la même à  $1''$  près, que celle que M. de la Caille a trouvée en supposant une diminution de  $44''$  par siècle.

Obliquité en  
1750,  $23^{\circ} 28' 19''$ .

2726. L'obliquité de l'écliptique a été déterminée par M. de la Caille de  $23^{\circ} 28' 19''$  pour le commencement de 1750. J'ai appris que M. Bradley avoit trouvé la même quantité avec le grand quart-de-cercle mural de 8 pieds de rayon, qui est à l'observatoire Royal de Greenwich. M. de la Condamine par ses observations faites à Quito en 1736 & 1737, avec un secteur de 12 pieds, la trouva de  $23^{\circ} 28' 24''$ ; cette quantité réduite à l'obliquité moyenne de 1750, donne  $8''$  seulement de plus que n'ont trouvé M. de la Caille & M. Bradley. M. de Thury, dans un Mémoire lu à l'académie sur l'obliquité de l'écliptique (*Février 1764*),



conclut de ses observations que l'obliquité apparente de l'écliptique en 1743, étoit de  $23^{\circ} 28' 35''$ , quantité qui ne diffère que d'une seconde du résultat des observations de M. le Monnier, & qui surpasse seulement de  $7''$  celui de M. de la Caille. Si l'on admettoit l'observation du Pérou, avec celles de M. de Thury & de M. le Monnier, on concilieroit peut-être la suite des autres observations mieux qu'en adoptant, comme je l'ai fait, la détermination de M. Bradley & de M. de la Caille.

2727. Par le moyen de l'obliquité moyenne pour 1750, M. de la Caille avoit cherché l'obliquité de l'écliptique pour chaque année, en ôtant la diminution annuelle à raison de  $44''$  par siècle, & ajoutoit l'inégalité périodique (2861); mais l'augmentation m'a semblé devoir être plus considérable; j'ai donc refait cette table, comme on le verra dans les tables du soleil qui sont jointes à cet ouvrage, & les nombres qui y sont s'accordent assez bien avec les déterminations précédentes, & avec la théorie (2746). Il est donc prouvé par les observations de l'obliquité de l'écliptique faites dans tous les temps, aussi bien que par les latitudes des étoiles rapportées dans Ptolomée, que l'écliptique se rapproche de l'équateur; il s'agit actuellement d'en donner une explication physique, & conforme aux principes de l'attraction.

M. Euler est le premier qui ait fait voir que l'attraction des planètes sur la terre devoit produire cet effet, (*Inégalités de Saturne*, pag. 79. *Mémoires de Berlin*, T. X. 1754). J'en ai donné fort au long les démonstrations & les calculs (*Mémoires de 1758*, pag. 252 & 339, 1761, pag. 399; j'en donnerai ici les principes avec les résultats.

*Explication physique de la diminution de l'obliquité de l'écliptique, & du changement de latitude des étoiles.*

Effets de  
l'attraction  
de Vénus.

Fig. 224.

2728. TOUTES les fois que deux planètes tournent autour du même centre, dans le même sens, mais dans des plans différens, chacune de ces planètes fait rétrograder le nœud de l'autre planète (3516); nous avons déjà expliqué ce mouvement (1348), à l'occasion des planètes qui agissent les unes sur les autres; voyons ce qui doit avoir lieu sur la terre en conséquence de ce déplacement, & prenons pour exemple l'attraction de Vénus sur la terre. Soit  $EDQ$  l'équateur, (fig. 224),  $EGN$  l'écliptique,  $NVQ$  l'orbite de Vénus; en sorte que la terre avance de  $E$  en  $N$  le long de l'écliptique, & Vénus de  $Q$  en  $N$  dans son orbite; l'attraction de Vénus sur le globe de la terre fait que le point  $N$  rétrograde en  $V$ , c'est-à-dire, que le nœud de l'écliptique sur l'orbite de Vénus avance dans un sens contraire au mouvement de la terre, & cette quantité est de  $12''\frac{1}{3}$  par an (2737), en supposant la masse de Vénus égale à celle de la terre (2158).

Trouver le  
changement  
des points  
équinoxiaux.

L'écliptique changera donc de situation, & passera de  $EN$  en  $DV$ , sans que l'inclinaison en soit affectée, c'est-à-dire, de telle sorte que l'angle  $V$  soit encore égal à l'angle  $N$ , mais que la rétrogradation  $NV$  du nœud de l'écliptique sur l'orbite de Vénus, soit de  $12''$  par an. Or l'équateur  $EQ$  ne change point de situation par l'effet dont il s'agit, parce que la rotation de la terre est indépendante de son mouvement annuel, & que l'attraction des planètes n'est pas sensible sur l'axe de notre sphéroïde; ainsi l'écliptique  $EN$  au lieu de couper l'équateur au point  $E$ , le coupera en  $D$  l'année suivante, le point équinoxial  $E$  avancera de la quantité  $ED$ , le long de l'équateur, & ce déplacement de l'écliptique produira avec le temps des changemens dans  
les

les longitudes & les latitudes de toutes les étoiles, & dans les inclinaisons des orbites planétaires.

2729. Dans un triangle  $ENQ$ , dont les angles  $Q$  &  $N$  sont constans, & dont le côté  $NQ$  varie de  $12''$ , le changement  $ED$  qui en résulte sur l'autre côté  $EQ$ , est égal à  $\frac{12'' \sin. N. \cos. EN.}{\sin. E}$  ( 3842 ). Si l'on abaisse une perpendiculaire  $DG$  sur l'écliptique  $EGN$ , la petite quantité  $EG$  sera  $= ED. \cos. E$ ; donc multipliant la valeur précédente de  $ED$  par  $\cos. E$ , l'on aura  $12'' \sin. N. \cos. EN. \cotang. E$  pour la quantité  $EG$ , dont le point équinoxial a changé par l'action de Vénus, le long de l'écliptique. Quant au changement que reçoit, par son autre extrémité  $V$ , l'arc de l'écliptique  $DV$ , il est inutile d'y avoir égard, il n'affecte que la longitude du nœud  $V$  de Vénus sur l'écliptique, mais il ne change rien aux longitudes des autres astres qui se comptent du point équinoxial  $E$  ou  $D$ ; ( Voyez encore 2735 ).

2730. Sans le secours des formules différentielles on trouveroit aussi la quantité  $EG$ , en résolvant séparément les triangles sphériques  $QEN$ ,  $QDV$ ; on connoît l'angle  $E$  & l'angle  $N$  avec le côté  $EN$ , on trouveroit  $EQ$ , & diminuant  $QN$  de  $12''$  pour avoir  $QV$ , on trouveroit  $QD$ , & par conséquent la quantité  $ED$ . On verra ci-après une autre méthode appliquée à des exemples ( 2743 ).

2731. Nous pouvons encore trouver le même résultat en considérant les poles des trois cercles dont nous venons d'examiner les circonférences. Soit  $E$  ( *fig.* 225 ), le pole de l'écliptique,  $P$  le pole de l'équateur ou le pole du monde,  $V$  le pole de l'orbite de Vénus; le mouvement de l'écliptique sur l'orbite de Vénus produit un mouvement du pole de l'écliptique autour du pole de l'orbe de Vénus ( 1353 ), & j'ai fait voir qu'il revient au même de dire que l'écliptique rétrograde de  $12''$  sur l'orbite de Vénus, ou que le pole de l'écliptique rétrograde autour du pole de l'orbite d'une quantité

Autre  
méthode.  
*Fig.* 225a

*Fig. 225.*  $EM$  qui vaut  $12''$ , sur la circonférence du petit cercle  $EMN$ , dont le rayon  $EV$  est la distance des poles de l'écliptique & de l'orbite de Vénus.

2732. Dans le triangle sphérique  $PVE$  l'on a deux côtés  $PV$  &  $VE$  constans, tandis que tout le reste varie par le mouvement du pole  $E$  dans la circonférence  $EMN$ ; delà il suit (3087) que la variation de l'angle  $P$  ou le petit angle  $EPM = \frac{MY}{\sin. PE} = \frac{EM \sin. XEM}{\sin. PE} = \frac{12'' \sin. EV \sin. XEM}{\sin. PE} = \frac{12'' \sin. EV \cos. PEV}{\sin. PE}$ ; mais dans le triangle  $PBE$  la variation de  $P$  est à celle de  $E$ , comme le rayon est au cosinus de  $PE$  (3753), donc la variation de l'angle  $PEB$  qui est la même que celle de l'angle  $PEV = 12'' \sin. EV \cos. PEV \cotang. PE$ ; ce qui revient au même que la formule précédente (2729); car  $EM = 12''$ ,  $EV$  est égal à l'inclinaison de l'orbe de Vénus,  $PE$  est égal à l'obliquité de l'écliptique, & l'angle  $PEV$  égal à la longitude du nœud de Vénus, puisque c'est l'angle formé au pole de l'écliptique  $E$  entre le colure des solstices  $EP$  qui est à  $90^\circ$  des équinoxes, & le cercle  $EV$  qui passe par les poles de l'orbe de Vénus, & qui est à  $90^\circ$  de son nœud. Ce changement de l'angle  $PEB$  est la quantité dont le colure des solstices  $EP$  change de place en prenant la situation nouvelle  $MP$ , & par conséquent le changement du colure des équinoxes, qui est toujours à angles droits avec celui des solstices; c'est donc aussi la quantité dont le point équinoxial s'éloigne de la ligne immobile  $EMBC$ ; car ce point équinoxial étant toujours à l'extrémité d'un arc de  $90^\circ$  perpendiculaire à  $EP$ , & dont la position change autant que la position du colure  $PE$ , toutes les longitudes célestes qui se comptent depuis le colure des équinoxes changeront de cette quantité, qui sera par conséquent une partie de la précession des équinoxes.

Changement  
de l'obliquité  
de l'éclipti-  
que.

2733. On trouveroit aussi dans le triangle  $PEV$  la variation du côté  $PE$  égale à  $12'' \sin. VE \sin. PEV$ ; c'est la quantité dont l'obliquité de l'écliptique  $PE$  varie

chaque année par l'action de Vénus ; si l'on substitue à la place de  $\angle E$  sa valeur  $3^{\circ} 23'$ , & à la place de l'angle  $E$ ,  $74^{\circ} 24'$ , longitude du nœud de Vénus en 1750, on trouvera  $0'' 7$ , ce qui fait  $7''$  en dix ans, dont l'obliquité de l'écliptique diminue par l'action seule de Vénus.

2734. En faisant la même substitution dans l'autre formule (2732), qui exprime le changement de l'angle  $E$ , l'on aura  $12''$  sin.  $3^{\circ}$  cof.  $74^{\circ}$  cot.  $23^{\circ} \frac{1}{2} = 0'' 45$  pour la quantité dont l'angle  $E$  (fig. 225), ou le point  $D$  (fig. 224), varient chaque année par l'action de Vénus, c'est-à-dire, que le changement de la précession de l'équinoxe est de  $45''$  par siècle, ou de  $4'' \frac{1}{2}$  en dix ans par l'action seule de Vénus. Nous verrons bientôt une autre manière de trouver les mêmes résultats (2743).

2735. Nous pouvons aussi calculer par les mêmes principes, la quantité dont les longitudes & les latitudes des étoiles fixes varient par ce déplacement de l'écliptique. Nous avons démontré (2703, 2708), que le pôle de l'équateur tournant autour du pôle de l'écliptique, l'inégalité des positions des astres le long de l'équateur étoit égale à  $L$  sin.  $23^{\circ}$  sin. asc. dr. tang. décl. c'est-à-dire, qu'en général l'inégalité des positions comptées sur le cercle tournant est égale au mouvement du pôle tournant, multiplié par le sinus de la distance des deux pôles ; par le sinus de la distance de l'étoile au nœud des deux cercles, mesurée le long du cercle tournant, & par la tangente de la distance au cercle tournant. Si nous appliquons ce théorème au mouvement du pôle de l'écliptique autour du pôle de Vénus, nous aurons pour le changement de longitude qui en résulte chaque année sur une étoile,  $12''$  multipliées par le sinus de l'inclinaison de Vénus, par le sinus de la distance de l'étoile au nœud de Vénus, mesurée le long de l'écliptique, & par la tangente de la latitude de l'étoile.

Changement  
de la longitu-  
de d'une étoile  
quelconque.

Je ne considère point ici la première partie de la formule (2702), c'est-à-dire,  $L$  cof.  $23^{\circ} \frac{1}{2}$ , parce qu'elle exprime dans le cas dont il s'agit ici, un mouvement commun à tout le ciel, aux étoiles & aux points équi-

# 148 ASTRONOMIE, LIV. XVI.

noxiaux, en sorte que la distance d'une étoile à l'équinoxe, ou sa longitude, n'en est point affectée; aussi les longitudes des étoiles ne sont-elles que très-peu changées par ce mouvement de l'écliptique.

2736. Le changement de déclinaison des étoiles; *L* sin.  $23^{\circ}$  cos. asc. dr. (2710), nous apprend que quand le pôle de l'équateur tourne autour du pôle de l'écliptique, le changement qu'éprouve la distance d'une étoile à l'équateur ou au pôle tournant, est égal au mouvement de ce pôle, multiplié par le sinus de la distance des deux pôles, & par le cosinus de la distance d'une étoile à l'intersection des deux cercles, mesurée le long du cercle tournant. Cette expression, transportée au cas dont il s'agit, fait voir que si le pôle de l'écliptique tourne autour du pôle de l'orbe de Vénus, le changement qu'éprouve la distance d'une étoile à l'écliptique, ou sa latitude, est égale au mouvement de l'écliptique multiplié par le sinus de l'inclinaison de l'orbite de Vénus, & par le cosinus de la distance de l'étoile au nœud de Vénus mesurée le long de l'écliptique.

Changement  
de la latitude.

Nommons *D* la distance d'une étoile au nœud ascendant d'une planète, ou la longitude de l'étoile moins celle du nœud de la planète; *I* l'inclinaison de l'orbite de la planète, *L* la latitude de l'étoile, *M* le mouvement du pôle de l'écliptique autour du pôle de la planète, ou le changement *NV* (fig. 224) du nœud de la planète le long de son orbite; on aura *M* sin. *I* sin. *D* tang. *L* pour le changement de l'étoile en longitude, & *M* sin. *I* cos. *D* pour le changement en latitude; ces formules sont les mêmes que celles qui ont été démontrées pour la précession (2703, 2710).

2737. La formule du mouvement des nœuds (3522) donne le mouvement annuel de l'écliptique sur l'orbite de chaque planète, comme dans la table ci-jointe; c'est ce mouvement annuel que j'appelle *M* dans les formules précédentes.

Mouvement  
de l'écliptique  
sur chaque or-  
bite,

PLANETES.	Déplacement de l'écliptiq.
Saturne,	0'' 378
Jupiter,	6, 924
Mars,	0, 094
Vénus,	12, 306
Mercuré,	0, 047

La quantité  $D$ , ou la distance d'une étoile au nœud d'une planète est variable à cause du mouvement des nœuds de chaque planète (1347), & celui des étoiles en longitude (917); mais à cause de la lenteur de ces mouvemens & de la petitesse des quantités que nous avons à déterminer, on peut supposer la distance  $D$  invariable dans l'espace d'un siècle. On prendra le lieu du du nœud de chaque planète pour 1750. (1347), on le retranchera de la longitude d'une étoile en 1750 pour avoir  $D$ ; on prendra l'inclinaison (1376), égale à  $I$ , la valeur de  $M$  est marquée dans la table précédente, ainsi il ne manquera rien pour évaluer les deux formules.

Par exemple, l'action de Jupiter donne  $6'' 924 = M$ , son inclinaison est  $1^{\circ} 19' = I$ ; donc  $M \sin. I = 0'' 159$ , son nœud est à  $3^{\circ} 8'$  de longitude, donc le changement de latitude  $M \sin. I \cos. D = 0'' 159$ ,  $\cos. (\text{longit.} - 3^{\circ} 8')$ .

2738. On peut donner à cette expression une forme plus commode, en considérant que le cosinus de la différence de deux arcs est égal au produit des cosinus ajouté avec celui des sinus (3620); or le cosinus de  $3^{\circ} 8'$  est égal à celui de  $82^{\circ}$ , pris négativement; on aura donc  $0'' 159 \cos. (\text{longit.} - 3^{\circ} 8') = - 0'' 159 \cos. 82^{\circ} \cos. \text{long.} + 0'' 159 \sin. 82^{\circ} \sin. \text{long.} = 0'' 157 \sin. \text{longit.} - 0'' 022 \cos. \text{longit.}$

2739. En employant de même les nœuds & les inclinaisons de chacune des autres planètes, dans l'évaluation de cette formule,  $M \sin. I \cos. D$ , & multipliant par 100 le mouvement annuel, on a le mouvement séculaire des étoiles en latitude, par l'action de chaque planète, de la manière suivante :

Saturne ,	$1'' 54$	$\sin. \text{longit.} - 0'' 60$	$\cos. \text{long. étoile.}$	Quantité du mouvement en latitude.
Jupiter ,	$15,75$	$- 2,21$		
Mars ,	$0,23$	$+ 0,20$		
Vénus ,	$70,19$	$+ 12,60$		
Mercure ,	$0,40$	$+ 0,40$		

TOTAL  $+1' 28'' 11$   $\sin. \text{longit.} + 17'' 39$   $\cos. \text{longit.}$

Remarque  
sur les sinus.

C'est le mouvement en latitude pour ce siècle-ci. On doit se souvenir dans l'application de ces formules, que les sinus changent de signes après  $180^\circ$ , que les cosinus changent entre  $90^\circ$  &  $270^\circ$  (3604), & que les signes changent aussi quand les latitudes des étoiles sont méridionales.

Mouvement  
27 siècle plu-  
côt.

2740. EXEMPLE. Sirius a  $3^\circ 10' 38''$  de longitude; multipliant  $88'' 11$  par le sinus de  $79^\circ 22'$ , on a  $1' 26'' 60$ , & multipliant  $17'' 39$  par le cosinus de  $79^\circ 22'$ , on trouve  $3'' 21$ ; la différence est  $1' 23'' 39$ , diminution séculaire de la latitude de Sirius dans ce siècle-ci. Il est nécessaire de connoître aussi ces mêmes quantités pour des siècles plus éloignés, & pour cela on doit à la place de  $3^\circ 8'$  employer le nœud de Jupiter, calculé pour différens siècles, au moyen du mouvement annuel (1347); c'est par-là que j'ai trouvé pour le changement de latitude dans le premier siècle de notre Ère,  $1' 20'' 5$ . sin. longit.  $+ 41'' 8$ . cos. long. Cette quantité est différente de celle qu'on vient de trouver pour ce siècle-ci; mais en prenant un milieu entre les deux quantités, on aura, à très-peu-près le changement séculaire des étoiles en latitude, depuis le temps de Ptolomée jusqu'au nôtre (*Mém. acad.* 1761, pag. 408).

2741. Les mêmes nombres serviront à trouver le mouvement séculaire de la longitude des étoiles fixes, *M. sin. I. sin. D. tang. L* (2736), car il suffit de changer les mots de *sinus* & de *cosinus de la longitude*, & de multiplier le tout par la tangente de la latitude de l'étoile.

Mouvement  
en longitude.

( $- 1' 28'' 1$ . cos. long.  $+ 17'' 4$ . sin. long.) tang. latit. entre 1700 & 1800.

( $- 1' 20'' 5$ . cos. long.  $+ 41'' 8$ . sin. long.) tang. latit. pour le 1<sup>er</sup> siècle.

On doit faire attention que la tangente de la latitude change de signe quand l'étoile est au midi; ainsi les deux quantités précédentes qui sont  $-$  &  $+$  deviendront  $+$  &  $-$  pour les étoiles dont la latitude est méridionale. Il faut aussi observer les changemens de signes



des cosinus & des sinus (3604) ; ainsi pour Sirius, dont la longitude est  $3^s 10^o 38'$  & la latitude  $39^o 33'$  méridionale, on aura  $- 1' 28''$  cos. long.  $= + 16'' 26$ , parce que le cosinus de  $3^s 10^o$  change de signe, &  $+ 17'' 4$  sin. long.  $= + 17'' 09$ , la somme est  $+ 33'' 35$ , qui multipliée par la tangente de  $39^o 33'$  qui est négative, donne  $- 29'' 19$ , c'est-à-dire, que la longitude de Sirius diminue de  $29''$  dans ce siècle-ci par l'attraction des planètes sur la terre, indépendamment de la cause générale de la précession (2701).

2742. Le mouvement en longitude, & le mouvement en latitude que je viens de déterminer par les formules précédentes, sont d'accord avec les observations, comme on le voit en comparant les positions qui sont dans le catalogue de Ptolomée, avec celles qu'on observe aujourd'hui : on voit, par exemple, que la première étoile de la constellation du Cocher qui dans Ptolomée est à  $30^o$  de latitude, se trouve à  $30^o 49'$  dans le catalogue de Flamsteed ; au contraire la quatorzième étoile des Gémeaux qui est au midi de l'écliptique, a dans Ptolomée  $1^o 30'$ , & seulement  $0^o 56'$  dans Flamsteed. Il en est de même de la latitude de presque toutes les étoiles, (Mém. acad. 1758, pag. 342). Les différences de longitude ont également changé d'une manière conforme à cette théorie. Entre la 27<sup>e</sup>. étoile de la grande Ourse, & la 10<sup>e</sup>. du Dragon dont la latitude est  $81^o 48'$ , on trouve aujourd'hui une différence de longitude moindre de  $1^o 21'$ , qu'elle n'est dans le catalogue de Ptolomée, parce qu'une des étoiles a augmenté de longitude, tandis que l'autre a diminué. Ces différences ne peuvent être sensibles que pour les étoiles qui ont une très-grande latitude ; on voit que la formule est multipliée par la tangente de la latitude, ce qui la rend plus petite quand la latitude est au-dessous de  $45^o$ , & plus grande quand la latitude de l'étoile surpasse  $45^o$ .

Tout cela est d'accord avec les observations.

2743. Dans la formule générale de la précession des équinoxes, il y avoit une partie  $L. \cos. 23^{\circ} \frac{1}{2}$  com-

Fig. 2256

mune à tout le ciel ; elle seroit ici égale à  $M. \cos. EV$ , cette partie indique seulement que la ligne  $EV$  est plus avancée que la ligne  $MV$ , de la quantité  $M. \cos. EV$ , c'est le mouvement du nœud de la planète ou du pôle  $E$ , rapporté sur l'écliptique. Si l'on tire un arc de cercle  $EMBC$  perpendiculaire à  $EV$ , & sensiblement confondu avec le petit arc  $EM$ , ce sera le cercle de latitude qui passe par le nœud de l'orbite de Vénus. Le changement de longitude d'une étoile  $S$ , trouvé par les formules précédentes (2741), est la différence entre l'angle  $SEC$ , & l'angle  $SMC$  ; c'est la variation de l'angle  $E$  dans le triangle  $SCE$ , dont le côté  $SC$  & l'angle  $C$  sont constans ; cette variation =  $EM. \sin. E. \cotang. ES.$  (3764) ; mais ce changement de longitude de l'étoile  $S$  par rapport à la ligne  $EMC$ , est indépendant de celui de  $PE$ , ou du colure des solstices qui passe de la situation  $PE$  dans la situation  $PM$  ; l'angle  $PEB$ , se changeant en un angle  $PMB$  ; c'est la variation de l'angle  $E$  dans le triangle sphérique  $PBE$ , dont  $PB$  & l'angle  $B$  sont constans ; ainsi cette quantité est  $EM. \sin. PEB. \cot. EP$  ; elle est commune à tous les astres (2732).

2744. On peut trouver le changement de l'angle  $PEB$ , ou le changement de longitude commun à tous les points du ciel, de la même manière qu'on trouveroit la variation en longitude d'une étoile qui seroit en  $P$  ; c'est-à-dire, que dans les formules des deux articles précédens, on peut considérer le pôle de l'équateur comme une étoile dont la longitude seroit de  $90^\circ$  ; & la latitude  $66^\circ 32'$ , & trouver par les mêmes formules (2740), combien il change par rapport au pôle mobile de l'écliptique, soit en longitude, soit en latitude ; on aura  $1' 28''$ , pour la variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique.

Obliquité  
diminuée de  
 $1' 28''$  par siècle.

Précession  
augmentée de  
 $40''$ .

Le changement en longitude se trouve par-là de  $17''$  tang.  $66^\circ = 40''$  ; c'est l'inégalité de la précession des équinoxes que l'action des planètes produit pendant ce siècle-ci, en déplaçant l'écliptique ou l'orbite de la terre,

& cela est d'accord avec la formule de l'art. 2729 ; li donc la précession observée est de  $1^{\circ} 23' 50''$  entre 1700 & 1800 (917) ; il y a  $40''$  pour l'action de toutes les planètes , &  $1^{\circ} 23' 10''$  ou  $49'' 9$  par année pour l'action du soleil & de la lune sur l'équateur terrestre , qui est la cause principale de la précession des équinoxes (3561). On trouvera de même pour le premier siècle de notre Ere que la précession augmentoit de  $1' 26'' 3$  , & distribuant cette augmentation sur les 18 siècles , on a pour la précession totale  $1^{\circ} 24' 36'' 3$  depuis l'an 0 jusqu'à l'année 100 de J. C. : en conséquence il est aisé de calculer une table pour les 18 siècles.

2745. La période entière de la précession des équinoxes , la grande année ou le retour des étoiles aux mêmes longitudes , en supposant la précession moyenne de  $1^{\circ} 23' 10''$  par siècle est de 25972 années Juliennes ; mais on voit par ce qui précède que les attractions des planètes diversifiées de tant de façons différentes , rendent cette période fort inégale , & fort incertaine.

2746. On trouvera de même que l'obliquité de l'écliptique diminuait de  $1' 20'' 5$  dans le premier siècle ; ainsi prenant un milieu , dans l'espace de 1900 ans , ou depuis Hipparque jusqu'à nous , on voit que la précession des équinoxes a augmenté de  $21'$  par l'attraction des planètes , & que l'obliquité de l'écliptique a diminué de  $26' \frac{1}{3}$  , ce qui donne  $23^{\circ} 55'$  pour l'obliquité au temps d'Hipparque. Ces calculs supposent la masse de Vénus égale à celle de la terre , & celle de la terre telle que Newton l'a trouvée (3405). La conformité de cette théorie avec les observations d'Hipparque , est un nouveau degré de confirmation , soit pour les observations qui prouvent la diminution de l'obliquité de l'écliptique , soit pour la théorie précédente , qui fait voir la cause de cette diminution ; c'est d'après ces résultats que j'ai mis à la fin du catalogue des étoiles , la table des variations des étoiles en longitude & en latitude pour un siècle , calculée par M. de Chaligny.

Grande  
année.

Obliquité de  
 $23^{\circ} 55'$  pour  
le tems d'Hip-  
parque.

DU MOUVEMENT PARTICULIER  
DE QUELQUES ÉTOILES.

2747. LES mouvemens généraux que nous venons d'expliquer affectent toutes les étoiles; mais il y en a quelques-unes qui forment exception à ces règles, & qui ont eu un mouvement propre, un dérangement physique dont on ignore la cause, & qu'on tache de déterminer par observation.

Les étoiles  
sont immobi-  
les.

On peut dire cependant qu'en général les étoiles sont immobiles, & il n'y en a qu'un petit nombre auxquelles on ait apperçu de semblables dérangemens. Ce qui prouve assez l'immobilité des étoiles, ce sont les allignemens observés autrefois & qu'on retrouve constamment les mêmes (Ptolomée, *Alm. l. VII, c. 1*. Tycho, *Picgym. t. I, par. 234*), Riccioli rapporte plus de 25 exemples d'étoiles, qui prises 3 à 3 paroissent exactement en ligne droite (*Astron. ref. pag. 203*), telles sont la Chèvre avec le pied précédent du Cocher & Aldebaran, les deux têtes des Gémeaux avec le cou de l'Hydre; le bassin austral de la Balance avec Arcturus & la moyenne de la queue de la grande Ourse; les deux étoiles boréales de la tête du Bélier & la Luifante au genou de Persée; celles qui avoient autrefois cette position rectiligne la conservent encore, du moins autant qu'on peut en juger à la vue; ainsi les étoiles sont à peu-près fixes, & les dérangemens dont il s'agit ici ne tombent que sur un petit nombre.

M. Halley  
remarque un  
mouvement  
propre.

2748. M. Halley en examinant les positions des étoiles qui sont dans le septième livre de l'Almageste, pour en déduire la précession des équinoxes apperçut que trois des principales étoiles, Aldebaran, Sirius & Arcturus avoient changé de latitude en un sens contraire au changement de toutes les autres, & contraire à ce qu'exige la diminution de l'obliquité de l'écliptique (*Phil. trans. 1718, n°. 355*). Suivant M. Halley, Aldebaran ou Palilicium devroit être 15' plus au nord

de l'écliptique, & il est 20' plus au sud que dans Ptolomée; Sirius devoit être 20' plus au nord (274<sup>1</sup>), & il est 22' plus au sud; Arcturus qui devoit avoir à peu-près la même latitude est 33' plus au midi; l'épaule orientale d'Orion est au contraire plus au nord d'un degré que suivant le catalogue de Ptolomée; on ne peut pas soupçonner des erreurs de copistes, dans toutes ces positions, parce que les déclinaisons rapportées dans d'autres endroits du livre s'accordent avec les longitudes inférées dans le catalogue; on ne peut avec vraisemblance attribuer cette différence à l'erreur des observations, parce qu'on voit celles d'Aristille & de Tymocharès d'accord avec celles d'Hipparque & de Ptolomée.

2749. M. Cassini ayant comparé ses observations avec celles de M. Richer, à Cayenne, trouve que depuis 1672 jusqu'en 1738, Arcturus s'étoit rapproché de l'écliptique de 2'; M. le Monnier a trouvé ce mouvement de 2' en 55 ans, ce qui fait 2' 30" en 66 ans: ce mouvement est encore prouvé par les observations de M. Bradley & de M. Cassini de Thury, (*Mém. acad.* 1755. *Philos. transf.* 1748, n°. 485); il y a près d'Arcturus une petite étoile, marquée *b* dans nos Cartes célestes, qui est très-propre à faire appercevoir le mouvement réel d'Arcturus; leur position respective a changé considérablement depuis le temps de Flamsteed, & le changement est tout entier en latitude.

Diminution  
de la latitude  
d'Arcturus.

2750. Suivant les observations de Flamsteed, la déclinaison d'Arcturus au commencement de 1690, étoit de 20° 49' 0", & suivant M. l'Abbé de la Caille, elle étoit au commencement de 1750 de 20° 29' 39", la différence est de 19' 21"; tandis qu'elle ne devoit être que de 17' 7" 2, suivant les loix connues de la précession des équinoxes; il y a donc 2' 13" 8 de plus, pour le mouvement propre de cette étoile en 60 ans, ou 22" 3 tous les dix ans. Voici le mouvement en déclinaison distribué de dix en dix ans avec son inégalité (2713), d'abord par le calcul, ensuite par l'observa-

tion, depuis 1690 jusqu'en 1750. Par le calcul, on trouve  $2' 50''$ , 7 ;  $2' 50''$ , 9 ;  $2' 51''$ , 1 ;  $2' 51''$ , 3 ;  $2' 51''$ , 5 ;  $2' 51''$ , 7 ; ce qui fait en total  $17' 7''$  2. Par l'observation, ce mouvement est de  $3' 13''$ , 0 ;  $3' 13''$ , 2 ;  $3' 13''$ , 4 ;  $3' 13''$ , 6 ;  $3' 13''$ , 8 ;  $3' 14''$ , 0 ; en tout  $19' 21''$ , pour le même intervalle de 60 ans.

Augmen-  
tation de la la-  
titude de Si-  
rius.

2751. Le changement de latitude n'est pas si sensible dans Sirius, du moins par les observations modernes ; M. Cassini ayant calculé les observations de Tycho a trouvé la latitude pour ce temps-là  $39^{\circ} 32' 10''$ . Flamsteed la trouva de  $39^{\circ} 32' 8''$  pour 1690. Par les observations de M. Richer faites en 1672, M. Cassini la trouva de  $39^{\circ} 31' 55''$ , tandis que lui-même vers 1738 l'a observée plus grande d'une minute, aussi bien que M. de la Caille qui trouve  $39^{\circ} 32' 58'' \frac{1}{2}$  pour 1750. Ainsi il n'y a guère qu'une minute d'augmentation depuis un siècle (Voyez *Mem. acad.* 1758, pag. 353) ; mais cette latitude auroit dû diminuer de  $1' 23''$ , par l'effet général (2740), dans cet intervalle de temps ; ainsi il y a un changement propre de plus de deux minutes dans le vrai lieu de Sirius, qui s'est avancé vers le midi.

2752. Il est difficile de déterminer les variations d'*Aldebaran*, qui jusqu'à présent ont paru fort irrégulières, comme je l'ai fait voir (*Mém.* 1758, pag. 344) ; sa latitude que nous trouvons de  $5^{\circ} 29' 0''$ , est de  $5^{\circ} 29' 50''$  dans le catalogue de Flamsteed. M. Cassini trouve par les observations de Tycho, que cette latitude en 1589, étoit de  $5^{\circ} 30' 23''$  (*Mém.* 1738, pag. 340) ; elle paroît donc avoir diminué, mais cette diminution devant être en effet de  $1' 28''$  par la théorie générale, elle n'indique pas de mouvement propre.

2753. Cependant M. de la Caille m'a dit, que dans le grand nombre de réductions qu'il avoit faites des ses observations sur *Aldebaran*, il avoit trouvé souvent des irrégularités de 15 à 20'' qu'il ne pouvoit attribuer qu'à des variations particulières à cette étoile ; Tycho-Brahé s'étonnoit aussi de la grande différence

qui se trouve entre les latitudes d'Aldebaran ; déduites des observations de Tymocharès, d'Hipparque & de Ptolomée : voyez ce que j'en ai dit dans les Mémoires de 1758, *pag.* 344 ; il me semble que ces variations d'Aldebaran sont très-irrégulières, mais qu'elles sont petites actuellement.

Irrégularités  
dans Aldebaran.

2754. M. Cassini trouve aussi des variations en latitude dans *Rigel*, l'épaule orientale d'Orion, Regulus, la Chèvre & l'Aigle ; la différence de latitude entre la Luifante de l'Aigle, & l'étoile  $\delta$  de la même constellation est plus grande de 36' qu'au temps de Ptolomée, & de 2 ou 3 minutes que suivant les observations de Tycho.

2755. M. Cassini ayant examiné aussi en 1758 le mouvement des étoiles en longitude a reconnu que depuis Flamsteed, c'est-à-dire, dans l'espace de 48 années, la Luifante de l'Aigle s'étoit éloignée de 48" en ascension droite de celle qui la précède, & s'étoit approchée de 73" de celle qui la suit ; par les observations de Tycho, on trouve ces différences de 4' 14", & de 2' pour 138 ans ; d'où il suit que ces étoiles, ou du moins deux d'entre elles, ont eu un mouvement particulier en ascension droite (*Mém. acad.* 1738).

Variations  
d'occident en  
orient.

2756. J'ai appris de M. Kæstner, Secrétaire de l'académie de Gottingen, qu'il y avoit un Mémoire de feu M. Mayer, déjà lu dans les assemblées de cette Société, sur le mouvement propre de quelques étoiles, & je ne doute pas qu'il n'y ait dans cet écrit des choses très-curieuses, mais il n'est pas encore imprimé.

2757. Nous ne pouvons attribuer la cause de ces variations dans les étoiles, qu'aux attractions des différens corps célestes, les uns sur les autres ; mais il se passera bien des siècles avant qu'on en connoisse la loi & la mesure ; les étoiles de la première grandeur qui sont probablement les plus proches de nous sont celles où ces variations sont plus sensibles, mais je ne doute pas qu'il n'y en ait de pareilles dans les autres étoiles. En attendant il me semble que ce doit être une raison

De la cause  
de ces chan-  
gemens.

pour les astronomes d'employer, quand ils le peuvent ; les étoiles de la troisième grandeur dans leurs recherches sur le mouvement des planètes, au lieu des étoiles les plus brillantes.

*DE LA PARALLAXE ANNUELLE  
des étoiles fixes.*

2758. QUOIQ'U'IL soit démontré actuellement que la parallaxe annuelle (1141) est absolument insensible & comme nulle dans les étoiles fixes (2778) ; j'ai cru qu'il étoit nécessaire de donner au moins une idée d'une question qu'on a traitée si souvent, & même en 1760 (2780) ; je démontrerai d'une manière plus simple qu'on ne l'a fait jusqu'ici la loi des variations qui devroient en résulter. Soit *S* le soleil (fig. 226), *AB* le diamètre du grand orbe que la terre décrit chaque année (1106), *A* le point où se trouve la terre au 1 Janvier, *B* le point où elle est au 1 Juillet, *E* une étoile qu'on apperçoit sur le rayon *AE* ; la ligne *AL* étant dans le plan de l'écliptique, & l'orbe de la terre étant conçu perpendiculaire au plan de la figure, en sorte qu'on ne le voye que sur son épaisseur, l'angle *EAB* est la latitude de l'étoile ; mais quand la terre sera en *B* l'étoile étant en opposition par rapport au soleil, elle paroîtra sur le rayon *BE* & sa latitude apparente sera l'angle *EBC* ; cette latitude *EBC* est plus grande que la première, & la différence est l'angle *AEB* ; enfin l'angle *AES* qui est sensiblement la moitié de *AEB* à cause de l'extrême petitesse de *AB* est la parallaxe annuelle en latitude.

Idée de la  
Parallaxe an-  
nuelle en la-  
titude.

2759. Si la distance *SE* de l'étoile fixe est deux cent mille fois plus grande que la distance *SA* du soleil à la terre, l'angle *AES* fera d'une seconde, & la latitude *EAS* d'une étoile en conjonction sera plus petite de 2" que la latitude *EBC* de l'étoile observée dans son opposition ; en supposant que la latitude de l'étoile soit à



## Parallaxe annuelle des Étoiles fixes. 159

peu-près de  $90^\circ$ . Copernic en démontrant par plusieurs raisons le mouvement de la terre ne dissimula pas cette objection, (Cop. *L. I, c. 10*). Pour que la latitude des étoiles paroisse la même en tout temps de l'année, malgré le mouvement de la terre, il faut que la distance des étoiles soit si grande que l'orbite de la terre n'y ait aucun rapport sensible, & que l'angle *AES* soit comme infiniment petit; mais, dit-il, « je pense qu'on doit plutôt » admettre cette grande distance des étoiles que la grande » quantité de mouvemens qui auroient lieu si la terre étoit » immobile »; d'ailleurs la grande distance des étoiles est un fait que rien ne contredit, & qu'il est très-aisé de concevoir (1094).

2760. Si l'étoile qui est éloignée du soleil de la quantité *SE* étoit située au pôle *P* de l'écliptique, & à la même distance  $SP = SE$ , sa parallaxe seroit *SPA*; appelions *p* cette parallaxe absolue qui est la plus grande de toutes, & cherchons quel sera son effet dans d'autres positions.

2761. L'étoile étant en *E*, dans le plan *EABC* d'un cercle de latitude perpendiculaire à l'écliptique, & la terre au point *A*, la parallaxe de latitude *SEA* est égale à  $p \sin. EAS$ , puisqu'elle a pour mesure la perpendiculaire *SX*, c'est-à-dire, qu'elle est égale à la parallaxe absolue multipliée par le sinus de la latitude de l'étoile; en supposant *AS* extrêmement petite par rapport à *AP*; ainsi le plus grand effet de la parallaxe sur la latitude, ou la parallaxe en latitude, quand elle a pour base le rayon *SA* de l'orbite terrestre, est  $p \sin. lat.$  Cette parallaxe fait toujours paroître l'étoile plus près de l'écliptique, & diminue sa latitude quand l'étoile *E* est en conjonction avec le soleil.

La plus grande parallaxe de latitude.

2762. Si l'on conçoit la terre tourner dans son orbite, dont *AB* est le diamètre & dont le plan *ATB* est situé perpendiculairement au plan de la figure & au plan du triangle *EAB*, on concevra facilement que la terre étant en *T* à  $90^\circ$  du point *B*, elle répondra au-dessus du point *S* perpendiculairement au plan de la figure,

Elle est nulle dans les quadratures.

c'est-à-dire, que l'angle  $EAS$  ayant son sommet en  $T$ ; à la même distance du point  $E$ , que le point  $S$ , l'angle  $EAC$  fera égal à  $ESC$ , ou la latitude apparente égale à la vraie; ainsi il n'y a point de parallaxe en latitude quand l'étoile  $E$  est en quadrature c'est-à-dire, qu'elle répond à  $90^\circ$  du soleil le long de l'écliptique, trois mois après la conjonction ou l'opposition.

2763. Je suppose que le point  $T$  & le point  $S$  sont à la même distance du point  $E$ , c'est-à-dire, que la ligne  $TS$  est également perpendiculaire aux deux rayons visuels. qui des points  $T$  &  $S$  vont aboutir à l'étoile  $E$ ; mais il est évident que la grande petitesse de  $ST$  par rapport à  $SE$ , fait que l'erreur est incomparablement plus petite encore que la parallaxe, en sorte qu'il est indifférent de supposer la terre dans la circonférence  $T$  ou sur le point  $S$  du diamètre auquel la terre répond perpendiculairement; pour s'en assurer, il suffit de considérer que si  $EB$  est la commune section des deux plans, dont l'un passe par les points  $E$  &  $S$ , l'autre par les points  $E$  &  $T$ , le point  $T$  répondant toujours perpendiculairement en  $S$ , le sin. de l'angle en  $S$  ou de la latitude vue du point  $S$  seroit  $\frac{EB}{ES}$ , & celui de l'angle en  $T$ ,  $\frac{EB}{ET}$ ; mais  $ET$  surpasse  $ES$ , comme l'hypothénuse d'un triangle surpasse le côté, ou comme le rayon surpasse le cosinus, c'est-à-dire, d'un infiniment petit du second ordre, si  $TS$  est un infiniment petit du premier (3316), donc les latitudes vues du point  $T$  ou du point  $S$  sont égales.

2764. Par la même raison la latitude de l'étoile vue du point  $D$  ou du point  $F$  est la même; ainsi quand la terre répondra au point  $F$ , la ligne  $SF$  fera le sinus de la distance de la terre au point  $T$  de la quadrature; &  $SF$  fera la base d'un angle, égal à l'angle  $SEF$ , qui est la parallaxe de latitude; donc la parallaxe en latitude est proportionnelle au sinus de la distance de la terre à la quadrature, qui est aussi le cosinus de la distance de l'étoile à sa conjonction au soleil; en sorte qu'elle est la plus grande & qu'elle varie le moins dans les conjon-

tions & les oppositions. Si l'on appelle  $L$  la latitude de l'étoile,  $E$  son élongation ou la longitude de l'étoile moins celle du soleil on trouvera la parallaxe en latitude pour un moment donné,  $p \sin. L. \cos. E$ . Elle s'ajoute à la latitude vraie pour avoir l'apparente, tant que l'étoile est plus près de l'opposition que de la conjonction, ou que la valeur de  $E$  est entre 3 & 9 signes. Ainsi quand on a la plus grande parallaxe en latitude qui est  $p \sin. L$  (2761) il suffit de la multiplier par le cosinus de l'élongation, pour avoir la parallaxe actuelle de latitude pour un moment quelconque.

2765. La parallaxe de longitude se déterminera par les mêmes principes, & avec la même facilité. Nous considérerons d'abord une étoile  $E$  (fig. 227) située dans le plan même de l'écliptique ou de l'orbite de la terre  $AFEG$ ; soit  $ABC$  la ligne d'où l'on compte les longitudes, l'angle  $ESC$  la longitude de l'étoile  $E$  vue du soleil  $S$ ; si la parallaxe absolue  $AES$  est de  $1''$ , la longitude de l'étoile paroîtra plus petite de  $1''$  dans la première quadrature, la terre étant en  $A$ , & plus grande de  $1''$  dans la quadrature suivante, la terre étant en  $B$ . Si la parallaxe  $AES$ , qui a pour base le sinus total  $AS$  vient ensuite à avoir pour base le sinus  $DH$ , la terre étant en  $D$ , elle diminuera dans la même proportion; ainsi la parallaxe en longitude sera  $p \sin. E$ : si donc on décrit un demi-cercle  $HIK$  (fig. 229), dont le demi-diamètre

Parallaxe  
annuelle en  
longitude.  
Fig. 227.

$CK$  soit de  $1''$ , & qu'on prenne l'arc  $ID$  égal à l'élongation de l'étoile, le sinus  $LD$  ou la portion  $CM$  du rayon exprimera la parallaxe de longitude.

Fig. 229.

2766. Si l'étoile, au lieu d'être dans le plan même de l'écliptique, est relevée au-dessus du plan, il n'y aura qu'à abaisser de l'étoile une perpendiculaire sur le plan, & choisir le point  $L$  (fig. 227) où tombe la perpendiculaire; on dira du point  $E$  la même chose que de l'étoile, & celle-ci sera sujette aux mêmes apparences que le point  $E$ , quant à la longitude rapportée sur l'écliptique. Mais si l'on veut considérer l'effet de la parallaxe dans la région de l'étoile, soit  $O$  (fig. 228)

Fig. 228.

le vrai lieu de l'étoile qu'il faut concevoir relevé au-dessus de la figure ou du plan de l'écliptique, & répondant perpendiculairement sur le point  $E$  où tombe la perpendiculaire  $OE$ , la distance  $SE$  qui est la même que dans la figure 227, est plus petite que la vraie distance absolue  $SO$  de l'étoile, dans le rapport du cosinus de la latitude ou de l'angle  $LSO$  au sinus total; ainsi la parallaxe de l'étoile  $O$  prise d'occident en orient, sera plus petite que la parallaxe du point  $E$ ; mais elle suivra les mêmes proportions dans ses accroissemens: si donc on appelle  $p$  la parallaxe absolue de l'étoile située en  $O$ , on aura pour la parallaxe en longitude  $\frac{p \cdot \sin. E}{\cos. L}$ . Quand l'étoile paroîtra en quadrature,  $\sin. E$  sera égal au rayon entier que nous prenons toujours pour unité, & l'on aura la plus grande parallaxe en longitude  $\frac{p}{\cos. L}$ ; ainsi la parallaxe actuelle pour une situation donnée est égale à la plus grande parallaxe multipliée par le sinus de l'élongation.

2767. Au moyen des deux formules précédentes, il est aisé de démontrer que les étoiles paroissent décrire une ellipse par l'effet de la parallaxe. Soit  $C$  (fig. 229) le vrai lieu de l'étoile, vu du centre du soleil,  $CO$  la plus grande parallaxe en latitude  $= p \cdot \sin. L$  qui a lieu dans les syzygies,  $CH$  ou  $CK$  la plus grande parallaxe en longitude mesurée sur un grand cercle, égale à la parallaxe absolue qui a lieu dans les quadratures, le point  $H$  qui est à l'orient répond à la première quadrature, puisque trois mois après sa conjonction la longitude de l'étoile est la plus grande (2765). Dans les autres temps de l'année l'étoile paroîtra en un point  $F$ , sa parallaxe de longitude  $CM$  étant égale à  $CK \cdot \sin. E$ , & sa parallaxe de latitude  $FM$  ou  $CG$ ,  $= CO \cos. E$  (2764); de-là il suit que le point  $F$  est sur la circonférence d'une ellipse dont  $CK$  est le grand axe, &  $CO$  le petit axe; car la propriété de l'ellipse est que les abscisses  $CM$  étant les sinus de  $15^\circ, 30^\circ,$

&c. pour le rayon  $CK$  les ordonnées  $AE$  font les cosinus des mêmes arcs pour le rayon  $CO$  (2264).

2768. Les deux ellipfes que l'on voit dans la figure 230, font celles que Sirius & Arcturus doivent paroître décrire en vertu de la parallaxe (2767), en supposant que la parallaxe absolue de chacune de ces étoiles soit égale au demi-axe de l'ellipfe qui la représente; la ligne  $AB$  est parallèle à l'équateur, & ces ellipfes sont disposées de manière à faire voir, pour chaque mois de l'année, dans quelle proportion ces deux étoiles s'éloignent ou se rapprochent, & de combien leur différence d'ascension droite & de déclinaison devroit paroître différente (2777), suivant les temps marqués au-dedans des ellipfes, en vertu des loix de la parallaxe que nous avons expliquées; nous verrons combien les différences observées sont éloignées de celles-là (2826).

Ellipfes  
apparentes,  
Fig. 230.

2769. Si une étoile étoit située au pôle même de l'écliptique, la parallaxe de latitude seroit toujours égale à la parallaxe absolue, ou à l'angle  $APS$  (fig. 226), & l'ellipfe de la parallaxe deviendrait un cercle. Dans ce cas, la longitude apparente de l'étoile seroit toujours égale à la longitude du soleil: soit  $P$  (fig. 231) le pôle de l'écliptique ou le pôle du cercle  $ABCD$  que la terre décrit;  $Pa$  ou  $Pb$  la valeur de la parallaxe absolue; la terre étant en  $A$ , verra l'étoile en  $a$ , le plus près du point  $C$  de l'écliptique où répond alors le soleil, puisque la latitude de l'étoile est toujours la plus petite quand elle est en conjonction (2761); de même quand la terre sera en  $B$  l'étoile paroîtra en  $b$ , répondant toujours au point de l'écliptique opposé à celui où est la terre, & par ce moyen elle paroîtra décrire le petit cercle  $abcd$  autour du pôle de l'écliptique dans l'espace d'un an; c'est ainsi que les ellipfes de la figure 230 s'élargiroient & deviendroient des cercles, si les latitudes de Sirius & d'Arcturus augmentoient jusqu'à devenir de  $90^\circ$ .

Fig. 226.

Fig. 231.

Observations  
faites pour la  
parallaxe des  
étoiles.

2770. Tycho-Brahé observa l'étoile polaire avec  
Xij

soin en divers temps de l'année, & n'y trouva aucune différence (Kép. *Epit. astr.* 493); il étoit prouvé par-là que la parallaxe annuelle de l'étoile polaire n'étoit pas de 30". Le P. Riccioli observa ensuite des hauteurs de Sirius trois mois avant & trois mois après l'opposition, & il n'y remarqua aucune altération (*Almag.* II, 452); mais quoiqu'il crût qu'une différence de 10" devoit être sensible dans ses observations, il paroît qu'elles n'étoient pas aussi exactes qu'il le croyoit, car il y a 26" de différence entre les hauteurs de Sirius au printemps & en automne (2847).

Observations  
de M. Picard.

2771. M. Picard, dans son voyage d'Uranibourg, pag. 18, en rapportant les observations de l'étoile polaire qu'il y fit en 1672, dit que cette étoile en divers temps de l'année a des variations que Tycho n'avoit pas remarquées & *que j'observe*, dit-il, *depuis environ dix ans*; quoique l'étoile polaire s'approche du pôle de 20" chaque année, il arrive néanmoins, suivant M. Picard, que vers le mois d'Avril la hauteur méridienne & inférieure de cette étoile devient moindre de quelques secondes qu'elle n'avoit paru au solstice d'hiver précédent, au lieu qu'elle devoit être plus grande de 5"; qu'ensuite aux mois d'Août & de Septembre sa hauteur méridienne supérieure se trouve à peu-près telle qu'elle avoit été observée en hiver, & même quelquefois plus grande, quoiqu'elle dût être diminuée de 10 à 15; mais qu'enfin vers la fin de l'année tout se trouve compensé.

Elles sont  
confirmées ac-  
tuellement.

2772. Qu'il me soit permis de remarquer ici par avance à l'honneur de ce grand astronome, que ces observations sont conformes, autant qu'elles pouvoient l'être, aux phénomènes de l'aberration découverte long-temps après (2847); l'étoile polaire doit paroître plus basse de 19" au commencement d'Avril, lorsqu'elle passe au méridien dans la partie inférieure de son cercle, qu'au solstice d'hiver, & la hauteur supérieure de l'étoile polaire doit paroître de 29" plus grande au commencement de Septembre qu'au solstice d'hiver; ce qui s'accorde avec

*Parallaxe annuelle des Étoiles fixes.* 165

l'observation de M. Picard ; ainsi ce célèbre observateur a eu la gloire de faire la première découverte de l'astronomie moderne sur les étoiles fixes, & de jetter les fondemens de toutes celles que l'on a faites depuis.

2773. Le Docteur Hook (548), célèbre dans presque tous les genres de littérature, & qui se regardoit lui-même comme le plus savant homme de l'Angleterre, voulut aussi avoir l'honneur de déterminer ces variations (*An attempt to prove the motion of the earth from observations made by Robert Hook. London, 1674, 4<sup>o</sup>. 28 pag.*). Il avoit placé au college de Gresham une lunette de 36 pieds, avec laquelle il avoit observé les distances au zénit de  $\gamma$  du Dragon ; il trouva, dit-il, en 1669 cette étoile de 23'' plus au nord le 6 Juillet que le 21 Octobre, Flamsteed en concluoit aussi bien que lui-même la parallaxe annuelle, & en effet ces observations du Docteur Hook sont aussi exactement d'accord avec la théorie des parallaxes, que si on les y eût ajustées par avance, en supposant que la parallaxe de  $\gamma$  du Dragon fut de 15''.

2774. M. Picard voulut vérifier cette observation ; mais la hauteur méridienne de la lyre observée dans les deux solstices, lui parut la même, ce qui étoit contraire aux observations de M. Hook, comme il le remarqua lui-même dans l'assemblée de l'académie, le 4 Juin 1681. (*Hist. célest. pag. 252*). On voit, en effet, par les loix de l'aberration que la différence est insensible, d'un solstice à l'autre.

2775. Flamsteed, ayant observé l'étoile polaire avec son mural (2323, 2591) en 1689, & dans les années Observation  
de Flamsteed. suivantes, trouva que la déclinaison étoit plus petite de 40'' au mois de Juillet, qu'au mois de Décembre ; ces observations étoient justes, mais elles ne prouvoient point la parallaxe annuelle, comme le fit voir M. Cassini, (*Mem. acad. 1699*). Au reste, quoique Flamsteed crût reconnoître l'effet de la parallaxe annuelle dans les différences qu'il avoit observées, il avoit quelques doutes sur ses observations, & il souhaitoit que quelqu'un voulût faire construire un instrument de 15 à 20 pieds de

rayon sur un fondement inébranlable , pour éclaircir une question qui sans cela , disoit-il , pourroit être bien longtemps indécise. M. Cassini crut trouver dans Sirius une parallaxe de 6'', (*Mém. acad.* 1717, *pag.* 265).

2776. Lorsque Rowley voulut placer un objectif dans une des tours de S' Paul de Londres pour observer cette parallaxe annuelle , Newton s'y opposa ; il craignit que le bâtiment venant à changer ne dérangeât la situation de la lunette , & ne fit tirer de fausses conséquences dans une matière qui étoit aussi délicate ; Newton qui , par le moyen de l'attraction avoit si bien démontré le mouvement de la terre , ne vouloit pas qu'on répandit des nuages sur une théorie très-certaine , en y introduisant des observations équivoques. Ce ne fut qu'en 1725 , que M. Molyneux , au moyen du secteur fait par M. Graham , trouva que cette parallaxe n'avoit pas lieu (2793).

2777. Ce que M. Cassini avoit dit sur la parallaxe annuelle des étoiles en réfutant les conclusions de Flamsteed (<sup>a</sup>) , ne s'étendoit qu'aux circonstances qu'il avoit eu dessein d'examiner ; M. Manfredi se proposa en 1720 , de donner les loix générales de cette variation : en 1722 il en fit un corps d'ouvrage qui a paru en 1729 (<sup>b</sup>) ; il y donne la manière de calculer la parallaxe annuelle des étoiles en longitude , en latitude , en ascension droite & en déclinaison , & de tracer les ellipses qui servent à la représenter ; il rapporte les observations qu'il avoit faites des différences d'ascension droite entre Arcturus & Sirius , & il dit , *pag.* 74 , qu'elles ne s'accordent point avec la parallaxe.

2778. La découverte de l'aberration a fait voir que les inégalités aperçues dans les étoiles ont une cause toute différente de la parallaxe , & cette nouvelle cause satisfait si bien à toutes les observations , qu'elle exclut

La parallaxe  
est absolu-  
ment nulle.

(<sup>a</sup>) Mémoires de l'Académie , | *Is Scientiarum Institutum Astronomi, de*  
1699, 1717. Voyez cependant les | *annis inerrantium Stellarum aberra-*  
Mém. de 1715. | *tionibus*, Bononiæ, 1729, in-4°, 80  
(<sup>b</sup>) *Eustachii Manfredii Bononien-* | *pages.*



## Parallaxe annuelle des Étoiles fixes. 167

absolument la parallaxe. Ainsi la question de la parallaxe annuelle des étoiles fixes est résolue, M. Bradley pense que si elle eût été seulement de 1'', il l'auroit aperçue dans le grand nombre d'observations qu'il avoit faites, sur-tout de  $\gamma$  du Dragon, observations qui s'accordent en tout temps avec l'aberration sans tenir compte d'aucune parallaxe.

2779. Lorsque M. Manfredi eut appris la découverte de l'aberration, il publia des observations qu'il avoit faites, aidé de M. Zanotti, sur les différences d'ascension droite entre différentes étoiles, (*De Bononiensi Scientiarum & Artium Instituto atque Academia Commentarii* 1731, in-4°, pag. 399). Il avoit observé que la plus grande différence d'ascension droite avoit lieu quand une des étoiles étoit en conjonction, & l'autre en opposition, & la plus petite différence six mois après; ce qui est d'accord avec la théorie de l'aberration (2815). Les observations données par M. Horrebow (*Copernicus triumphans, Hafniæ*, 1727) y sont contraires, & me paroissent absolument défectueuses.

2780. Lorsque les observations de M. de la Caille parurent en 1757, on crut s'apercevoir que les hauteurs méridiennes de Sirius indiquoient une parallaxe annuelle; en effet, on voit que les distances au zénit observées au Cap avec un secteur de six pieds, étoient plus petites au mois de Janvier, & cela d'environ 8'' qu'au mois de Juillet, (*Astron. Fund. pag. 173, 190*); mais ces observations de Sirius ne vont que de l'été 1751 à l'hiver suivant; & il peut y avoir eu quelque cause locale qui ait produit dans ces observations des différences de 8''. M. de la Caille au mois de Juin & de Juillet 1761, & au mois de Janvier 1762, fit un grand nombre d'observations de Sirius à Paris, & je vois (dans son Journal manuscrit légué à l'Académie), que la hauteur de Sirius étoit  $24^{\circ} 44' 15''$  en hiver, &  $24^{\circ} 44' 12'' \frac{1}{2}$  en été, la différence n'est que de  $2'' \frac{1}{2}$ , & elle est contraire à l'effet de la parallaxe: aussi M. de la Caille a écrit en marge de ces observations ces mots: *Il faudroit que les variations des*

On soupçonnoit une parallaxe dans Sirius.

Elle n'existe point.

*réfractions fussent plus fortes que de  $\frac{1}{17}$ , parce qu'en effet ; si l'on suppose que la réfraction ait augmenté en hiver un peu plus que dans la table de M. de la Caille (2239), on trouvera la même hauteur en hiver & en été.*

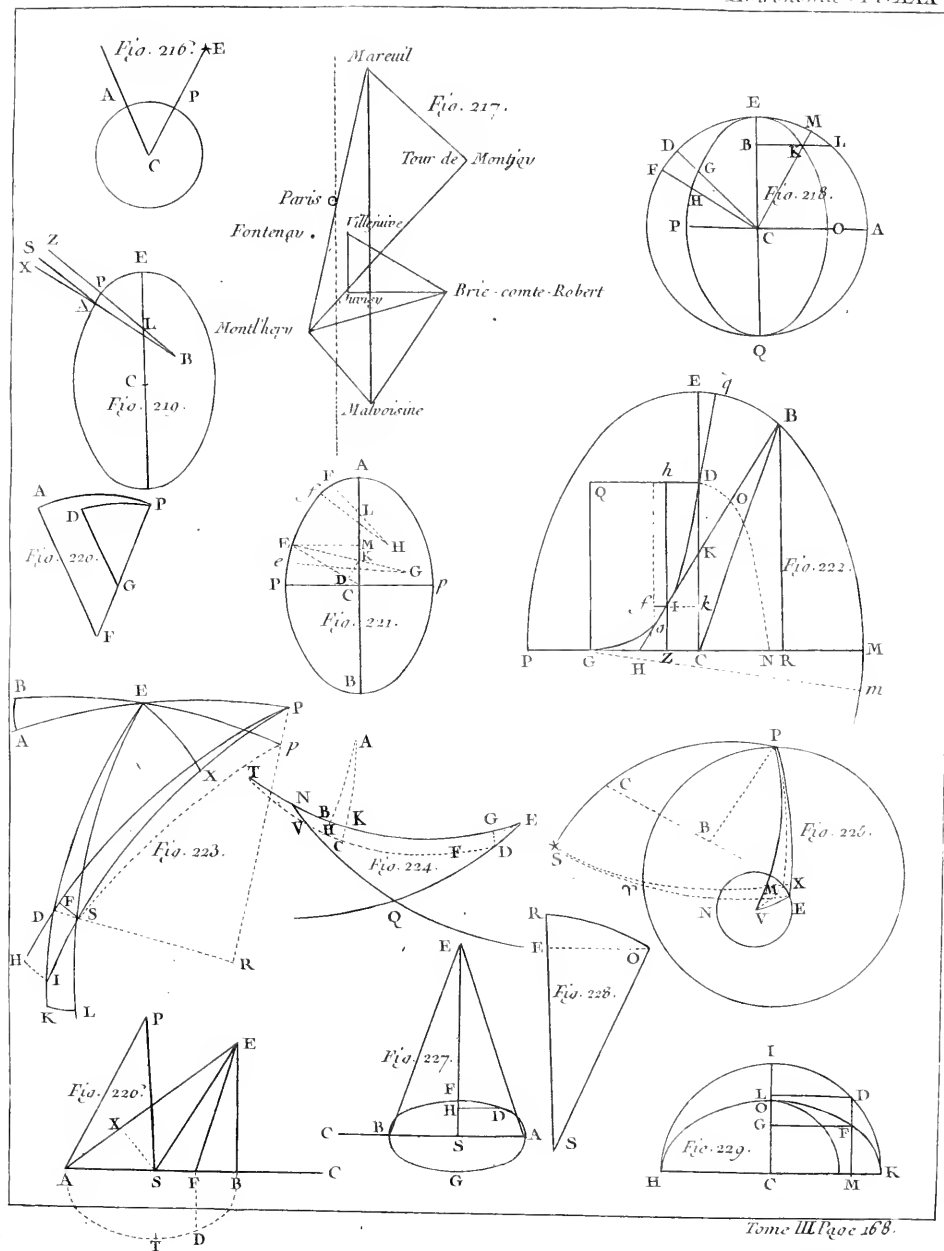
2781. Les observations faites en Angleterre, sont également contraires à l'hypothèse de la parallaxe annuelle de Sirius ; M. Bevis n'a fait voir à Londres au mois de Mars 1763, une suite de 45 hauteurs Méridiennes de Sirius, prises au mural de 8 pieds qui est à l'observatoire Royal de Greenwich ; ces hauteurs ont été réduites au premier Janvier 1760 ; & l'on y a employé toutes les corrections nécessaires pour le changement des réfractions, &c. Ces observations ne s'écartent jamais de plus de 3 ou 4 secondes de la moyenne, & les petites différences qu'on y remarque ne m'ont paru avoir aucun rapport avec la parallaxe annuelle. Si la plus brillante de toutes les étoiles n'a aucune parallaxe, il n'y a point d'apparence qu'on en découvre dans les autres étoiles, qui sont sans doute beaucoup plus éloignées de la terre.

*Sur la distance & de la grandeur des  
Étoiles fixes.*

De la distance des Étoiles fixes.

Fig. 226.

2782. LA connoissance de la parallaxe annuelle nous conduiroit à celle de la distance des étoiles, si cette parallaxe pouvoit s'observer ; mais puisqu'elle est insensible (2778) nous en concluons au moins par exclusion, une des limites de cet éloignement. Si la parallaxe absolue d'une étoile ou l'angle  $APS$  (fig. 226) étoit de  $1''$ , le côté  $PS$  seroit 206264 fois plus grand que le rayon  $AS$  de l'orbe annuel, qui est lui-même de 33 millions de lieues (1398) : La distance moyenne du soleil  $AS$ , contient 22198 fois le demi-diamètre de la terre, en supposant la parallaxe de  $9'$  : donc si la parallaxe annuelle d'une étoile étoit seulement de  $1''$ , sa distance seroit 4727200000, ou 4727 millions de fois





fois plus grande que le rayon de la terre, c'est-à-dire, de 6771770 millions de lieues. Mais la parallaxe des étoiles n'étant pas d'une seconde, même pour les étoiles les plus proches de la terre, leur distance doit être encore plus considérable, c'est-à-dire, plus de 677177000000 de lieues.

2783. Si par le moyen de ce rayon, on calcule la circonférence du cercle qui seroit décrit tous les jours par les étoiles dans le système de la terre immobile, la révolution diurne étant de  $23^h 56' 4''$ , 1; on trouvera que les étoiles parcourroient au moins 49392000 lieues par seconde; mais au moyen de la rotation de la terre, une vitesse de 238 toises par seconde, nous dispensé d'en supposer une de 49 millions de lieues.

2784. Après avoir vu à quelle prodigieuse distance doivent être les étoiles fixes, on ne sera pas étonné de l'extrême petitesse de leur diamètre apparent, & de l'impossibilité où nous sommes de déterminer leur grandeur absolue & leur véritable diamètre. Albategnius estimoit le diamètre apparent des étoiles de la première grandeur de  $45''$ ; Tycho le croyoit d'une minute, Riccioli de  $18''$  (*Astron. reform. pag. 359*). Galilée & Képler étoient déjà persuadés que les étoiles fixes étoient des soleils comme le nôtre, (Galilei *Dial. 3 de mundi syst.* Képler, *diff. cum nuncio syd.* Jordanus Brunus, *Lib. de maximo & immenso*), & que leur diamètre apparent étoit d'une extrême petitesse. Galilée avoit observé que la Lyre n'avoit pas plus de  $5''$  de diamètre, & Horoccius avertissoit en 1639, que plus les lunettes étoient parfaites plus elles faisoient paroître les étoiles petites, & semblables à des points lumineux (*Hev. Venus in sole visa, pag. 139*).

2785. Képler, qui avant la découverte des lunettes, donnoit 4 minutes de diamètre à Sirius, (de *stella nova cap. 16 & 21*) fut persuadé ensuite (*Epit. astron. pag. 498*) qu'elles n'étoient que comme des points, d'autant plus petits que les lunettes sont plus parfaites; Cassendi estimoit Sirius de  $10''$ ; M. Huygens trouva par des

Diamètre  
apparent des  
étoiles.

expériences très-déliçates que les étoiles étoient comme des points; M. Cassini en 1717 jugeoit le diamètre de Sirius de 5".

Il n'est pas  
d'une secon-  
de.

2786. Il est prouvé aujourd'hui que 4 étoiles de la première grandeur, Regulus, Aldébaran, l'Epi de la Vierge, & Antarès, n'ont pas 1" de diamètre : car lorsque ces étoiles sont éclipsées par la lune, elles n'employent pas deux secondes de temps à se plonger sous le disque de la lune; ce qui arriveroit nécessairement si le diamètre de ces étoiles étoit de 1". En effet, la lune emploie environ 2" de temps à avancer d'une seconde de degré; ainsi pendant l'espace de 2" de temps, on verroit une étoile diminuer de grandeur & disparaître peu-à-peu; or, il n'en est pas ainsi, les étoiles disparaissent en une demi-seconde, elles reparoissent avec la même promptitude & comme un éclair, donc le diamètre n'est pas d'une seconde. *Philos. transf. abr.* IV, 332.

2787. Si l'on voit dans les lunettes une lumière éparse qui environne les étoiles, qui les amplifie & les fait paroître comme si elles avoient 5 à 6" de diamètre, on doit attribuer cette apparence à la vivacité de leur lumière, à l'air environnant & illuminé, à l'aberration des verres, à l'impression trop vive qui se fait sur la rétine; on en a vu la preuve à l'occasion des feux & des signaux (2647).

De la gran-  
deur absolue  
des étoiles.

2788. Si le diamètre d'une étoile étoit d'une seconde, & sa parallaxe annuelle d'une seconde, le diamètre réel de l'étoile seroit égal au rayon du grand orbe, c'est-à-dire, de 33 millions de lieues; mais il peut se faire que les parallaxes des étoiles soient plus grandes que leurs diamètres apparens, en sorte que le diamètre réel soit beaucoup plus petit que 33 millions de lieues; nous ne pouvons rien décider là-dessus, peut-être un jour les astronomes seront-ils plus instruits.

Cause de la  
scintillation.

2789. L'extrême petitesse du diamètre apparent des étoiles fixes est probablement la cause du mouvement de scintillation qu'on y remarque; cette scintil-

lation ne s'apperoit point dans les planètes , par exemple , dans Jupiter & très-peu dans Vénus , quoique la force de leur lumière surpasse celle des étoiles fixes , & elle sert souvent à distinguer les planètes des étoiles ; le diamètre d'une étoile est si petit que les moindres molécules de matière qui passent entre elle & nous par l'agitation de l'atmosphère , fussent pour nous cacher l'étoile , & nous la montrer alternativement. Si l'on conçoit que ces alternatives soient assez fréquentes & assez courtes pour qu'à peine notre œil puisse les distinguer l'une de l'autre , on comprendra que les étoiles doivent paroître dans une espèce de tremblement continuel. Cela paroît confirmé par l'observation faite dans certains pays , où l'air est extrêmement pur & tranquille , & où l'on dit que la scintillation des étoiles n'a pas lieu ; mais quand il n'y auroit sur la terre aucun pays dont l'air fût assez calme pour faire cesser le tremblement apparent de la lumière des étoiles , cela ne suffiroit pas pour détruire l'explication précédente.

M. Garcin , correspondant de l'académie , & qui étoit aussi de la société Royale de Londres , étant en Arabie , à peu-près sous le tropique du cancer , à Gomron , ou Bander-Abassi , port fameux du golfe Persique , écrivoit à M. de Réaumur qu'il vivoit dans un pays tout-à-fait exempt de vapeurs ; la sécheresse des environs du golfe Persique est telle que non-seulement on n'y voit jamais sortir aucune vapeur de terre , mais qu'on n'y apperçoit pas même un brin d'herbe pendant les trois saisons chaudes de l'année , du moins dans les lieux découverts & exposés au soleil ; c'est presque de la cendre plutôt que de la terre. Aussi dans le printemps , l'été & l'automne , ceux qui y restent couchent en plein air sur le haut des maisons qui sont en plate-forme , sur des toiles tendues , & sans couvertures. Les étoiles y font un spectacle frappant ; c'est une lumière pure , ferme & éclatante , sans nul étincellement ; ce n'est qu'au milieu de l'hiver que la scintillation , quoique très-foible s'y fait appercevoir ; en conséquence , M. Garcin ne doutoit

pas que la scintillation des étoiles ne vînt des vapeurs qui s'évent sans cesse dans l'atmosphère des pays moins secs. M. de la Condamine a remarqué de même dans la partie du Pérou, qui est le long de la côte, où il ne pleut jamais, que la scintillation des étoiles y étoit bien moins sensible que dans nos climats. Cette grande pureté du ciel en Arabie, fut sans doute autrefois l'occasion des premières découvertes de l'astronomie (260), on comprend assez quel avantage un ciel toujours pur & serein a dû donner aux Asiatiques, sur le reste du monde. La facilité de voir toujours ce spectacle dans toute sa beauté, ou plutôt l'impossibilité de ne le pas voir sans cesse a fait de tous les habitans de Bander-Abassi & des environs, comme autant d'astronomes. Les interruptions de sommeil qui doivent y être fréquentes deviennent pour eux la source de mille observations curieuses & faciles, que nous préparons en Europe avec des soins pénibles, & qu'un ciel ingrat nous enlève : aussi les Gens du peuple savent connoître quand ils s'éveillent quelle heure il est, par les étoiles, & connoissent plus ou moins les principales circonstances de ces mouvemens. Si les talens se développent, dit M. de Mairan, à mesure qu'il se présente plus d'occasions de les exercer, & s'ils sont assez également répandus sur la totalité du genre humain, combien de semblables pays, la Caldée, l'Egypte & l'Arabie, n'ont-ils pas du produire d'astronomes, lorsque les sciences, & l'astronomie sur-tout, y étoient en honneur (*Hist. acad.* 1743).





## LIVRE DIX-SEPTIEME.

### DE L'ABERRATION ET DE LA NUTATION.

**L**ES MOUVEMENS apparens des étoiles fixes causés par la précession & par d'autres causes particulières, ayant été expliqués dans le XVI<sup>e</sup>. livre, je passe à l'explication des deux mouvemens apparens, découverts par M. Bradley depuis l'année 1728, & qui sont connus sous le nom d'*Aberration* & de *Nutation*.

2790. L'ABERRATION est un mouvement apparent observé dans les étoiles fixes, par lequel elles semblent décrire des ellipses de 40'' de diamètre; il est causé par le mouvement de la lumière, combiné avec le mouvement annuel de la terre (2801). La définition de la nutation se trouvera ci-après (2853); l'histoire de la découverte de ces deux mouvemens exige que l'on se rappelle ce qui a été dit à l'occasion de la parallaxe annuelle (2773).

2791. Flamsteed avoit cru non-seulement d'après les observations du Docteur Hook, mais encore d'après les siennes propres, qu'il y avoit une parallaxe annuelle dans les étoiles fixes; cependant la quantité & la loi en étoient peu connues; Samuel Molyneux, Irlandois, entreprit vers l'an 1725, de vérifier ce qu'on avoit dit là-dessus, & de déterminer avec plus de soin les circonstances de ces mouvemens, (*Philos. transf.* n<sup>o</sup>. 485); c'est au projet de Molyneux que nous sommes redevables de toutes les connoissances qui vont faire la matière de ce XVII<sup>e</sup> livre; mais M. Bradley eut la gloire d'exécuter ce que Molyneux n'avoit fait qu'entreprendre.

2792. M. Molyneux fit construire un instrument dans le même goût & choisit les mêmes étoiles que le Docteur Hook; Georges Graham, cet Horloger célèbre dans les arts, autant par son génie que par son zèle,

Entreprise  
de M. Moly-  
neux.

Secrétaire de  
M. Graham.

contribua plus que tout autre à ce travail, il fit construire pour Molyneux un secteur de 24 pieds, dont l'exactitude surpasse de beaucoup tout ce qui avoit jamais été fait pour parvenir à mesurer dans le ciel de petits arcs (2380).

Le secteur de Molyneux fut placé à Kew, près de Londres, & le 3 Décembre 1725, il observa au méridien l'étoile  $\gamma$  à la tête du Dragon; il marqua exactement sa distance au zénit; il répéta cette observation le 5, le 11, le 12 du même mois, il ne trouva pas de grandes différences; & comme on étoit dans un temps de l'année où la parallaxe annuelle de cette étoile ne devoit pas varier (2764), il crut qu'il étoit inutile de continuer pour lors les mêmes observations.

Premières  
observations.

2793. M. Bradley se trouva dans ce temps-là à Kew, il eut la curiosité d'observer aussi la même étoile le 17 Décembre 1725, & ayant disposé l'instrument avec soin, il vit que l'étoile passoit un peu plus au sud que dans les premiers jours du mois; d'abord les deux astronomes ne firent pas grande attention à cette différence, elle pouvoit venir des erreurs d'observation; cependant le 20 Décembre l'étoile avoit encore avancé vers le sud, & elle continua les jours suivans, sans qu'on pût attribuer ce progrès au défaut des observations.

Cette différence paroissoit d'autant plus surprenante qu'elle étoit dans un sens contraire à l'effet que devoit avoir la parallaxe; & comme on ne concevoit aucune autre chose qui pût produire un pareil changement, on craignit qu'elle ne vint de quelque altération dans les parties de l'instrument; il fallut donc s'assurer par diverses expériences de son exactitude; & comme l'étoile alloit toujours vers le sud; on ne songea plus qu'à mesurer exactement ce progrès, pour tâcher d'en découvrir les circonstances & la cause; au commencement du mois de Mars 1726 l'étoile se trouva parvenue à 20" du lieu où on l'avoit observée trois mois auparavant, alors elle fut pendant quelques jours stationnaire; vers le milieu d'Avril elle commença de remonter vers le nord,

& au commencement de Juin elle passa à la même distance du zénit que dans la première observation faite six mois auparavant ; sa déclinaison changeoit alors de 1" en trois jours ; d'où il étoit naturel de conclure qu'elle alloit continuer d'avancer vers le nord ; cela arriva comme on l'avoit conjecturé ; l'étoile se trouva au mois de Septembre de 20" plus au nord qu'au mois de Juin , & 39" plus qu'au mois de Mars ; delà l'étoile retourna vers le sud , & au mois de Décembre 1726 , elle fut observée à la même distance du zénit que l'année précédente , avec la seule différence que la précession des équinoxes devoit produire.

2794. Par-là il étoit bien prouvé que le défaut de l'instrument n'étoit pas la cause des différences observées ; d'un autre côté , l'effet étoit trop régulier pour pouvoir être attribué à une fluctuation irrégulière de la matière éthérée , comme Manfredi l'avoit soupçonné dans un temps où l'on n'avoit que de mauvaises observations ; mais la difficulté étoit de trouver une explication suffisante.

La première idée fut d'examiner si cela ne provenoit point de quelque nutation dans l'axe de la terre , produite par l'action du soleil ou de la lune , à cause de l'aplatissement de la terre , ainsi que cela devoit avoir lieu par l'attraction (2854) ; mais d'autres étoiles observées en même-temps ne permettoient pas d'adopter cette hypothèse : une petite étoile qui étoit à même distance du pôle , & opposée en ascension droite à  $\gamma$  du Dragon auroit dû avoir par l'effet de cette nutation le même changement en déclinaison ; cependant elle n'en avoit eu qu'environ la moitié , comme cela parut en comparant jour par jour les variations de l'une & de l'autre ; observées en même-temps ; c'étoit la 35<sup>e</sup> étoile de la Giraffe.

2795. En comparant les observations , il paroissoit que la différence apparente de déclinaison par rapport à la plus grande , en différens temps de l'année étoit à peu-près proportionnelle au sinus versé de la distance du

soleil aux points équinoxiaux. C'étoit une raison de penser que la cause, quelle qu'elle pût être, avoit quelque rapport avec la distance du soleil à ces points, mais M. Bradley n'avoit pas encore assez d'observations pour entreprendre de chercher l'hypothèse qui pouvoit y satisfaire; Molyneux ayant été nommé Lord Commissaire de l'Amirauté d'Angleterre, n'avoit plus le temps de s'en occuper, M. Bradley voulut donc suivre lui-même ces recherches.

Autre secteur fait pour M. Bradley.

2796. Pour cela il eut encore recours à Graham; il fit construire un autre secteur dont l'arc beaucoup plus grand s'étendoit à  $60^{\circ} \frac{1}{4}$  de chaque côté du zénit, & pouvoit comprendre non-seulement *la Chèvre*, étoile de la première grandeur, mais plus de 200 étoiles du Catalogue Britannique, dont douze étoient assez brillantes pour pouvoir être vues lors même qu'elles passaient au méridien à midi, au lieu que celui de M. Molyneux ne pouvoit donner en tout que 7' ou 8', & comprenoit par conséquent très-peu d'étoiles assez brillantes pour pouvoir être observées en tout temps..

M. Bradley ne put donner que 12 pieds  $\frac{1}{2}$  à son secteur, à cause de la situation des lieux qu'il habitoit; mais il a toujours jugé cette longueur suffisante; car lorsque l'instrument étoit bien rectifié, on pouvoit être assuré de la distance au zénit à une demi-seconde près. M. Bradley demouroit à Wansted où M. Pound, son oncle, étoit Curé; le secteur y fut placé le 19 Août 1727, & M. Bradley commença d'examiner soigneusement quelles étoient les variations des étoiles, suivant leur différente situation.

2797. Il vit alors que la règle qu'il avoit cru percevoir l'année précédente n'avoit lieu que pour les étoiles situées près du colure des solstices, comme  $\gamma$  du Dragon. Ces étoiles étoient les seules qui fussent le plus au nord ou le plus au sud dans le temps des équinoxes. Mais une règle plus générale qui ne pouvoit guère lui échaper, étoit que chaque étoile paroissoit stationnaire ou dans son plus grand éloignement vers le nord ou vers

Règle générale d'aberration,

le sud lorsqu'elle passoit au zénit vers six heures du soir ou du matin, que toutes avançaient vers le sud lorsqu'elles passaient le matin, & vers le nord lorsqu'elles passaient le soir, & que le plus grand écart étoit à peu-près comme le sinus de la latitude de chacune. Enfin, lorsqu'au bout d'une année il eut vu toutes les étoiles reparoître, chacune au même lieu où elle avoit d'abord paru; M. Bradley, muni d'un assez grand nombre d'observations, s'occupa à trouver la cause de ces variations.

Il s'étoit déjà convaincu que la nutation supposée dans l'axe de la terre ne suffisoit pas pour expliquer l'aberration de 2 étoiles opposées (2794), & qu'elle étoit contraire à la parallaxe; un changement dans le fil à-plomb, ou dans la réfraction, ne donnoit rien de satisfaisant; il falloit une cause annuelle, & constante, égale pour les étoiles foibles & pour les plus brillantes, dont le plus grand effet du nord au sud fût comme le sinus de la latitude, c'est-à-dire, nul pour les étoiles situées dans l'écliptique; transportons-nous à sa place, & raisonnons à peu-près comme il dut faire.

2798. Puisque cette aberration étoit nulle en latitude pour les étoiles situées dans l'écliptique, elle devoit donc pour ces étoiles-là se faire toute entière dans le plan de l'écliptique, comme la parallaxe annuelle, avec cette différence que quand l'étoile auroit dû avoir la plus grande aberration en latitude suivant la parallaxe (2761), elle se trouvoit au contraire suivant l'observation être dans sa situation moyenne, & que dans les temps où la parallaxe auroit dû être nulle, on observoit la plus grande aberration. En partant de cette différence entre la parallaxe & l'aberration, que M. Bradley ne pouvoit manquer d'appercevoir, il s'ensuivoit que la plus grande aberration en longitude arrivoit lorsque l'étoile étoit ou en conjonction, ou en opposition.

Ainsi l'étoile *E* (fig. 232) devoit paroître 40" plus à l'orient, la terre étant au point *G*, de son orbite *GHK* que six mois après, la terre étant en *K*. M.

Raisonne-  
mens qu'on  
dût faire là-  
dessus.  
Fig. 232.

Bradley apperçut heureusement que cette différence de  $40''$  étoit précisément le chemin que la terre parcourt dans son orbite en 16 minutes de temps, il se rappella que la lumière employoit le même temps à parcourir le diamètre  $GK$  de l'orbite de la terre, suivant la découverte faite par Romer en 1675 (2895). M. Bradley put d'abord imaginer que l'on voyoit les étoiles  $16'$  plus tard, à cause de leur éloignement, quand elles étoient en conjonction que lorsqu'elles étoient en opposition, & que par-là on les voyoit de  $40''$  moins avancées; mais suivant ce raisonnement il n'y auroit point eu d'aberration pour l'étoile située au pôle de l'écliptique, dont la distance est toujours la même.

2799. Cependant l'étoile  $\gamma$  du Dragon avoit une aberration de  $20''$  au nord & au sud, qui croissoit comme les sinus des distances au point où elle étoit nulle, de la même façon que les parallaxes annuelles (2765); il y avoit apparence que cette étoile décrivait un cercle semblable à celui qui auroit lieu par une parallaxe de  $20''$ ; mais qu'elle le décrivait de manière à être toujours avancée de  $20''$  du côté où va la terre. Soit *Fig. 235.*  $ABCD$  (*fig. 235*), le cercle ou l'orbite annuelle de la terre,  $E$  une étoile située au pôle de ce cercle, & qu'il faut imaginer relevée à une distance prodigieuse au-dessus du plan de la figure; lorsque la terre est en  $A$ , l'étoile au lieu de paroître en  $E$  paroît en  $a$ , plus avancée de  $20''$  du côté où va la terre; lorsque la terre est en  $B$ , l'étoile paroît en  $b$ , &c. Tel est le phénomène qui étoit indiqué par les observations de M. Bradley; nous en parlerons plus au long (2813). Il restoit donc à chercher un moyen pour faire en sorte que l'étoile parût toujours du côté où alloit la terre.

2800. Enfin M. Bradley eut l'idée heureuse de combiner le mouvement de la lumière avec celui de la terre, suivant les loix de la décomposition des forces (2801), il effaya cette hypothèse, & voyant qu'elle s'accordoit parfaitement avec toutes les observations, il rendit compte de sa découverte au mois de Décem-

bre 1728 ; dans une lettre à M. Halley (*Philos. transf.* n°. 406).

Pour faire voir combien son hypothèse s'accordoit avec ses observations, M. Bradley disposa dans une table 15 observations de  $\gamma$  du Dragon faites dans tous les mois de l'année ; on y voit combien à chaque jour elle devoit être plus méridionale, suivant le calcul rigoureux fait d'après les principes que nous allons indiquer, & combien elle avoit paru l'être par l'observation, la différence ne va jamais au-delà de  $1''\frac{1}{2}$ .

Accord de  
cette hypothèse.

Le même accord que l'on voyoit dans cette table de  $\gamma$  du Dragon, parut par toutes les autres étoiles, dont l'aberration fut observée & calculée, quelle que fut leur distance aux colures. M. Bradley assure que cet accord lui parut surprenant, & que dans plus de 70 observations qu'il avoit faites de  $\gamma$  du Dragon pendant une année, il n'y en avoit qu'une qui différât de l'hypothèse de plus de  $2''$ , & elle étoit marquée comme très-douteuse à cause des nuages qu'il y avoit ce jour-là. Ainsi M. Bradley dut regarder cet accord des observations, comme une démonstration de son hypothèse, ou plutôt il dut cesser de regarder comme hypothèse une théorie qui s'accordoit si bien, & avec le mouvement des étoiles & avec la propagation successive de la lumière déjà connue par les éclipses des satellites (2895).

2801. Je passe donc à l'explication de la cause que M. Bradley assigna aux phénomènes qu'il avoit observés (2797), & comme on a ordinairement quelque peine à la bien concevoir, je ferai tous mes efforts pour la mettre hors de doute, & en rendre le principe aussi évident que doit l'être une proposition de pure géométrie ; je vais donc le présenter sous différentes formes ; toutes supposent néanmoins que l'on ait une idée de la décomposition des forces dans les parallélogrammes (1232), telle qu'on la trouve dans tous les livres élémentaires de Mécanique. Soit *h* une étoile (*fig.* 233), qui lance vers nous un rayon de lumière, considéré

Cause de  
l'aberration.

*Fig.* 233.

Z ij

comme un corpuscule qui va de  $E$  en  $B$ ; soit  $AB$  une petite portion de l'orbite de la terre, de  $20''$  par exemple, (l'on verra dans un instant pourquoi nous choisissons ce nombre  $20''$ ), &  $CB$  l'espace que le rayon a parcouru pendant que la terre décrivait  $AB$ ; ainsi le corpuscule de lumière  $B$  étoit en  $C$  lorsque la terre étoit en  $A$ , & arrive au point  $B$  en même temps que la terre; par ce moyen  $CB$  &  $AB$  expriment les vitesses de la lumière & de la terre en  $20''$  de temps.

Je tire la ligne  $CD$  parallèle & égale à  $AB$ , & je termine le parallélogramme  $DBA$ ; suivant le principe si connu de la composition & décomposition des forces on peut regarder la vitesse  $CB$  de la lumière comme résultante de deux vitesses suivant les directions  $CD$  &  $CA$ ; la vitesse  $CD$  étant du même sens & de la même quantité que la vitesse  $AB$  de la terre, ne sauroit être apperçue, elle est détruite pour nous; l'œil ne sauroit voir en vertu d'un rayon qui seroit poussé du même sens & avec la même vitesse que l'œil. Ainsi la seule partie  $CA$  de la vitesse de la lumière subsistera pour nous, le rayon parviendra à notre œil sous la direction  $CA$ , & nous appercevrons l'étoile dans la ligne  $AC$ , ou suivant  $ED$  qui lui est parallèle; l'angle  $CBD$  est ce que nous appelons L'ABERRATION; c'est la quantité ou l'angle  $CBD$  dont une étoile paroît éloignée de sa véritable place, ou de la ligne  $BCE$ , par un effet du mouvement de la terre & de celui de la lumière M. d'Alembert, dans l'Encyclopédie au mot ABERRATION.

Définition  
de l'aberra-  
tion.

Autre ma-  
nière de con-  
cevoir l'aber-  
ration.

2802. L'on peut encore se représenter le même effet sous une autre forme; le corpuscule de lumière  $B$  vient frapper notre œil avec la vitesse  $CB$ ; mais puisque l'œil avance en même temps de  $A$  en  $B$ , avec la vitesse  $AB$ , il vient aussi frapper le rayon, en sorte qu'il y a un double choc tout à la fois, celui de la lumière qui vient contre l'œil avec la vitesse  $CB$ , celui de l'œil qui va contre la lumière avec la vitesse  $AB$ . A la place de ce dernier choc, on peut imaginer



(sans rien changer à l'effet qui en résultera), que le corpuscule soit venu de  $F$  en  $B$ , frapper l'œil avec une vitesse  $FB$ , égale à  $AB$ ; ainsi l'œil reçoit une impression suivant  $CB$ , & une suivant  $FB$ : de ces deux impressions faites suivant les côtés  $CB$  &  $FB$  du parallélogramme  $CF$ , il en résulte une impression unique & composée, qui se fait sentir suivant la diagonale  $DB$ , donc l'on appercevra l'étoile dans la direction  $BD$ , & non dans la direction  $BCE$ .

2803. Enfin il y a une autre manière de démontrer encore la vérité de cette proposition; & cette manière est celle de M. Bradley & de tous les auteurs qui en ont parlé d'après lui: elle ne paroît pas d'abord satisfaisante, comme M. Manfredi l'a remarqué; mais nous allons tâcher de la rendre palpable. Supposons le corpuscule lumineux en  $M$  (*fig.* 234), lorsque l'œil étoit en  $N$ , & qu'ils arrivent ensemble en  $O$ ; on sent que lorsque l'œil a passé en  $G$  le corpuscule de lumière étoit en  $H$ , en tirant  $GH$  parallèle à  $MN$ , car  $OG:OH::ON:OM$ . Il en seroit de même de tous les autres points que la terre parcourt sur la ligne  $NO$ ; l'on peut donc imaginer que  $MN$  soit un tube qui se meuve parallèlement à lui-même, & parcoure toutes les situations  $GH$ , le corpuscule de lumière se trouvera par ce moyen n'avoir jamais quitté le tube  $MN$ , & par conséquent sera parvenu à l'œil en décrivant  $PO$ , ou suivant la direction  $PO$ ; or nous voyons un objet dans la direction suivant laquelle le rayon vient à nous, donc l'étoile nous paroîtra sur une ligne  $PO$  parallèle à  $MN$ .

Troisième  
façon d'ex-  
pliquer l'a-  
berration.

*Fig.* 234.

2804. Un exemple familier fera peut-être encore mieux comprendre le mécanisme de ces impressions composées. Soit un vaisseau  $GCA$  (*fig.* 236), qui va de droite à gauche; que d'un angle  $C$  de ce vaisseau on ait jetté une pierre à l'autre angle  $A$ , & que dans le temps où elle a parcouru  $CA$ , le vaisseau ait avancé de la quantité  $CD$  ou  $AB$ ; celui qui est dans le vaisseau en  $A$  se trouvera alors parvenu au point  $B$ , &

Comparai-  
son familière.

*Fig.* 236.

fera frappé de la même manière que si le vaisseau n'avoit eu aucun mouvement; la pierre lui paroîtra venir de l'angle  $D$  suivant  $DB$ , comme elle lui auroit paru venir de  $C$  suivant  $CA$ , si le vaisseau eût été immobile; l'impression sera la même, puisque la relation du point  $C$  au point  $A$ , leur situation, leur distance ne dépendent en aucune façon du mouvement de ce vaisseau; ce mouvement est commun à la pierre & au vaisseau; & il est nul par rapport au choc. Néanmoins dans l'espace absolu cette pierre est venue de  $C$  en  $B$ ; ainsi elle a fait le même chemin réel qu'auroit fait une pierre qui du rivage  $R$ , eût été jettée directement en  $B$ . Voilà donc deux pierres, l'une qui vient du rivage  $R$ , & qui a parcouru la ligne  $CB$ , l'autre qui est partie du point  $C$ , angle du vaisseau, & qui a de même parcouru  $CB$ , à cause du mouvement de ce vaisseau: or celle-ci s'est fait sentir suivant la direction  $DB$ , donc celle qui auroit été jettée du rivage  $R$ , se seroit fait sentir réellement aussi dans la direction  $DB$ , à celui qui étant à l'angle  $A$  du vaisseau se seroit trouvé transporté de  $A$  en  $B$ , tandis que la pierre venoit de  $C$  en  $B$ .

Quantité de  
l'aberration  
observée.

2805. Après avoir expliqué le mécanisme de l'impression composée qui produit l'aberration; voyons quelle en est exactement la quantité. En examinant les observations d'un grand nombre d'étoiles, M. Bradley a jugé que le *maximum* de l'aberration étoit de  $20''\frac{1}{4}$ , par exemple, la plus grande variation de  $\gamma$  du Dragon en déclinaison est de  $39''$ , d'où l'on conclut par le rapport des sinus des latitudes (2823), que si cette étoile étoit située exactement au pôle de l'écliptique; elle décriroit un cercle dont le diamètre seroit  $40''\frac{1}{4}$ ; la 35<sup>e</sup>. étoile de la Giraffe a  $19''$  d'aberration; d'où M. Bradley conclut  $40''\frac{1}{2}$  pour la plus grande aberration; la dernière de la queue de la grande Ourse « est  $36''$  plus au sud vers le milieu de Janvier, qu'au mois de Juillet, ce qui donne  $40''\frac{1}{4}$ ; la Chèvre environ  $16''$  plus au nord en Février qu'en Août; ce qui suppose

40'' ; toutes les étoiles que M. Bradley a comparées donnent 40'' ou 41'', mais après le plus ample examen il a choisi 40'' (*Phil. transf. n<sup>o</sup>. 485*).

2806. La quantité de 20'' répond à  $8'7''\frac{1}{2}$ , dans la table des mouvemens du soleil ; ainsi l'on est assuré à moins de 5'' près, qu'il faut 8'7'' à la lumière du soleil pour arriver jusqu'à nous dans ses moyennes distances ; d'où il suit que la vitesse de la lumière est 10313 fois plus grande que la vitesse moyenne de la terre ; par-là l'on trouve la véritable quantité de l'équation de la lumière, dont on fait usage dans les tables des Satellites de Jupiter. C'est ainsi que les éclipses de ces Satellites ayant servi à découvrir l'aberration, celle-ci sert aujourd'hui à perfectionner leur théorie, en déterminant exactement la valeur d'une équation que l'on ne pouvoit pas espérer de connoître avec la même précision par le moyen de ces éclipses (2897).

2807. Avant que d'entrer dans l'explication détaillée des phénomènes de l'aberration, je dois avertir que le plan *ECBA* (*fig. 233*), qui joint la ligne *AB* décrite par la terre avec l'étoile *E*, s'appelle *plan d'aberration*, parce que c'est dans ce plan que l'aberration se fait ; le lieu apparent de l'étoile, son lieu vrai, l'œil de l'observateur, & l'espace qu'il décrit en 8' de temps se trouvent tous ensemble dans ce plan, en sorte que l'aberration ne peut faire paroître l'étoile dans un autre plan. On appelle aussi *triangle d'aberration* le triangle *CBA* formé par le chemin de la lumière avec celui de la terre, & dont le petit angle *C* mesure l'aberration. Voyons ce qui arrive quand le triangle d'aberration est rectangle ou obtus-angle.

2808. On doit être convaincu par les démonstrations précédentes (2801), qu'une étoile nous paroît toujours plus avancée du côté où nous marchons, & cela de la quantité de l'angle *BCA*, (*fig. 233*) ; la valeur de cet angle dépend du rapport de la vitesse *AB* de la terre, à la vitesse *CB* de la lumière, ce rapport est celui de 1 à 10313 (2806) ; ce qui donne un an-

Vitesse de  
la lumière.

Equation des  
Satellites.

Plan d'aberration.

Fig. 233.

Triangle  
d'Aberration.

Fig. 233.

gle de  $20''$  dans le cas où  $CB$  est perpendiculaire à  $AB$ ; ainsi l'aberration sera toujours de  $20''$  quand la route de l'œil sera perpendiculaire au rayon de l'étoile: mais lorsque  $CB$  (*fig. 237*), est inclinée sur la route  $AB$  de l'œil, alors l'angle  $ACB$  d'aberration devient moindre, & parce que  $CB$  est à  $AB$ , comme le sinus de l'angle  $A$  est au sinus de l'angle  $C$ , il suit que le sinus de l'arc d'aberration, ou l'aberration même, est comme le sinus de l'inclinaison du rayon  $CA$  sur la route de l'œil, qui est toujours un petit arc de l'orbite terrestre; c'est-à-dire, qu'il est égal à  $20''$  multipliées par le sinus de l'angle que fait la route de l'œil, avec le rayon de lumière; enfin, si la ligne  $CA$  s'inclinoit jusqu'à se confondre avec la ligne  $AB$ , l'angle  $C$  s'évanouiroit, & il n'y auroit plus d'aberration; ce qui d'ailleurs est évident, puisqu'alors le rayon de lumière arriveroit toujours à nous sous la même direction.

Aberration  
dans les routes  
obliques.

2809. Supposons maintenant que l'œil au lieu d'avancer de  $A$  en  $B$ , avance de  $B$  en  $A$ , en sorte que le rayon arrive en  $A$  en même temps que l'œil; si l'on décompose la vitesse  $CA$  (2801), suivant  $CE$  &  $CB$  on verra aisément que la vitesse  $CE$  est détruite par la vitesse  $BA$  de la terre, & qu'il ne reste que  $CB$  ou sa parallèle  $EA$ ; ainsi dans ce cas l'étoile paroîtra s'élever au-dessus de la ligne que l'œil décrit, au lieu qu'elle paroîroit s'abaisser dans le cas précédent; elle paroîtra en  $E$  au lieu de paroître en  $C$ ; toujours l'aberration porte une étoile du côté où va la terre. Quand la terre est au point  $G$  de son orbite  $GHD$  (*fig. 232*), & ensuite au point  $K$ , elle paroît aller en deux sens opposés: dans le premier cas, l'étoile est en opposition, & paroît à gauche du lieu moyen  $E$ : dans le second cas, la terre allant de  $D$  en  $K$ , l'étoile est en conjonction avec le soleil, & paroît de 20 secondes à droite, c'est-à-dire, à l'occident du point  $E$  sur une ligne  $DS$ .

On n'a que  
la différence  
des aberrations.

2810. Ainsi cette aberration de  $20''$  est relative seulement à la grandeur de l'orbite que décrit la terre, c'est

c'est la seule dont cette orbite puisse nous faire appercevoir ; elle feroit plus grande si la terre décrivait une plus grande orbite ; la lumière doit être plus de trois années à venir des étoiles jusqu'à nous, à raison de leur distance ( 2782 ) ; mais parce que cette durée est toujours la même à 8' près , nous ne nous appercevons que de la variation que ces 8' produisent en plus ou en moins. Comme la terre fait 20'' pendant ces 8', cette différence de 20'' qui est tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, quelquefois nulle pour une même étoile, & qui affecte différemment les diverses étoiles suivant leur situation, produit les inégalités que les astronomes ont observées, & que nous appelons l'*Aberration*.

2811. Cette même quantité de 20'', qui est l'aberration absolue prise dans la région de l'étoile, peut devenir beaucoup plus grande quand on la rapporte à l'écliptique ou à l'équateur ; ainsi l'aberration de l'étoile polaire en ascension droite, va jusqu'à 8' 2'' ; il suffit, pour le comprendre, de recourir à l'art. 892.

2812. Nous n'avons eu égard dans tout ce qui précède qu'au mouvement annuel de la terre, & non point au mouvement diurne, parce qu'il est trop lent pour qu'il puisse avoir un effet sensible : en effet, la vitesse du mouvement diurne est à celle du mouvement annuel, comme  $\frac{365,26}{22910}$  est à 1, c'est-à-dire, en raison inverse des temps, & en raison directe des distances ; elle n'est donc que  $\frac{1}{63}$  de la vitesse du mouvement annuel, ce qui feroit une aberration de deux tiers de seconde, dans l'espace de 12 heures.

2813. L'effet de l'aberration sur une étoile qui seroit située au pôle même de l'écliptique, est le plus simple de tous, & nous commencerons par celui-là, en faisant voir que l'étoile paroîtroit décrire un cercle de 40'' de diamètre autour de son vrai lieu, c'est-à-dire, autour du pôle de l'écliptique. Le cercle *ABCD* (fig. 235), représente l'écliptique ou l'orbite de la terre, Aberration d'une étoile située au pôle de l'écliptique.

Fig. 235.

que l'on suppose circulaire, parce que la différence de ses diamètres est ici négligeable ;  $E$  exprime le pôle de cette orbite , il faut le concevoir élevé perpendiculairement au dessus du plan de la figure ; autour du pôle  $P$  l'on décrit un petit cercle , dont le diamètre est de  $40''$  ( 2805 ) ; lorsque la terre est en  $A$  , & va de  $A$  vers  $B$  , l'étoile située au pôle de l'écliptique , paroîtra  $20''$  plus avancée du même côté , c'est-à-dire , en  $a$  ( 2801 ) ; quand la terre sera en  $B$  , l'étoile paroîtra en  $b$  , de-là en  $c$  ,  $d$  , & elle aura parcouru , dans l'espace d'un an , le petit cercle  $abcd$  , décrit autour du pôle de l'écliptique , toujours plus avancée de  $90^\circ$  dans son petit cercle , que la terre ne l'est dans le sien , & ayant toujours  $20''$  de moins en latitude qu'elle n'auroit dans son vrai lieu.

Aberration  
d'une étoile  
dans l'éclip-  
tique.

Fig. 232.

2814. Pour les étoiles qui sont dans le plan même de l'écliptique , soit  $GHK$  ( fig. 232 ) , le plan de l'orbite de la terre ,  $E$  une étoile située dans le même plan ,  $S$  le soleil ,  $G$  le point où est la terre quand l'étoile est en opposition ,  $K$  le point où est la terre quand l'étoile est en conjonction avec le soleil : dans l'opposition  $G$  la terre allant de  $B$  en  $G$  , ou d'occident vers l'orient , l'étoile paroîtra plus avancée de  $20'$  vers l'orient , c'est-à-dire , que sa longitude sera augmentée de  $20''$  ; mais dans la conjonction la terre allant dans un sens contraire par rapport à l'étoile , c'est-à-dire , de  $D$  vers  $K$  , la longitude de l'étoile sera diminuée de  $20''$ . Dans les quadratures  $Q$  &  $H$  l'aberration sera nulle , parce que le rayon  $HI$  qui se dirige à l'étoile , & qui est parallèle à  $SE$  , à cause de la grande distance des étoiles ( 2782 ) , devenant la tangente de l'orbite ou de la route de l'œil , & se confondant avec elle en  $H$  , il n'y a plus d'aberration ( 2808 ).

2815. Quoique la terre aille toujours du même sens , c'est-à-dire , toujours d'occident vers l'orient par rapport au soleil ; cependant par rapport à l'étoile  $E$  qui est au-delà du grand orbe , la terre allant de  $B$  en  $G$  , & six mois après de  $D$  en  $K$  , paroît avoir des di-

rections différentes, comme la figure le fait voir; ainsi l'étoile dans le premier cas paroîtra trop à gauche ou trop orientale, & dans le second cas trop à droite ou trop occidentale, par rapport au rayon *KSGE* mené au vrai lieu de l'étoile.

Fig. 231.

De-là il fuit que pour connoître quel est le lieu du soleil au temps où l'aberration d'une étoile en longitude est la plus grande, & soustraïve de la longitude moyenne, il fustit de prendre la longitude même de l'étoile: par exemple, Sirius a  $3^s 10^o$  de longitude, le soleil a la même longitude le 1<sup>er</sup> de Juillet, alors Sirius est en conjonction avec le soleil, la terre étant en *K*, & l'aberration fait paroître sa longitude trop petite, enforte qu'il faut alors soustraire l'aberration de la longitude moyenne de l'étoile, pour avoir sa longitude apparente.

Aberration soustraïve.

2816. L'ARGUMENT ANNUEL de l'aberration, en général, est le chemin qu'a fait le soleil depuis que l'étoile paroîsoit la moins avancée, ou la longitude du soleil au temps où l'aberration est la plus grande, & en même temps soustraïve, dont on a ôté le lieu du soleil pour le jour donné. Si l'on prend la longitude même de l'étoile, on aura le lieu du soleil au temps où la longitude apparente de cette étoile est la plus petite qu'elle puisse être dans le cours de l'année, & l'on s'en sert pour avoir l'argument annuel de l'aberration en longitude.

Argument de l'aberration en longitude.

Pour trouver l'aberration en longitude hors des conjonctions ou des oppositions, c'est-à-dire, dans les situations intermédiaires, soit *FL* le petit espace de  $20''$ , parcouru en  $8'$  de temps par la terre, en un point de son orbite qui est éloigné du point *G* de l'opposition de la quantité *GL*: soit *MF* le chemin de la lumière pendant le même temps, *FML* l'angle d'aberration; le rayon *MF* de l'étoile étant parallèle à la ligne *EGK*, l'angle *MLF* ou l'angle *LFN* (car on peut prendre ici l'un pour l'autre, puisqu'ils ne diffèrent pas de  $20''$ ), ont pour mesure l'arc *FH* ou *LH*; ainsi l'angle d'aberration ( $2808$ ) est égal à  $20'' \sin. F$ , ou  $20'' \sin. LH$ , ou  $20'' \cos. LG$ ; donc l'aberration en longitude est proportionnelle au sinus de la

Fig. 232.  
 Dans quel  
 cas elle est  
 additive.

*distance à la quadrature*, ou de la distance au point où elle est nulle, ou proportionnelle au *cosinus de l'argument* d'aberration ; il faut l'ajouter à la longitude moyenne depuis la quadrature qui précède l'opposition, jusqu'à celle qui suit l'opposition, ou lorsque la longitude de l'étoile moins celle du soleil, qui est l'argument d'aberration en longitude, se trouve de 3, 4, 5, 6, 7, 8 signe ; il faut l'ôter de la longitude moyenne si c'est du côté de la conjonction, c'est-à-dire, si l'argument est 9, 10, 11, 0, 1, 2 signes. En effet, tant que la terre va de *Q* en *G*, supposant qu'on compte les longitudes du point *Q*, la longitude du soleil est entre 6 & 9, & l'ôtant de celle de l'étoile *E* qui est de 35, la différence est entre 9 & 6, l'aberration est alors additive.

2817. Ce que nous avons démontré pour l'aberration en longitude d'une étoile située dans le plan de l'écliptique, a lieu pour une étoile située au-dessus ou au dessous de l'écliptique, à quelque latitude que ce soit. En effet, que l'on conçoive le point *M* du triangle d'aberration *MFL*, élevé au dessus du plan de la figure, & dirigé en haut vers une étoile, la base *LF* demeurant toujours dans le plan de notre figure ; l'angle d'aberration *M* ne changera pas de grandeur ; s'il a été de 10'' dans le temps que les lignes *LM*, *FM* étoient couchées dans le plan de la figure, il sera encore de 10'', & l'on pourra toujours dire que l'étoile paroît rapprochée de 10'' du plan qui passe sur *ECK* ; ce plan que l'on concevra tiré perpendiculairement à l'écliptique, & passant par l'étoile *E*, est le cercle de latitude où paroît l'étoile, & qui marque sa longitude dans le ciel, & celle de la terre quand l'étoile est en opposition.

Lorsque l'étoile étoit dans le plan même de l'écliptique, l'aberration la faisoit paroître plus loin de la ligne *EGK*, qui étoit aussi dans le plan de l'écliptique ; si l'étoile est plus relevée, l'aberration la rapprochera de quelque autre ligne plus élevée que *GK*, placée à la même hauteur que l'étoile, & dans le plan du même cercle de latitude qui passe sur *ECK*.



2818. L'aberration en longitude que nous venons de déterminer, est mesurée dans la région où se trouve l'étoile, parallèlement à l'écliptique, sur un arc de grand cercle; mais si on la rapporte à l'écliptique au moyen de deux cercles de latitude, tirés du pôle de l'écliptique par le lieu apparent & par le lieu moyen de l'étoile, elle deviendra plus grande (892), & il faudra la diviser par le cosinus de la latitude, pour avoir l'aberration en longitude dans l'écliptique même. Ainsi la plus grande

aberration en longitude est égale à  $\frac{20''}{\cos \text{ lat.}}$ , & l'aberration pour un temps donné,  $\frac{20'' \cos. \text{ argum.}}{\cos. \text{ lat.}}$ , c'est-à-dire,  $20''$  divisées par le cosinus de la latitude de l'étoile, & multipliées par le cosinus de l'élongation trouvée pour ce même temps, ou de l'argument de l'aberration (2816); elle est soustractive dans les trois premiers signes de l'argument, & dans les trois derniers.

2819. Il est aisé de former une table de la plus grande aberration en longitude, telle qu'on la trouve dans le Recueil de tables que j'ai donné en 1759, (p. 183). Une étoile située à  $60^\circ$  de latitude, a sa plus grande aberration de  $40''$ , parce que  $\frac{20''}{\cos. 60^\circ} = 40''$ , & l'aberration de *Sirius* qui a  $39^\circ 33'$  de latitude, est  $25'' 9$ . Quand on a la plus grande aberration, & qu'on veut avoir l'aberration actuelle pour un temps donné, il faut chercher le lieu du soleil pour ce même temps, en retrancher la longitude de l'étoile, ce qui donne l'argument de l'aberration en longitude (2816); & multiplier la plus grande aberration par le cos. de l'argument. La longitude de *Sirius* en 1750 étoit  $3^\circ 10' 38''$ , je suppose qu'on veuille avoir son aberration en longitude le 1<sup>er</sup>. Mai 1750 à midi, on calculera la longitude du soleil pour ce jour-là, ou bien on la prendra dans une Ephéméride; je la suppose  $1^\circ 10' 55''$ , on la retranchera de celle de *Sirius*; la différence  $59^\circ 43'$  est l'argument annuel de l'aberration en longitude, dont le cosinus multiplié par  $25'' 9$ , donnera  $13'' 1$ , aberration de *Sirius* en longitude le 1<sup>er</sup>. Mai 1750; elle est soustractive, parce que

Aberration  
pour un temps  
donné.

c'est dans le premier quart de l'argument, ou du côté de la conjonction (2816).

De l'aberration en latitude.

Fig. 235.

1820. J'ai considéré jusqu'ici l'effet de l'aberration parallèlement à l'écliptique ; il est temps de voir ce qui en résulte du haut en bas, ou du nord au sud, c'est-à-dire, perpendiculairement à l'écliptique. Lorsque la terre est située vers le point *A* de son orbite (fig. 235), à égale distance des syzygies *B* & *D*, la portion *AM* de son orbite, qu'elle décrit alors, est parallèle à la ligne des syzygies *BD* ; ainsi l'effet de l'aberration ne peut point rapprocher l'étoile de cette ligne, & par conséquent ne peut changer sa longitude. Le parallélogramme d'aberration *CSAM*, est parallèle au plan du cercle de latitude élevé perpendiculairement sur *B* & *D* ; concevons le plan de ce parallélogramme relevé perpendiculairement sur le plan de la figure, au lieu d'être couché sur le côté, comme on est obligé de l'exprimer dans la figure ; soit *S* l'étoile qu'il faut concevoir perpendiculairement au-dessus du point *N*, en sorte que sa latitude soit égale à l'angle *SAN*, l'étoile au lieu de paroître sur le rayon *MS* paroît sur le rayon *AS* ou *MC* ; & l'aberration *ASM* ou *CMS*, sera mesurée par  $MF = AM \sin. MAF$  (2808), c'est-à-dire,  $20'' \sin. \text{latit.}$  C'est ainsi que l'on a construit la table de la plus grande aberration en latitude, (*Tab. astron.* 1759, pag. 183).

La plus grande aberration en latitude.

Dans le cas où la terre étant en *A* l'étoile paroît en quadrature, tout l'effet de l'aberration se porte de haut en bas, c'est-à-dire, que l'aberration est toute en latitude, & si la terre se rapproche de l'étoile, en allant de *A* en *M* l'étoile est aussi rapprochée de l'écliptique, ou du plan dans lequel se meut la terre ; car alors la latitude apparente ou l'angle *CMN* est moindre que l'angle *SAN*, latitude moyenne qui auroit lieu sans l'aberration. Si la terre s'éloignoit de l'étoile en allant de *M* en *A*, le contraire arriveroit & l'étoile paroîtroit éloignée de l'écliptique par l'effet de l'aberration. C'est ce qui arrive dans la seconde quadrature, après l'opposition, lorsque la terre est en *C*.

2821. Telle est l'aberration en latitude au temps des quadratures, c'est-à-dire, lorsqu'elle est la plus grande; cette aberration en latitude est nulle dans la conjonction & dans l'opposition; car alors le chemin  $BG$  de la terre, (fig. 232) est perpendiculaire au rayon  $CG$  de l'étoile, le triangle d'aberration  $CEG$  s'étend de droite à gauche, c'est-à-dire, en longitude, quoique son sommet  $C$  soit élevé au-dessus du plan de l'écliptique, & ne peut rien changer à la position de l'étoile du haut en bas, c'est-à-dire, en latitude; la terre ne se rapproche point alors du rayon  $CB$  de l'étoile, du moins dans la direction du cercle de latitude; en sorte qu'il n'y a point d'aberration en latitude, car celle-ci vient de la quantité dont la terre se rapproche du rayon de l'étoile, le long du cercle de latitude; comme l'aberration en longitude vient de la quantité dont la terre se rapproche du rayon de l'étoile dans le sens de l'écliptique.

Fig. 232.

2822. Pour trouver l'aberration en latitude dans les positions de la terre intermédiaires entre l'opposition & la quadrature, il ne faut qu'examiner de combien la terre se rapproche du rayon de l'étoile, ou la quantité  $FN$  qui prend la place de  $QR$ ; lorsqu'elle s'avantouit, ce qui arrive en  $G$ , l'aberration en latitude s'évanouit avec elle, comme nous venons de l'expliquer.

On comprendra mieux pourquoi l'aberration en latitude dépend de la quantité  $FN$  à l'aide des réflexions suivantes. Le triangle d'aberration qui a pour base  $RQ$  lorsque la terre est en  $R$ , &  $BG$  lorsque la terre est en  $G$ , n'étant point situé dans l'écliptique, a une partie de son effet de droite à gauche, qui est mesurée par  $LN$ , & une partie de haut en bas qui est mesurée par  $NF$ ; en effet, supposons que la terre au lieu d'aller directement de  $F$  en  $L$ , eût été de  $F$  en  $N$ , & de  $N$  en  $L$ , elle n'auroit éprouvé aucune aberration en latitude en allant de  $N$  en  $L$ , puisque le triangle d'aberration ayant alors pour base la ligne  $NL$ , tous ses points ont la même latitude, & font le même angle avec le plan de l'écliptique; mais en allant de  $F$  en  $N$ ,

Fig. 235.

toute l'aberration est en latitude, comme quand la terre alloit de  $A$  en  $M$  dans la fig. 235, & directement à l'étoile; ainsi  $FN$  est la mesure de l'aberration en latitude; c'est la même chose, quant à l'aberration que la terre ait décrit  $FNL$ , ou  $HL$  seulement; on voit assez par tout ce qui précède que  $NL$  ne produit d'aberration en longitude qu'à raison de ce que le point  $L$ , est plus loin de la ligne des syzygies  $EGK$  que le point  $F$ ; par la même raison la ligne  $FN$  ne produit d'aberration en latitude, que parce que le point  $F$  est plus éloigné de la ligne des quadratures  $HS$ , que le point  $L$ ; donc les mêmes aberrations auroient eu lieu quand même la terre auroit décrit séparément & successivement les lignes  $FN$  &  $NL$ .

2823. La ligne  $FN$  est donc la mesure de l'aberration en latitude, & comme elle est plus petite que  $FL$  qui donnoit la plus grande aberration, on aura aussi une aberration plus petite que  $20''$ ; le petit triangle  $FNL$  est semblable au triangle  $SLP$  (3307), & les côtés homologues sont proportionnels, donc  $SL:VL::LF:FN$ , c'est-à-dire, que le rayon est au sinus de la distance à l'opposition, comme la plus grande aberration en latitude est à l'aberration actuelle en latitude; la terre décrivant  $FN$ .

Quantité de  
l'aberration  
en latitude.

Donc pour avoir l'aberration en latitude à un jour donné, il faut multiplier la plus grande aberration, ou  $20''$  sin. lat. par le sin. de l'élongation de l'étoile; la latitude en sera diminuée avant l'opposition, ou vers la première quadrature & augmentée après l'opposition, soit dans les étoiles boréales, soit dans celles dont la latitude est australe.

2824. Pour trouver l'argument d'aberration en latitude, on prendra la longitude du soleil au temps où l'aberration en latitude est la plus grande, & en même temps soustractive, ainsi que nous l'avons fait pour l'aberration en longitude (2816); il suffira d'ajouter trois signes à la longitude de l'étoile, car dans la première quadrature la terre étant en  $Q$ , le soleil est évidemment plus

plus avancé de trois signes que le lieu de l'étoile. Ainsi de la longitude de l'étoile augmentée de trois signes, on ôtera la longitude du soleil à un temps donné, & l'on aura la distance de la terre au point *Q*, ou l'argument de l'aberration en latitude, dont le cosinus multiplié par la plus grande aberration, donnera l'aberration en latitude; car le cosinus de la distance de la terre au point *Q*, est la même chose que le sin. de sa distance au point *G*, ou de l'élongation de l'étoile. Cette aberration sera soustractive de la latitude moyenne dans les signes 0, 1, 2, 9, 10, 11; mais elle sera additive dans le second & le troisième quart de l'argument.

Dans quel  
cas elle est ad-  
ditive.

2825. Par le moyen des expressions de l'aberration en longitude (2818), & en latitude (2823), il est aisé de démontrer que les étoiles par l'effet de l'aberration paroissent décrire des ellipses, qui sont plus ou moins ouvertes, suivant que les étoiles sont plus ou moins éloignées de l'écliptique, ainsi que par l'effet de la parallaxe (2767).

Soit *E* (fig. 238) le lieu moyen de l'étoile, celui où elle paroîtroit sans les inégalités de l'aberration; la ligne *LLK* parallèle à l'écliptique, & supposée de 40'', l'étoile sera en *K* la plus occidentale qu'elle puisse être, ayant la moindre longitude possible, au temps de sa conjonction au soleil (2814); elle sera en *L*, la plus orientale, & ayant sa plus grande longitude, au temps de l'opposition. L'aberration en longitude sera nulle, & l'étoile répondra au point *E* dans le temps des quadratures; si l'on décrit un demi-cercle *LCK*, & qu'on prenne l'arc *CD* égal à la distance de l'étoile à sa quadrature, ou *LD* égal à son élongation; en abaissant *DV*, l'on sera sûr que *EV* est l'aberration en longitude; car  $EV = EL \sin. CD = 20'' \cos. \text{élong.}$  & si on la rapporte à l'écliptique on aura  $(892) \frac{20'' \cos. \text{élong.}}{\cos. \text{lat.}}$ ; c'est la valeur de l'aberration en longitude (2818).

Fig. 238.

Ayant pris de même sur le cercle de latitude une  
Tome III. B b

*Fig. 238.* quantité  $EA$ , égale à la plus grande aberration en latitude au temps des quadratures, on décrira le cercle  $ABF$ , & ayant pris l'arc  $AT$  égal à l'élongation ou à la distance de l'étoile à la ligne des syzygies, on tirera  $PTS$  qui rencontrera  $IS$  au point  $S$ ; alors  $RT$  ou  $SI'$  fera l'aberration en latitude; car  $TR = EA$  sin. élong.  $= 20''$  sin. latit. sin. élong. ce qui est l'expression de l'aberration en latitude (2823). L'étoile paroîtra donc en  $S$ ; or le point  $S$  appartient évidemment à une ellipse, car  $II'$  est le sinus de l'arc  $CD$  dans le grand cercle, &  $IS$  est le cosinus du même arc dans le petit cercle, ce qui détermine une ellipse (3264).

Les étoiles  
paroissent dé-  
crire une el-  
lipse.

2826. Ainsi chaque étoile par l'effet de l'aberration décrit une ellipse  $ALFK$ , dont le grand axe est parallèle à l'écliptique, & a  $45''$  de longueur. Le point  $L$  qui est le plus à gauche ou à l'occident est le lieu où paroît l'étoile lorsqu'elle est en opposition (2814); le point  $K$  est celui de la conjonction, le point  $A$  si c'est une étoile australe, ou le point  $F$  si c'est une étoile boréale, c'est-à-dire, le point de l'ellipse qui est le plus près de l'écliptique, marque le lieu apparent de l'étoile trois mois après la conjonction. L'aberration en longitude étant toujours le cosinus de l'élongation de l'étoile dans le cercle  $KCDLH$ , si l'on marque en  $K$  le lieu du soleil qui est égal à la longitude de l'étoile, & qu'on divise le cercle en  $360^\circ$ , les perpendiculaires abaissées de chaque degré de longitude sur le grand axe  $LEK$ , marqueront sur l'ellipse tous les points où l'étoile doit paroître aux mêmes temps; je suppose que cette ellipse soit celle que paroît décrire *Arcturus*, dont la longitude est de  $6^s 21^\circ$ ; on marquera en  $K$ ,  $6^s 21^\circ$ , c'est le lieu du soleil au temps où *Arcturus* paroît en  $K$  le 13 Octobre; le cercle  $KDLH$  étant divisé en  $360^\circ$ , on marquera les longitudes du soleil de  $K$  en  $H, L, D$ , le point  $D$  tombera sur  $1^s 26^\circ$  de longitude; abaissant donc la perpendiculaire  $DS$ , elle marquera en  $S$  le lieu apparent de l'étoile sur son ellipse lorsque le soleil a  $1^s 26^\circ$  de longitude,

c'est-à-dire, le 16 Mai : cela est évident par la construction précédente. L'on peut donc aussi diviser le cercle  $L D C K H$  en 365 jours, en partant du point  $K$  ou fera le jour de la conjonction, & abaissant une perpendiculaire  $DV$  du jour marqué en  $D$  sur le grand axe, elle déterminera le lieu  $S$  où doit paroître l'étoile au jour donné; c'est ainsi que j'ai marqué dans la *fig.* 230, les situations d'Arcturus & de Sirius sur leurs ellipses d'aberration; Arcturus est à l'extrémité occidentale du grand axe de son ellipse à droite, le 13 Oct. jour de sa conjonction; il est à l'extrémité inférieure ou méridionale du petit axe, le 11 Janvier jour de la première quadrature; au contraire Sirius est à l'extrémité supérieure ou boréale du petit axe de son ellipse, le 3 Octobre, jour de sa première quadrature; parce que les étoiles paroissent toujours le plus près de l'écliptique trois mois après la conjonction, les étoiles boréales sont alors au midi, & les étoiles australes sont au nord. L'ellipse d'Arcturus est inclinée par rapport à la ligne horizontale  $AB$ , que je suppose parallèle à l'équateur, de la quantité de l'angle de position (1046). Les mois que j'ai marqués au-dedans de l'ellipse sont pour l'effet de la parallaxe (2768), qui faisoit paroître l'étoile au même point de l'ellipse trois mois plutôt que ne fait l'aberration.

Diviser l'ellipse en jours.

*Fig.* 230.

Ellipse de Sirius & d'Arcturus.

2827. Le P. Boscovich, dans sa dissertation, *de annuis fixarum aberrationibus*, imprimée à Rome en 1742, chez Komarek, à l'occasion des exercices du college Romain, fait voir qu'une parallaxe combinée avec l'aberration produiroit encore une ellipse, de même ellipticité, pour la trace apparente des étoiles; avec cette différence que le lieu de l'étoile seroit éloigné du lieu où elle paroît en vertu de l'aberration toute seule, vers l'endroit où la feroit paroître la parallaxe, d'un arc dont la tangente est au rayon comme la parallaxe est à l'aberration.

2828. L'aberration en longitude  $EV$  (*fig.* 238), que nous venons de déterminer sur le parallèle de l'é-

*Fig.* 238.

Bb ij

fig. 238.

toile en supposant  $EL$  de  $20''$ , doit être réduite à l'écliptique pour les usages astronomiques, c'est-à-dire, qu'il faut la diviser par le cosinus de la latitude de l'étoile (892), de-là vient que l'aberration en longitude qui est toujours de  $20''$  de grand cercle, si on la prend sur le parallèle d'une étoile, devient très-grande pour les étoiles voisines du pôle de l'écliptique, si on la mesure sur l'écliptique.

2829. L'ellipse d'aberration devient d'autant plus ouverte que les étoiles s'éloignent plus de l'écliptique; elle forme un cercle de  $40''$  de diamètre pour une étoile située au pôle même de l'écliptique, ensuite le demi petit axe diminue comme le sinus de la latitude; enfin cette ellipse devient infiniment étroite & se réduit à la ligne droite  $KLL$  pour les étoiles situées exactement dans l'écliptique. Mais dans le cas de la ligne droite on assigneroit également le lieu apparent de l'étoile sur cette ligne, en divisant le cercle  $KCDL$  en 365 jours; & abaissant de chaque jour des perpendiculaires  $DE$ , sur le grand axe; ces perpendiculaires marqueroient sur la ligne droite  $LEK$ , la situation apparente de l'étoile pour chaque jour de l'année, & ses distances au point  $E$  du milieu seroient toujours les cosinus de l'élongation de l'étoile.

Auteurs qui  
ont parlé de  
l'aberration.

2830. Au moyen de l'ellipse d'aberration, l'on peut trouver l'aberration en déclinaison & en ascension droite, comme l'ont fait M. Clairaut (*Mém. acad.* 1737), M. Euler, dans les Mémoires de Berlin, M. Simpson (*Essay on several Subjects*, 1740); on peut voir encore le *Traité sur l'aberration* par M. Fontaine des Crues, in-8°. 1744, & M. de la Caille, dans ses leçons d'astronomie. Je vais en donner aussi le détail, parce que les astronomes font un usage perpétuel des aberrations en ascension droite, & en déclinaison; M. de la Caille en a donné des tables (*Astron. fundam.* 1757), qui se trouvent aussi dans le recueil de tables que je donnai en 1759 (*Tables astronomiques de M. Halley pour les planètes & les comètes augmentées, &c.* in-8°. chez



Nyon, Libraire, Quai des Augustins, à l'Occasion.

2831. La première chose que nous avons à faire est de connoître le temps de l'année auquel l'aberration en déclinaison est nulle, ou le lieu du soleil qui répond à ce temps. Soit  $E$  le lieu moyen d'une étoile (fig. 239);  $PEG$  le cercle de latitude qui passe par l'étoile  $E$ ,  $REe$  le cercle de déclinaison,  $PER$  l'angle de position (1046),  $ANGML$  l'ellipse que l'étoile paroît décrire chaque année par l'effet de l'aberration, & dont le grand axe  $LK$  est nécessairement perpendiculaire à  $PEG$  (2826); ayant tiré  $MN$  perpendiculaire au cercle de déclinaison  $REe$ , l'on voit que lorsque l'étoile fera en  $M$  & en  $N$ , l'aberration en déclinaison sera nulle; supposons autour de l'ellipse d'aberration un cercle circonscrit  $LIYK$  divisé en signes & en degrés, marquons au point  $K$  la longitude même de l'étoile, puisque l'étoile est au point  $K$  de son ellipse, quand la longitude du soleil est égale à celle de l'étoile; les points  $B$  &  $Y$  du cercle circonscrit déterminés par les ordonnées  $BC$ , &  $YI$  représenteront les lieux du soleil au temps où l'étoile paroît en  $M$  & en  $N$  (2826). Pour connoître la situation du point  $Y$ , ou l'angle  $YEI$ , on observera que par la propriété de l'ellipse  $WN$  est à  $WY$ , comme le petit axe de l'ellipse est au grand (3256), ou comme le sinus de la latitude de l'étoile est au rayon (2820); mais aussi  $WN$  est à  $WY$  comme la tangente de  $WEN$ , est à la tangente  $WEY$ ; donc  $WEN$  étant égale à  $PER$  ou à l'angle de position; le sinus de la latitude de l'étoile est au rayon comme la tangente de l'angle de position, est à la tangente d'un angle; qui est la distance entre le lieu du soleil au temps de la conjonction, c'est-à-dire, le lieu même de l'étoile qu'on suppose marqué en  $K$ , & le lieu du soleil quand l'aberration en déclinaison est nulle.

Aberration  
en déclinaison.  
Fig. 239.

2832. Il faut trouver aussi le lieu du soleil, lorsque l'aberration en déclinaison est la plus grande; supposons à l'ellipse  $LQA$  une tangente  $QI$  parallèle à  $MN$ ; le point de contact  $Q$  marque le point où l'aberration en déclinaison  $QH$  ou  $IE$  est la plus grande;  $EQ$  se trouve par cette construc-

Fig. 239.

Lieu de la  
plus grande  
aberration en  
déclinaison.

tion être un diamètre conjugué au diamètre  $EM$ , puisque la tangente  $QI$  est parallèle à  $MN$ . Ayant tiré l'ordonnée  $DQF$  au cercle, le point  $F$  est le lieu du soleil au temps où l'aberration en déclinaison est la plus grande; si l'on tire le rayon  $EF$  du cercle, l'angle  $FEB$  fera un angle droit (3261), ce qui prouve que le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration en déclinaison, ou le point  $F$ , est éloigné de 3 signes du lieu du soleil  $B$  ou  $Y$  au temps où l'aberration en déclinaison est nulle (2831). Je donnerai ci-après une autre méthode pour trouver la même chose (2836).

2833. Pour trouver la valeur de la plus grande aberration en déclinaison  $QH$ , par rapport à la plus grande aberration absolue  $EL$  qui est de  $20''$ , on observera que  $EQ$ ,  $EM$  étant des diamètres conjugués, on a par la propriété de l'ellipse  $QH \times EM = EG \times EL$  (3262);  $\frac{QH}{EL} = \frac{EG}{EM} = \frac{EG \cdot BE}{EM \cdot BE} = \frac{CM \cdot BE}{EM \cdot BC}$  (en mettant  $\frac{CM}{BC}$  à la place de  $\frac{EG}{BE}$ ); mais  $\frac{CM \cdot BE}{EM \cdot BC}$  est égal à  $\frac{CM}{EM}$  divisé par  $\frac{BC}{BE}$ , c'est-à-dire, au sin. de l'angle  $MEC$ , divisé par le sinus de l'angle  $BEC$ ; donc  $QH : EL :: \sin. MEC : \sin. BEC$ , &  $\sin. BEC$  ou  $\cos. FEL : \sin. MEC$  ou  $PER :: EL$  ou  $20'' : QH$ ; donc le cosinus de l'élongation de l'étoile au temps de la plus grande aberration en déclinaison est au sinus de l'angle de position, comme  $20''$  sont à la plus grande aberration en déclinaison. On en verra ci-après une autre expression (2841).

La plus grande  
aberration.

2834. L'aberration en déclinaison en tout autre temps de l'année, est comme le sinus de la distance du soleil aux points  $B$  ou  $Y$  dans lesquels elle étoit nulle. Soit  $S$ , le lieu apparent de l'étoile pour un temps donné,  $X$  le lieu du soleil qui y répond,  $ST$  l'aberration en déclinaison; que l'on mène une ordonnée  $SV$  au diamètre  $EN$ ,  $ST$  fera toujours à  $SV$  en raison constante, puisque toutes les ordonnées telles que  $SV$  font le même angle avec le diamètre  $EN$ , & avec les lignes telles que  $ST$ , qui lui sont perpendiculaires. De plus la ligne  $SV$  ordonnée au diamètre  $NEM$  de l'ellipse

a un rapport constant avec  $XZ$ , perpendiculaire à  $EY$ , & sinus de l'arc  $XY$ ; en effet on n'a qu'à considérer l'ellipse  $ANK$ , comme projection du cercle circonscrit (3257) en concevant que ce cercle est relevé, & tourne autour de l'axe  $LK$ , suffisamment pour que le point  $Y$  réponde perpendiculairement en  $N$ , le diamètre  $EN$  de l'ellipse sera la projection du rayon  $EY$  du cercle; le diamètre  $EQ$  sera la projection de  $EF$ ; toute ligne parallèle à  $EF$ , telle que  $XZ$  aura sa projection  $SV$  parallèle à  $EQ$ , car deux lignes parallèles projetées perpendiculairement sur un plan ne peuvent former que des projections parallèles (\*), donc  $SV$  projection de  $XZ$  a un rapport constant avec  $XZ$ ; mais  $SV$  a aussi un rapport constant avec  $ST$ ; donc  $XZ$  aura aussi un rapport constant avec  $ST$ ; or la ligne  $XZ$  est le sinus de l'arc  $XY$ , distance entre le lieu  $Y$  du soleil lorsque l'aberration étoit nulle, & le lieu actuel  $X$  du soleil, & l'aberr. en décl. est  $ST$ .

2835. Ainsi connoissant le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration en déclinaison (2832), & ôtant le lieu actuel du soleil, on aura l'argument annuel d'aberration (2816), dont le cosinus multiplié par la plus grande aberration, donne l'aberration actuelle en déclinaison.

2836. Il nous reste à donner des règles générales pour l'aberration en déclinaison, qui dispensent les calculateurs d'examiner la situation respective des cercles dont nous avons fait usage, & qu'on puisse appliquer facilement dans tous les cas. Soit  $P$  le pôle du monde (fig. 240);  $O$  le pôle de l'écliptique,  $EQ$  l'équateur,  $EC$  l'écliptique,  $S$  une étoile,  $PSAM$  le cercle de déclinaison,  $OSL$  le cercle de latitude; le point  $L$  ayant la même longitude que l'étoile, marque le lieu du soleil au temps où l'aberration en latitude est nulle; ayant tiré le cercle  $STR$  perpendiculaire au cercle de déclinaison

Pl. XXXII.  
Fig. 240.

(\*) On peut prouver encore autrement que  $SV$  est la projection de  $XZ$ , en achevant de tirer les ordonnées  $XZO$  &  $SPS$ , l'une au cercle, l'autre à l'ellipse; on voit alors d'une manière évidente que le point  $X$  a sa projection en  $S$  le point  $O$  en  $s$ , & que  $SVs$  est la projection de  $XZO$ .

Fig. 240. son  $PSA$ , le point  $T$  marquera le lieu du soleil lorsque l'aberration en déclinaison est nulle, puisque dans le triangle sphérique  $STL$  on a fin.  $SL : R :: \cot. TSL : \cot. TL$  (3667), ce qui revient à la proportion de l'article 2831.

2837. Connoissant le point  $A$  de l'équateur qui marque l'ascension droite de l'étoile  $S$ , on trouvera facilement le point  $M$  de l'écliptique (898) & sa déclinaison  $AM$ . On prendra la somme de  $AM$  & de la déclinaison  $AS$  de l'étoile, si elles sont de différentes dénominations, ou leur différence, si elles sont toutes deux australes ou boréales, on aura l'arc  $SM$ ; dans le triangle  $EAM$  rectangle en  $A$ , fin.  $M = \frac{\cot. E}{\cot. AM}$  (3669); de même dans le triangle  $STM$  rectangle en  $S$ , on a  $\cot. T = \sin. M \cot. SM$ ; donc  $\cot. T = \frac{\cot. SM \cot. E}{\cot. M}$ ; ainsi pour avoir l'angle  $STM$ , on fera cette proportion; le cosinus de la déclinaison  $AM$  du point de l'équateur, est au cosinus de l'obliquité de l'écliptique  $23^\circ 28'$ , comme le cosinus de l'arc  $SM$  est au cosinus de l'angle  $STM$ , ou de son supplément  $ETR$ ; nous l'appellerons  $Y$ ; on connoît l'angle  $R$  qui a pour mesure la déclinaison  $AS$  de l'étoile, car le point  $R$  est le pôle de l'arc  $SA$  (3656), on connoît aussi le côté  $RE$  qui est le complément de l'ascension droite  $EA$  de l'étoile; on fera donc cette proportion, fin.  $ETR : \sin. ER :: \sin. R : \sin. ET$ ; nous appellerons  $Z$  cet arc  $ET$ , qui dans certains cas est la longitude même cherchée.

2838. Cette proportion revient à celle-ci, le sinus de l'arc  $Y$  est au cosinus de l'ascension droite de l'étoile, comme le sinus de la déclinaison de l'étoile est au sinus de l'arc  $Z$ . Cet arc est toujours moindre que  $90^\circ$ , tant que l'étoile est en dedans des tropiques, & lorsque l'ascension droite d'une étoile  $\left\{ \begin{array}{l} \text{boréale} \\ \text{australe} \end{array} \right\}$  est entre  $\left\{ \begin{array}{l} 180^\circ \text{ \& } 360^\circ \\ 0^\circ \text{ \& } 180^\circ \end{array} \right\}$ . Dans les autres cas on fait cette proportion; le rayon est à la tangente de  $23^\circ 28'$ , comme la

la cotang. de la décl. de l'étoile est au sinus d'un arc  $A$  ; l'arc  $Z$  fera de plus de  $90^\circ$  lorsque l'ascension droite de l'étoile { boréale } fera entre {  $0^\circ + A$  &  $180^\circ - A$  } ; { australe } {  $180^\circ + A$  &  $360^\circ - A$  }.

L'arc  $Z$  { s'ajoute à  $0^\circ$  } { s'ôte de  $6^\circ$  } pour les étoiles { boréales } { australes } , lorsque leur ascension droite est dans le premier ou dans le dernier quart de l'équateur , & il { s'ôte de  $12^\circ$  } { s'ajoute à  $6^\circ$  } pour les étoiles { boréales } { australes } , lorsque l'ascension droite est dans le second & le troisième quart de l'équateur ; c'est ainsi qu'on a le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration en déclinaison.

2839. Pour comprendre la raison de cette dernière opération que je n'avois point démontrée dans la première édition de ce livre, non plus que M. de la Caille, dans ses leçons d'astronomie, on imaginera un arc  $TX$  abaissé perpendiculairement du point  $T$  sur l'équateur  $ER$  ; dans le triangle sphérique  $ETR$  coupé par une perpendiculaire  $TX$ , on a  $(3693)$  cot.  $E$  : sin.  $EX$  :: cot.  $R$  : sin.  $XR$  ; & parce que l'angle  $R$  est égal à la déclinaison de l'étoile, on aura pour le cas où  $EX$  seroit de  $90^\circ$ , la proportion suivante  $R$  : tang.  $E$  :: cot. décl. : sin.  $XR$ , ou  $R$  : tang.  $23^\circ \frac{1}{2}$  :: cotang. décl. : sin.  $A$ . Ayant trouvé la valeur de  $A$  ou de l'arc  $XR$  pour le cas où  $EX$  est de  $90^\circ$ , on observera que dans ce cas l'arc  $ET$  que l'on cherche est aussi de  $90^\circ$  ; on a encore  $RA = 90^\circ$ , donc  $EA = XR$ , c'est-à-dire, qu'alors l'ascension droite de l'étoile est égale au segment  $XR$  ou à la valeur de  $A$ . En considérant sur un globe la situation de ces arcs dans différens cas, on verra bien que l'arc  $Z$  ou  $ET$  est obtus si l'ascension droite d'une étoile boréale surpasse  $XR$  qui est la valeur de  $A$ , & qu'elle soit plus petite que le supplément de  $XR$  ; c'est-à-dire, que  $180^\circ - A$ . La même chose a lieu si l'ascension droite d'une étoile australe est entre  $180^\circ + A$ , &  $360^\circ - A$  ; on fait par-là si l'arc  $Z$  ou  $ET$  doit être aigu

ou obtus, c'est-à-dire, s'il faut employer l'arc trouvé par la seconde analogie, ou si c'est son supplément à  $180^\circ$  qui est la vraie valeur de  $ET$ . On appercevra aussi par l'inspection du globe, que cet arc  $ET$  ou la valeur de  $Z$ , trouvée par les préceptes précédens, n'est bonne que pour les étoiles boréales, dont les ascensions droites sont dans le premier & le dernier quart de l'équateur, mais qu'il faut prendre le supplément à 12 signes, dans les deux autres quarts; à l'égard des étoiles dont la déclinaison est australe, il faut prendre le supplément de la valeur de  $Z$ , dans le premier & le dernier quart, & ajouter  $6^\circ$  dans les deux autres, pour avoir le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration.

2840. EXEMPLE. On demande le point de la plus grande aberration en déclinaison pour une étoile qui auroit  $60^\circ$  d'ascension droite, &  $66^\circ$  de déclinaison boréale; la longitude du point de l'écliptique répondant à  $60^\circ$  d'ascension droite, est  $2^\circ 2' 6''$ ; & la déclinaison du même point, est  $20^\circ 37'$  boréale; la différence entre  $66^\circ$ , &  $20^\circ 37'$ , est  $45^\circ 23'$ , (c'est l'arc  $SM$  que M. de la Caille appelle  $X$ ). Je fais ensuite cette proportion : le cosinus de la déclinaison du point de l'écliptique  $20^\circ 37'$ , est au cosinus de l'obliquité de l'écliptique  $23^\circ 28'$ , comme le cosinus de la différence trouvée est au cosinus d'un arc que l'on appelle  $Y$ , & qui se trouve de  $46^\circ 30'$ . Je dis ensuite : le sinus de ce même arc  $Y$ , ou  $46^\circ 30'$ , est au cosinus de l'ascension droite de l'étoile  $60^\circ$ , comme le sinus de la déclinaison de l'étoile  $66^\circ 0'$ , est au sinus de  $39^\circ 2'$ ; c'est l'arc  $Z$  de l'écliptique. Il ne reste plus qu'à savoir s'il ne faudra point employer le complément ou le supplément de cet arc trouvé; si cette étoile qui a une déclinaison boréale étoit dans le dernier quart d'ascension droite, il n'y auroit rien à changer au nombre trouvé, ce seroit la longitude cherchée; mais puisqu'elle n'est pas dans le dernier quart, & qu'au contraire elle est dans un des cas qui demande une vérification, on fera cette proportion : le rayon est à la tangente de  $23^\circ 28'$ , comme

la cotangente de la déclinaison de l'étoile  $66^{\circ} 0'$ , est au sinus d'un arc  $A = 11^{\circ} 9'$ . Puisque l'ascension droite de l'étoile proposée est entre  $11^{\circ} 9'$ , &  $168^{\circ} 51'$ , c'est-à-dire, entre  $A$  &  $180^{\circ} - A$ , il faut prendre le supplément de l'arc  $Z$  trouvé de  $39^{\circ} 2'$ , & nous aurons  $4^{\circ} 20' 58'$ , longitude du soleil au temps où l'aberration en déclinaison est la plus grande en moins ou soustractive, pour cette étoile.

2841. La plus grande aberration en déclinaison qui arrive lorsque le soleil est au point  $T$ , est  $\frac{20'' \sin. MSL}{\cos. LT}$  ; La plus grande aberration en déclinaison.  
 (2833) ; mais à cause du triangle  $SLT$  rect. en  $L$ , on a  $\cos. TSL$  ou  $\sin. MSL = \sin. LTS$ .  $\cos. LT$  (3669) ; donc enfin la plus grande aberration devient  $= 20'' \sin. LTS$ , ou  $20'' \sin. Y$  ; c'est par-là que M. l'Abbé de la Caille a construit une table, où l'on trouve la plus grande aberration en déclinaison pour toutes les positions des étoiles. J'ai donné cette table dans mon *Recueil*, 1759, pag. 195.

2842. Pour trouver le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration en ascension droite, & la quantité de cette plus grande aberration ; je commencerai d'abord par la considération des diamètres de l'ellipse, & je me servirai ensuite des cercles de la sphère. Soit  $OHE$  (fig. 241), le cercle de latitude qui passe par le lieu moyen  $E$  de l'étoile,  $AEB$  le cercle de déclinaison,  $LK$  le grand axe de l'ellipse d'aberration qui est toujours parallèle à l'écliptique,  $A$  &  $B$  seront les points où l'aberration en ascension droite est nulle ; supposant toujours que le cercle  $KOL$  soit divisé comme l'écliptique (2831), l'ordonnée  $DAV$  tirée par le point  $A$  perpendiculairement sur le grand axe  $LDK$  déterminera le point  $V$  où est le soleil lorsque l'aberration en ascension droite est nulle ; les lignes  $DV$ , &  $DA$  sont comme les tangentes des angles  $DEV$ ,  $DEA$ , & en même temps comme le grand axe de l'ellipse est au petit, c'est-à-dire, comme le rayon est au sinus de la latitude de l'étoile (2820) ; donc le

Aberration en ascension droite.

Fig. 241.

**Fig. 241.** sinus de la latitude de l'étoile est au rayon, comme la cotangente de l'angle à l'étoile, est à la tangente de l'angle  $DELV$  ou de l'arc  $LV$  ou  $KV$ ; c'est la distance entre le lieu de l'étoile marqué en  $K$  (2831), & le lieu du soleil au temps où l'aberration en ascension droite est nulle.

Si l'on tire au diamètre  $AB$  un diamètre conjugué  $MN$ , les points  $M$  &  $N$  seront ceux où l'aberration en ascension droite est la plus grande; car la tangente en  $N$  est parallèle à  $AB$ ; le point  $N$  de l'ellipse est donc de tous les points de cette courbe le plus éloigné de la ligne  $AB$  ou du cercle de déclinaison qui passe par le lieu moyen  $E$  de l'étoile; ayant tiré l'ordonnée  $CNF$ , le point  $C$  désigne le lieu du soleil lorsque l'aberration en asc. dr. est la plus grande; & comme par la propriété de l'ellipse l'angle  $PEC$  est droit (3261), il s'ensuit que le lieu  $C$  du soleil au temps de la plus grande aberr. en asc. dr. est éloigné de  $90^\circ$  du point  $V$  qui est le lieu du soleil au temps où elle étoit nulle. (Voyez la règle 2846).

Lieu de la  
plus grande  
aberration.

2843. La perpendiculaire  $NG$  tirée du point  $N$  sur la ligne  $AG$  est la plus grande aberration en ascension droite, mesurée dans la région de l'étoile;  $NG \times AE = LE \times EH$  (3262); ou  $AE : LE$  ou  $EV :: EH : NG$ ; donc  $\frac{AD}{EV} : \frac{AD}{AE} :: EH : NG$ ; mais  $AD : EH :: DV : EO$ ; donc  $\frac{DV}{EV} : \frac{AD}{AE} :: EO : NG$ , c'est-à-dire, le sinus de l'arc  $LV$  est au cosinus de l'angle de position  $OE A$ , comme  $20''$  sont à la plus grande aberration en ascension droite. L'arc  $OV$  est la distance entre le point  $O$ , où l'aberration en longitude est nulle; & le point  $V$  où est le soleil quand l'aberration en ascension droite est nulle. (Voyez aussi 2845).

Quantité de  
cette aberration.

Si l'étoile est dans un autre point de son ellipse; tel que  $S$ ,  $SP$  perpendiculaire sur  $AEB$  fera l'aberration d'ascension droite; ayant tiré une ordonnée  $SR$  au diamètre  $AB$ , qui soit parallèle à  $MN$ , le rapport de



$SR$  à  $SP$  est constant, & l'ordonnée  $SR$  de l'ellipse est la projection d'une ordonnée  $QT$  au cercle (2834); donc  $SR$  ayant un rapport constant avec  $SP$  & avec  $QT$ , il y aura aussi un rapport constant entre  $SP$  &  $QT$  qui est le sinus de l'arc  $QV$ ; donc l'aberration en ascension droite  $SP$  est comme le sinus de la distance  $QV$  du soleil au lieu où il étoit lorsque l'aberration en déclinaison étoit nulle; & la plus grande aberration multipliée par le sinus de l'argument annuel (2816), donnera l'aberration actuelle en ascension droite.

2844. On peut avoir la quantité de la plus grande aberration en ascension droite sous une forme plus simple en employant l'angle  $M$  (fig. 240) de l'écliptique & du méridien qui passe par l'étoile. Le point  $M$  est le lieu où se trouve le soleil lorsque l'aberration en ascension droite est la plus grande; car dans le triangle  $SLM$  rectangle en  $L$ , on a cette proportion  $R : \sin. SL :: \tan. MSL : \tan. ML$  (3667), ce qui revient à la proportion de l'art. 2842;  $L$  est le lieu du soleil lorsque l'étoile est en conjonction, & que l'aberration en long. est la plus grande; ainsi  $ML$  est égal à la différence des points où ces deux aberrations sont nulles; on trouvera donc la plus grande aberration en ascension droite (2843), =

$$\frac{20'' \cos. MSL}{\cos. ML} \text{ dans la région de l'étoile, \& } \frac{20'' \cos. MSL}{\cos. ML \cos. SA}$$

sur l'équateur (892). Mais dans le triangle  $MSL$  rectangle en  $L$ , on a  $\cos. MSL = \sin. M \cos. ML$  (3669); donc substituant cette valeur on a  $\frac{20'' \sin. M}{\cos. SA}$  pour la plus grande aberration en ascension droite. L'angle  $M$  est facile à trouver, car dans toutes les tables astronomiques on a l'angle de l'écliptique avec le méridien pour chaque point  $M$  de l'écliptique. C'est ainsi qu'on a calculé la table des aberrations en ascension droite qui est à la page 185, du recueil déjà cité.

2845. Enfin, si l'on veut avoir la même quantité sans employer l'angle  $M$ , on considérera que dans le triangle sphérique  $EAM$  rectangle en  $A$ , l'on a par la

Fig. 240.

Autres expressions de l'aberration en ascension droite.

Fig. 240. trigonométrie sphérique  $R : \sin. M :: \cos. AM : \cos. E$  (3669) ; donc à la place de  $\sin. M$  on peut mettre  $\frac{\cos. E}{\cos. AM}$  ou  $\frac{\cos. 23^\circ}{\cos. \text{déclin. } M}$ . Alors on aura la plus grande aberration en ascension droite,  $\frac{20'' \cos. 23^\circ}{\cos. \text{déclin. } S. \cos. \text{déclin. } M}$ . Cette plus grande aberration multipliée, ainsi que toutes les autres, par le cosinus de l'argument annuel d'aberration en ascension droite (2816), fera l'aberration actuelle pour un moment donné.

Lieu du soleil quand l'aberration est la plus grande.

2846. Le lieu du soleil au temps de la plus grande aberration en ascension droite (2842) se peut aussi trouver sans aucun calcul par la table XVIII, qui donne la différence entre la longitude & l'ascension droite du soleil, pour chaque point de l'écliptique, d'où l'on peut la conclure pour chaque point de l'équateur. Le point  $A$  marque l'ascension droite de l'étoile  $S$ , le point  $M$  désigne le lieu de l'écliptique où se trouve le soleil quand l'aberration en ascension droite est la plus grande ; ainsi pour avoir ce point  $M$  il ne faut que prendre la différence entre  $EA$  &  $LM$  ; on l'ajoute à l'ascension droite dans le 1<sup>er</sup> & le 3<sup>e</sup> quart d'ascension droite, on la retranche dans le 2<sup>e</sup> & le 4<sup>e</sup> quart, on a la longitude du point  $M$  où est le soleil quand l'aberration en ascension droite est la plus grande ; cette quantité qu'il faut ajouter à l'ascension droite de l'étoile ne va jamais au-delà de  $2^\circ 28' 25''$  ; on en trouvera aussi une table dans mon Recueil, 1759, pag. 184.

2847. Pour servir d'exemple aux règles précédentes, je mettrai ici une table où l'on verra pour les dix principales étoiles du ciel, le lieu du soleil au temps où les aberrations soustractives sont les plus grandes, avec les quantités des plus grandes aberrations pour 1750. On trouvera dans les différens volumes de la connoissance des temps, depuis 1760, des tables d'aberrations plus détaillées, celles des principales étoiles se trouveront également parmi les tables qui sont dans le tome I<sup>er</sup> de cet ouvrage.

N O M S DES ÉTOILES.	Lieu du Sol. au temps de la plus gr. aberr. en ascen. dr. pour 1750.	La plus grande aberration en ascension droite.	Lieu du Soleil au temps de la plus gr. aberr. en déclinaison.	La plus grande aberr. en déclin.
Etoile polaire ,	0 <sup>s</sup> 11 <sup>o</sup> 38'	8' 38" 4	3 <sup>s</sup> 8 <sup>o</sup> 48'	19" 9
Aldébaran ,	2 7 10	0 20, 6	1 6 46	3, 8
La Chèvre ,	2 15 43	28, 5	5 1 36	8, 1
Sirius ,	3 7 48	20, 8	6 3 45	12, 8
Régulus ,	4 26 28	19, 3	10 25 3	6, 8
L'épi de la Vierge ,	5 19 30	18, 6	6 25 14	7, 6
Arcturus ,	7 33 15	20, 1	5 0 55	12, 4
Antarès ,	8 5 24	21, 8	8 29 40	3, 2
La Lyre ,	9 6 33	25, 5	0 5 1	17, 6
L'Aigle ,	9 22 48	19, 9	0 6 37	10, 3

2848. Lorsqu'on veut avoir l'aberration actuelle pour un jour donné, on cherche le lieu du soleil, on le retranche du lieu de la plus grande aberration, pour avoir l'argument annuel; le cosinus de cet argument multiplié par la plus grande aberration, prise dans la table précédente, donne l'aberration cherchée; elle est toujours soustraïve tant que l'argument annuel est entre 0<sup>s</sup> & 3<sup>s</sup>, ou entre 9<sup>s</sup> & 12<sup>s</sup>, elle est additive entre 3 & 9 signes (2816). Aberration  
actuelle.

2849. Je dois avertir ici que M. de la Caille dans tous ses ouvrages a appelé ascension droite *vraie*, déclinaison *vraie*, &c. celles qui auroient lieu s'il n'y avoit dans les étoiles, ni aberration, ni nutation; je les ai appelé *moyennes* pour éviter l'équivoque, & pour me rapprocher de l'usage qui a fait nommer, temps moyen, celui qui auroit lieu s'il n'y avoit point d'inégalité dans le soleil. Equivoque  
sur les termes  
de vrai &  
moyen.

2850. L'ABERRATION a lieu dans les planètes, aussi bien que dans les étoiles fixes. mais elle est plus facile à calculer, quand on connoît leur mouvem. & leur distance. Aberration  
des planètes.

L'ABERRATION d'une planète est toujours égale au mouvement vu de la terre pendant le temps que la lumière emploie à venir depuis la planète jusqu'à la terre. Soit C le lieu de la

Fig. 233.

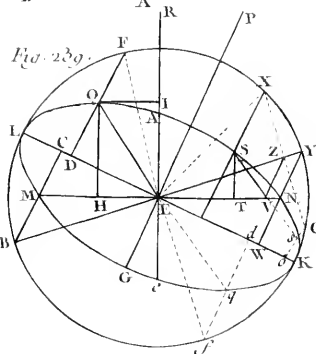
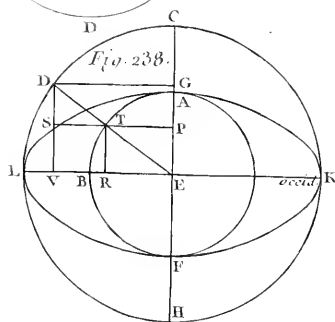
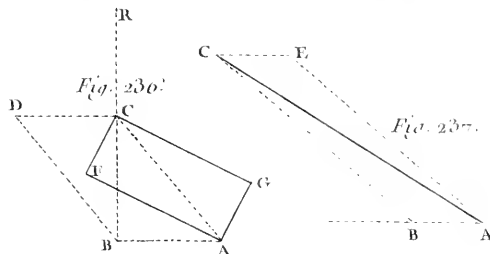
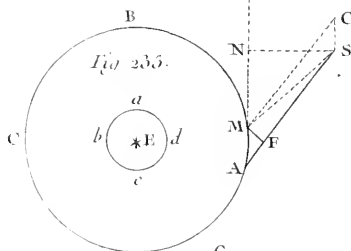
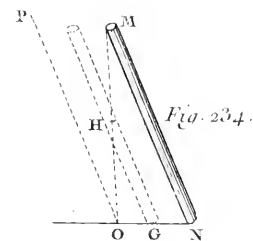
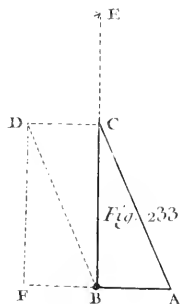
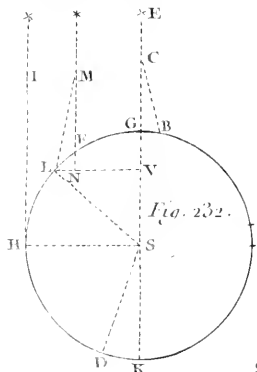
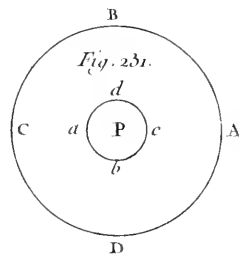
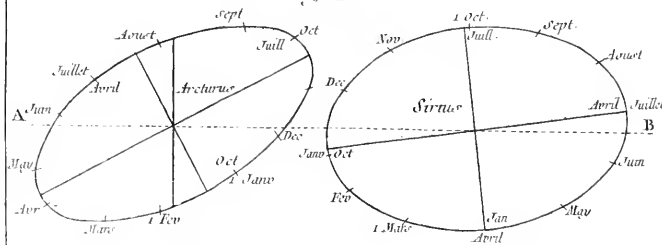
planète (fig. 233), que je suppose immobile pendant que la terre va de *A* en *B*, en donnant à la terre la somme des deux mouvemens ou leur différence; en sorte que le mouvement de la planète vu de la terre, qui est le résultat des deux mouvemens, soit égal à l'angle *ACB* pendant que la lumière est parvenue de *C* en *B*; suivant nos principes l'œil arrivant en *B* reçoit deux impressions, l'une suivant *CB*, l'autre suivant *EB*, ainsi il n'éprouvera qu'une impression composée, suivant la diagonale *DB*, & la planète lui paroîtra en *D*, au lieu de paroître en *C*; la différence est l'angle *CBD* égal à l'angle *ACB*, c'est-à-dire, au mouvement de la planète vu de la terre. On peut voir des formules & des méthodes particulières de M. Clairaut à ce sujet, dans les mémoires de l'académie pour 1746, & celles de M. Euler, dans les mémoires de Berlin pour 1746, *Tom. II.*

2851. EXEMPLE. La lumière emploie 8' 8" à venir du soleil jusqu'à nous (2806), le mouvement du soleil pendant ces 8' est de 20", d'où il suit que le soleil a 20" d'aberration en longitude, en tout temps; & comme l'aberration fait paroître la planète du côté où va la terre, opposé à celui où la planète paroît aller, il s'en suit que si la longitude est croissante l'aberration la diminue, & il faudra l'ôter de la longitude calculée pour avoir la longitude apparente. Il en sera de même de la latitude, de l'ascension droite, de la déclinaison, pourvu qu'on prenne le mouvement géocentrique en latitude, en ascension droite, en déclinaison pendant le temps que la lumière emploie à venir jusqu'à nous.

2852. Si l'on nomme *m* le mouvement diurne vu de la terre, *d* la distance de la planète ou de la comète à la terre, l'aberration sera  $\frac{m \cdot d \cdot 8'}{24^h}$  ou  $\frac{m \cdot d \cdot 20''}{59'}$ . Ainsi en ajoutant le log. constant 0,95292 avec ceux du mouvement diurne géocentrique de la planète exprimé en minutes, & de sa distance à la terre, en supposant celle du soleil égale à l'unité, on aura le log. de l'aberration en secondes.

Voici des tables pour les cinq planètes, avec lesquelles on

Fig. 230.





on peut se passer de ce calcul rigoureux qui est assez long ; on trouvera une table générale , à la page 200 du Recueil que j'ai cité , qui servira également pour les planètes & les comètes.

*ABERRATION des cinq Planètes principales , pour convertir la longitude moyenne en apparente.*

ÉLONGAT. ou DISTANCE au SOLEIL.		MARS.	JUPITER.	SATURNE	ÉLONGAT.	VÉNUS.
Sig.	D.	S.	S.	S.	D.	S.
O	XII 0	— 36	— 28	— 26	σ supér.	— 43
	15	— 35	— 28	— 25	15	— 41
I	XI 0	— 32	— 26	— 23	30	— 34
	15	— 28	— 22	— 20	45	— 19
II	X 0	— 23	— 18	— 16	la plus gr.	
	15	— 17	— 14	— 11	digression.	— 14
III	IX 0	— 12	— 8	— 6	45	— 9
	15	— 7	— 3	— 1	30	0
IV	VIII 0	— 3	— 1	— 4	15	— 3
	15	0	— 5	— 8	σ infér.	— 3
V	VII 0	— 2	— 8	— 11		
	15	— 3	— 10	— 13		
VI	VI 0	— 4	— 11	— 15		

ÉLONGATION.	MERCURE.		
	APHÉLIE.	DIST. MOY.	PÉRIHÉLIE.
	Sec.	Sec.	Sec.
conjonction supérieure.	— 49	— 51	— 55
5	— 48	— 50	54
10	— 46	— 48	49
15	— 43	— 43	38
20	— 38	— 33	
25	— 30		
la plus gr. digres.	— 17	— 18	— 19
25	— 5		
20	— 1	— 4	
15	— 5	— 5	0
10	— 7	— 9	— 10
5	— 9	— 11	— 14
conjonction inférieure.	— 9	— 12	— 16

## DE LA NUTATION.

2853. LA NUTATION ou *déviation* est un mouvement apparent de 9'' observé dans les étoiles fixes, dont la période est de 18 ans, causé par l'attraction de la lune sur le sphéroïde de la terre. On verra dans le XXII<sup>e</sup>. livre que la précession des équinoxes qui est de 50'' par an, est produite par l'action du soleil & de la lune sur la partie de la terre que l'on conçoit relevée vers l'équateur du sphéroïde (3526). De ces 50'' il y en a au moins 36 qui sont produites par l'action seule de la lune; or, la lune ne peut pas produire ces 36'' de précession d'une manière uniforme, puisque ses nœuds changent continuellement de place & que son inclinaison par rapport à l'équateur, d'où son effet dépend, varie de dix degrés; il en doit résulter non-seulement une inégalité dans la précession annuelle des équinoxes à différentes années, mais aussi un balancement ou une nutation dans l'axe de la terre (3569). Par l'effet de cette nutation les étoiles doivent paroître se rapprocher & s'éloigner de l'équateur, puisque l'équateur répond à différentes étoiles.

On présumoit la nutation.

2854. Nous voyons que Flamsteed avoit espéré vers l'an 1690, au moyen des étoiles voisines du zénit, de déterminer la quantité de cette nutation qui devoit suivre de la théorie de Newton; mais il abandonna ce projet, parce que, dit-il, si cet effet existe il doit être insensible jusqu'à ce qu'on ait des instrumens bien plus longs que 7 pieds, plus solides & mieux fixés que les miens. (*Hist. cél. tom. III, pag. 113*).

M. Horrebow rapporte le passage suivant, tiré des manuscrits de Romer, par lequel on voit qu'il soupçonnoit aussi une nutation dans l'axe de la terre, & espéroit d'en donner la théorie : *Sed de altitudinibus non perinde certus reddebar, tam ob refractionum varietatem quam ob aliam nondum liquido perspectam causam : scilicet per hos duos annos, quemadmodum & alias, expertus sum esse quandam*



*in declinationibus varietatem, quæ nec refractionibus nec parallaxibus tribui potest, sine dubio ad vacillationem aliquam poli terrestreis referendam, cæjus me verisimilem dare posse theoriam, observationibus munitam, spero. (Basis astronomiæ 1735, pag. 66).*

Ces idées de nutation devoient se présenter naturellement à tous ceux qui avoient apperçu dans les étoiles des changemens de déclinaisons, & nous avons vu que les premiers soupçons de M. Bradley en 1727, furent qu'il y avoit quelque nutation de l'axe de la terre qui faisoit paroître l'étoile  $\gamma$  du Dragon plus ou moins près du pôle (2794); mais la suite des observations l'obligea de chercher une autre cause pour les variations annuelles; ce ne fut qu'au bout de quelques années qu'il reconnut le second mouvement dont il s'agit ici.

2855. Pour bien expliquer la découverte de la nutation par M. Bradley, il faut remonter au temps où il observoit les étoiles pour découvrir l'aberration; il vit en 1728, que le changement annuel de déclinaison dans les étoiles voisines du colure des équinoxes étoit plus grand qu'il ne devoit résulter de la précession des équinoxes supposée de 50'', & calculée à la manière ordinaire (2710); l'étoile  $\alpha$  de la grande Ourse se trouva au mois de Septembre 1728, 20'' plus au sud que l'année précédente, quoiqu'il ne dût y avoir que 18''; il en résultoit que la précession des équinoxes avoit dû être de 55''  $\frac{1}{2}$  au lieu de 50'', sans que cette différence de 18 à 20'' pût être attribuée à l'instrument, parce que les étoiles voisines du colure des solstices ne donnoient point la même différence. (*Philos. transf. n.º. 406. vol. 35. Déc. 1728, pag. 659*).

Histoire de  
cette décou-  
verte.

2856. En général les étoiles situées proche le colure des équinoxes avoient changé de déclinaison d'environ 2'' plus qu'elles n'auroient fait par la précession moyenne des équinoxes, qui est très-bien connue, & les étoiles voisines du colure des solstices moins qu'elles n'auroient dû faire; mais, ajoute M. Bradley, « soit que ces petites » variations viennent d'une cause régulière, ou qu'elles

» soient occasionnées par quelque changement dans le  
 » secteur, je ne suis pas encore en état de les détermi-  
 » ner ». M. Bradley n'en fut que plus ardent à conti-  
 nuer ses observations pour déterminer la période & la  
 loi de ces variations; il demeura presque toujours à  
 Wansted jusqu'en 1732, qu'il fut obligé d'aller à Oxford,  
 pour remplacer M. Halley; il continua d'observer avec  
 la même exactitude toutes les circonstances des change-  
 mens de déclinaison sur un grand nombre d'étoiles. Cha-  
 que année il voyoit les périodes de l'aberration se réta-  
 blir suivant les règles que l'on a vues ci-dessus (2825);  
 mais d'une année à l'autre il y avoit d'autres différen-  
 ces; les étoiles situées entre l'équinoxe du printemps &  
 le solstice d'hiver se trouvoient être plus près du pôle  
 boréal, & les étoiles opposées s'en étoient éloignées;  
 il commença de soupçonner que l'action de la lune sur  
 l'équateur, c'est-à-dire, sur la partie la plus relevée de  
 la terre pouvoit causer une variation ou un balance-  
 ment dans l'axe de la terre : son secteur étant demeuré  
 fixe à Wansted, il continua d'y venir observer souvent,  
 & il s'est trouvé en état en 1747, de prononcer sur la  
 cause de ce phénomène; nous allons rendre compte de  
 cette nouvelle découverte d'après M. Bradley lui-même  
 ( *Phil. transf. n°. 485. vol. 45. Janv. 1748* ).

Phénomène  
de la nutation.

2857. En 1727, le nœud ascendant de la lune con-  
 couroit avec l'équinoxe du printemps, de sorte que la  
 lune s'écartoit de l'équateur dans ses plus grandes latitudes  
 de  $28^{\circ}\frac{1}{2}$ ; en 1736, le nœud ascendant s'étant trouvé  
 dans l'équinoxe de la balance, la lune ne pouvoit plus  
 s'écarter de l'équateur que de  $18^{\circ}\frac{1}{2}$ , de sorte que son or-  
 bite étoit plus éloignée de l'équateur de  $10^{\circ}$  en 1727,  
 qu'en 1736, ce qui rendoit son attraction plus sensible.

M. Bradley observa en 1727, par le changement de  
 déclinaison des étoiles voisines du colure des équinoxes  
 que la précession des équinoxes étoit plus grande que la  
 moyenne (2855), & cependant les étoiles situées pro-  
 che le colure des solstices, paroissoient se mouvoir d'une  
 manière contraire aux effets de cette augmentation; les

étoiles opposées en ascension droite étoient affectées de la même manière ;  $\gamma$  du Dragon , & la 35<sup>e</sup> étoile de la Giraffe ( 2794 ) avoient éprouvé le même changement en déclinaison, l'une vers le nord, l'autre vers le sud ; cela s'accordoit très-bien avec une nutation de l'axe de la terre , qui doit évidemment produire la même différence sur les étoiles opposées en ascension droite.

2858. En 1732, le nœud de la lune avoit rétrogradé jusqu'au solstice d'hiver, alors les étoiles situées proche le colure des équinoxes parurent changer leur déclinaison suivant la précession de 50". Dans les années suivantes, ce changement diminua, jusqu'en 1736, que le nœud ascendant parvint à l'équinoxe de la balance.

Les étoiles situées vers le colure des solstices changèrent leur déclinaison depuis 1727, jusqu'en 1736, de 18" moins que n'exigeoit la précession de 50" ; de sorte que le pôle du monde ou l'axe de la terre avoit éprouvé une nutation de 18" pendant une demi-révolution des nœuds de la lune. En 1745, au bout de 18 ans les nœuds étant revenus à leur première situation, les étoiles reparurent toutes aux mêmes points, ayant égard à la précession des équinoxes ; on vit les mêmes phénomènes qu'en 1727, & M. Bradley ne douta plus que la nutation de l'axe terrestre n'en fût la véritable cause.

M. Machin, Secrétaire de la société Royale, à qui il envoya ses conjectures, vit bientôt qu'il suffisoit pour expliquer, & la nutation & le changement de la précession, de supposer que le pôle de la terre décrivait un petit cercle, ( on a vu de semblables hypothèses, 1353, 1423, 2705 ). Il donna 18" au diamètre de ce cercle, & supposa qu'il étoit décrit par le pôle dans l'espace d'une révolution des nœuds de la lune ; l'on expliquoit par-là, & le changement de la précession annuelle, tel que les étoiles voisines du colure des équinoxes l'avoient indiqué, & la nutation de l'axe de la terre démontrée par les étoiles voisines du colure des solstices.

Hypothèse  
de M. Machin.

Son accord  
avec les ob-  
servations,

Pour faire voir l'accord de sa théorie avec l'observa-

tion, M. Bradley rapporte grand nombre d'observations faites depuis 1727, jusqu'en 1747, sur  $\gamma$  &  $\epsilon$  du Dragon,  $\alpha$  de Cassiopée,  $\tau$  de Persée,  $\alpha$  de Persée,  $\mu$  de la grande Ourse, & la 35<sup>e</sup> de la Giraffe, qui sont à l'égard des colures dans des positions très différentes, & l'on voit qu'après les réductions nécessaires pour rapporter toutes les observations à une même époque, par les principes de l'aberration & de la nutation, il trouve toujours à 2 ou 3" près le même résultat, tandis qu'auparavant on eût trouvé jusqu'à 56"  $\frac{1}{2}$  de différence pour  $\gamma$  du Dragon. De plus de 300 observations qu'il avoit faites de celle-ci, il ne s'en est trouvé que onze qui différaient de la moyenne de 2".

2859. Les observations faites sur les étoiles un peu plus éloignées du zénit, s'accordent un peu moins entr'elles; mais M. Bradley ne s'en servoit qu'au défaut des plus proches; l'expérience lui avoit appris depuis long-temps que les observations des étoiles les plus proches du zénit étoient toujours celles qui s'accordoient le mieux entr'elles.

Par les observations de 1740 & de 1741, l'étoile  $\mu$  de la grande Ourse parut de 3" plus éloignée du pôle qu'elle ne devoit être suivant les observations des autres années; M. Bradley crut que cette différence venoit de quelque cause particulière; nous verrons bientôt une de ces causes, qui venoit du défaut de l'hypothèse circulaire (2873): il soupçonna aussi que la situation de l'apogée de la lune pourroit influencer sur la nutation; il invita les géomètres à discuter tous ces effets de l'attraction, & les astronomes à continuer d'observer les positions des plus petites étoiles, & celles des plus brillantes, pour découvrir les dérangemens physiques qu'elles peuvent éprouver, & que l'on observe dans quelques-unes (2748).

En quoi  
consiste la  
nutation.

2860. L'hypothèse que M. Machin employa pour expliquer les observations de M. Bradley consistoit à supposer que le pôle de la terre décrivait un cercle de 18" de diamètre dans l'espace de 18 ans, par un mouvement rétrograde, comme dans l'art. 1353. Soit  $E$  le pôle de

l'écliptique (*fig. 243*), *P* le pole de l'équateur qui en est éloigné de  $23^{\circ}\frac{1}{2}$ , & autour du point *P* un petit cercle, dont le rayon *PB* soit de  $9''$ ; au lieu du point *P* qui est le lieu moyen du pole, on suppose que le vrai pole soit en *A* lorsque le nœud est dans l'équinoxe du printemps sur le colure des équinoxes *Pγ*, & qu'il continue de se mouvoir d'*A* en *B* de la même manière que le nœud; en sorte que quand le pole est en *O* l'arc *AO* soit égal à la longitude du nœud de la lune, le lieu du vrai pole sera toujours plus avancé de 3 lignes en ascension droite dans le cercle *ABC* que le lieu du nœud de la lune dans l'écliptique, & le pole sera en *D* lorsque le nœud sera en  $\varpi$ . Puisque le pole rétrograde de *A* en *B* il doit se rapprocher des étoiles qui sont dans le colure *PBγ* des équinoxes; de sorte que la précession paroîtra plus grande, en occasionnant dans les étoiles qui sont sur le colure des équinoxes, un changement de déclinaison plus grand de  $9''$  qu'il ne devoit être, & cela dans l'espace de 4 ans & 8 mois que le nœud emploiera à venir du Bélier au Capricorne, & le pole à venir de *A* en *B*; en même-temps le pole paroîtra s'être approché des étoiles qui sont vers le solstice d'hiver ou du côté de *F*; telles sont en effet les circonstances que M. Bradley avoit observées (2858).

2861. Le premier effet général de la nutation, celui qui est le plus facile à appercevoir, est le changement de l'obliquité de l'écliptique; cet angle augmente de  $9''$  quand le nœud ascendant de la lune est dans le Bélier; puisqu'alors le pole est en *A*, & que la distance des poles *EA* devient plus grande de  $9''$  que quand le nœud est dans la Balance. L'obliquité de l'écliptique étoit en 1764 de  $23^{\circ} 28' 15''$ ; elle n'étoit en 1755 que de  $23^{\circ} 28' 5''$ , non-seulement elle n'a pas diminué de  $8''$  comme elle auroit dû faire (2744); mais elle a augmenté de  $10''$ , ce qui fait  $18''$  de plus pour le seul effet de la nutation, qui est égal à *AC*.

Quand le pole de la terre est arrivé de *A* en *O*, l'obliquité de l'écliptique est *EO* ou *EH*, & la nutation se trouve égale à *PH*; l'arc *AO* ou l'angle *APG* est égal à la longitude du nœud, & *PH* en est le cosinus; or  $PH =$

*Fig. 243*

Nutation de  
l'obliquité de  
l'écliptique.

fig. 243,  $9''$  sin.  $OB$  ou  $9''$  cos.  $AO$ , donc la nutation  $PH = + 9''$  cos. nœud, ou  $9''$  multipliées par le cosinus de la longitude du nœud de la lune. Cette nutation doit se retrancher de l'obliquité moyenne ou uniforme, tant que le nœud de la lune est entre 3 & 9 signes; elle s'ajoute dans le premier & le quatrième quart de la longitude du nœud.

2862. La nutation change également les longitudes, les ascensions droites & les déclinaisons des astres; il n'y a que les latitudes qu'elle n'affecte point, puisque l'écliptique est immobile dans la théorie de la nutation: nous allons expliquer le calcul de toutes ces variations, de deux manières, & premièrement par une méthode nouvelle, plus simple que celle du petit cercle employé par M. Bradley. Soit  $MLQ$  (fig. 243) l'écliptique immobile;  $Q$  le point solsticial,  $QZ$  l'obliquité de l'écliptique,  $MNR$  l'équateur,  $M$  le point équinoxial,  $K$  un astre dont la déclinaison est  $KT$ , & l'ascension droite  $MT$ . Supposons que par l'effet de la nutation l'équateur  $MN$  prenne la situation  $LN$ , en sorte que le point équinoxial soit en  $L$ , & que  $ML$  soit le changement de la précession en longitude, le long de l'écliptique; l'étoile  $K$  au lieu de répondre perpendiculairement au point  $T$  de l'équateur, répondra en un autre point  $V$  où tombera l'arc perpendiculaire  $KV$  du cercle de déclinaison,  $LV$  sera l'ascension droite apparente &  $KV$  la déclinaison apparente de l'étoile.

L'obliquité de l'écliptique  $QZ$  devient égale à  $QI$ , quand l'équateur prend la position  $LN$ ; suivant l'observation, l'obliquité de l'écliptique est la plus grande lorsque le nœud ascendant de la lune est dans l'équinoxe du printemps (2861), l'équation est nulle quand le nœud est dans les solstices, ou que le point  $N$  est en  $Z$ ; (le point  $N$  a une ascension droite égale à la longitude du nœud de la lune), la nutation  $IZ$  ou le changement de l'obliquité de l'écliptique mesurée sur le colure des solstices  $SZI$ , est égale à  $9''$  multipliées par le cosinus de la longitude du nœud de la lune, ou  $9''$  sin.  $NZ$  (2861), c'est la proportion que M. Bradley remarquoit par le changement de déclinaison

déclinaison que les étoiles situées près du colure des solstices avoient éprouvé pendant le cours des 19 ans ; en partant de cette supposition, il s'agit de trouver l'effet qui doit en résulter sur les longitudes, les ascensions droites & les déclinaisons. Fig. 243.

2863. Puisque  $IZ = 9'' \sin. NZ$ , l'angle  $N$  est de  $9''$ , l'arc  $Lk$  sera  $9'' \sin. NR$  (892) ; dans le petit triangle

$MLR$  on a  $R : LM :: \sin. M : LR$  ou  $LM = \frac{LR}{\sin. M} = \frac{9'' \sin. NR}{\sin. M}$  ; c'est-à-dire, que le changement du point équinoxial le long de l'écliptique ou la nutation en longitude est

Nutation en longitude.

de  $9''$  multipliées par le sinus de la longitude du nœud de la lune, & divisées par le sinus de l'obliquité de l'écliptique ; mais  $\frac{9''}{\sin. 23^\circ} = 23''$ , donc elle est aussi égale à  $23''$  sin. longit.  $\Omega$ . Cette nutation affecte les points équinoxiaux d'où se comptent les longitudes, ainsi elle doit être employée dans les calculs de toutes les planètes, quand on y veut mettre une certaine précision ; nous en avons donné la table parmi celles du soleil, table VII, pag. 31, mais elle est seulement de  $16''8$ , (art. 2874). M. Mayer la faisoit de  $18''$  (1472).

2864. La nutation en ascension droite, ou la différence entre l'ascension droite moyenne  $MT$ , & l'ascension droite apparente  $LV$  dépend de deux causes, & doit être composée de deux parties, l'une  $MR$ , l'autre  $VX$  ou  $TY$  ; la première partie  $MR$  est le déplacement de l'équateur ou le changement du point équinoxial compté sur l'équateur même ; or  $MR = LR \tan g. M$   $LR = \frac{LR}{\tan g. M} = \frac{9'' \sin. NR}{\tan g. M}$ , c'est-à-dire,  $9''$  multipliées par le sinus de la longitude moyenne du nœud & divisées par la tangente de l'obliquité de l'écliptique. Cette première partie de la nutation est commune à tous les astres, puisqu'elle affecte le point équinoxial même, c'est-à-dire, le point d'où se comptent toutes les ascensions droites. (Voyez encore 2870, 2876 & l'exemple 2879).

Nutation en ascen. droite première partie.

2865. La seconde partie  $VX$  ou  $TY$  de la nutation en ascension droite dépend de la situation de l'astre  $K$  ou

Fig. 243.

du point  $T$ , car elle seroit nulle si l'arc  $VX$  étoit parallèle à l'arc  $YT$ , comme cela arrive à  $90^\circ$  de l'intersection  $N$ , ou à  $90^\circ$  du nœud, puisqu'alors les arcs perpendiculaires  $KT$  &  $KY$  se confondent l'un avec l'autre. Si l'on imagine en  $T$  & en  $Y$  deux tangentes aux arcs  $TK$  &  $TY$ , & aux points  $V$  &  $Y$  deux tangentes aux arcs  $VN$  &  $YN$ , les deux premières feront entre elles le même angle que les deux dernières, puisqu'elles sont perpendiculaires l'une à l'autre en  $V$  & en  $T$ , & les deux premières tangentes formeront par leur concours à la rencontre de la sécante, ou du prolongement du rayon de la sphère mené par le point  $K$  un triangle semblable à celui des deux autres tangentes, dans le point de rencontre du rayon qui passe par le point  $A$ ; donc les triangles semblables ayant leurs côtés proportionnels, on aura cette analogie  $TX$  est à la tangente de l'arc  $TN$ , comme  $TY$  est à la tangente de l'arc  $TK$ , donc  $TY = \frac{TX \text{ tang. } TK}{\text{tang. } TN} = \frac{9'' \sin. TN \text{ tang. } TK}{\text{tang. } TN} = 9'' \text{ tang. } TK \cos. TN$ , c'est-à-dire,  $9''$  multipliées par la tangente de la déclinaison de l'astre dont il s'agit, & par le cosinus de sa distance au point  $N$  qui répond au nœud de la lune, ou de l'ascension droite de l'astre moins la longitude du nœud de la lune. (Voyez encore art. 2871, 2876, & l'exemple 2879).

Seconde partie.

Nutation en déclinaison.

2866. La nutation en déclinaison est  $TX$ , puisque c'est la différence entre la déclinaison moyenne  $KT$  & la déclinaison actuelle & apparente  $KV$  ou  $KX$ . Or cette nutation  $TX = N \sin. IN$  (892), c'est-à-dire,  $9''$  multipliées par le sinus de la différence entre l'ascension droite de l'astre & la longitude du nœud. (Voyez art. 2869, 2876 & l'exemple 2879).

2867. Au lieu de supposer l'angle  $N$  constamment de  $9''$ , on le peut supposer quelquefois de  $9''$ , quelquefois de  $6''7$  (2874, 3575), c'est la distance des poles qui a lieu dans l'ellipse, ainsi que l'indique la théorie; il suffira pour lors de mettre dans les formules précédentes, au lieu de  $9''$ , la distance actuelle des poles, ainsi que nous l'expliquerons bientôt, & au lieu de la longitude



moyenne du nœud une longitude corrigée (2874). *Fig. 243.*

2868. Les mêmes formules se démontrent également par le moyen du petit cercle employé par M. Bradley. Le colure des solstices ou le cercle  $EPA$  peut servir à compter les longitudes, aussi-bien que le colure des équinoxes, puisqu'il en est toujours éloigné de  $90^\circ$ , & que les longitudes comptées du solstice sont seulement plus petites de 3 signes que les longitudes comptées de l'équinoxe; ainsi ce que nous allons dire des longitudes des astres rapportées au colure des solstices  $E$  a lieu également par rapport au cercle  $EM$  qui va vers l'équinoxe, d'où l'on a coutume de compter les longitudes. Lorsque le pôle de l'équateur se trouve en  $O$ , le colure des solstices est tiré sur  $EO$ , puisque c'est la situation des deux pôles  $E$  &  $O$  qui détermine la position du colure; donc un astre quelconque  $S$  dont la longitude moyenne comptée du colure des solstices étoit l'angle  $PES$ , lorsque le colure étoit sur  $LP A$ , aura pour longitude actuelle & apparente l'angle  $OES$  plus petit de la quantité  $AEO$ ; ainsi l'angle  $AEO$  est une équation qu'il faut ôter de la longitude de tous les astres pour avoir leur longitude comptée du vrai colure  $EO$ ; c'est la nutation en longitude. L'arc  $AO$  du petit cercle de nutation est égal à la longitude du nœud de la lune (2860), dont  $HO$  est le sinus; ainsi  $HO = 9'' \sin. \text{nœud}$ . Pour avoir l'angle  $HEO$ , il suffit de diviser l'arc  $HO$  par le sinus de  $EH$  (892), donc l'angle  $AEO = \frac{9'' \sin. \text{nœud}}{\sin. 23^\circ \frac{1}{2}}$ , c'est-à-dire,  $9''$  multipliées par le sinus de la longitude du nœud, & divisées par le sinus de l'obliquité de l'écliptique. (Voyez encore 2873). Cette équation doit se retrancher de la longitude moyenne des astres tant que le nœud de la lune est dans les six premiers signes de sa longitude, & s'ajouter dans les six derniers, pour avoir la longitude actuelle & apparente; on en trouvera une table parmi celles du soleil, *pag.* 31, mais elle est construite de manière qu'on se sert du supplément de la longitude du nœud, & non pas du nœud

fig. 243. lui-même pour chercher l'équation ; on en trouvera le calcul plus exact à l'art. 2876.

Nutation en  
déclinaison.

2869. Cette équation de la longitude est la même pour tous les astres ; mais celle de l'ascension droite varie aussi-bien que la nutation en déclinaison. Soit  $S$  une étoile dont l'ascension droite moyenne est  $SPE$ , la distance moyenne au pôle égale à  $PS$ , complément de la déclinaison moyenne,  $SOE$  l'ascension droite apparente, comptée du colure des solstices  $OE$  ;  $SO$  le complément de la déclinaison apparente ;  $OPS$  ou  $OPF$  la différence entre l'ascension droite de l'étoile & celle du pôle  $O$ , qui est égale à la longitude du nœud augmentée de trois signes (2860) ; supposant un petit arc  $OF$  perpendiculaire sur le cercle de déclinaison  $PFS$ , on a  $SF = SO$  ; ainsi  $PF$  sera la quantité dont la déclinaison de l'étoile a augmenté ; mais  $R : 9'' :: \cosin. OPF : PF$ , donc l'équation de la déclinaison sera  $9''$  multipliées par le sinus de l'ascension droite de l'étoile dont on a ôté la longitude du nœud ; car cet angle est le complément de l'angle  $SPO$ . Cette nutation en déclinaison s'ajoute à la déclinaison moyenne pour avoir la déclinaison apparente, tant que son argument ne passe pas six signes ; elle se retranche dans les six derniers. C'est le contraire pour les étoiles dont la déclinaison est australe. (Voyez art. 2866, 2878).

2870. Pour calculer la nutation en ascension droite il faut avoir la différence entre l'angle  $SOE$  & l'angle  $SPE$  ; or, l'angle  $SOE$  qui est l'ascension droite apparente de l'étoile  $S$  comptée du colure des solstices  $OE$  est composé de deux portions, toutes deux variables, parce qu'elle est formée par deux cercles qui changent l'un & l'autre de position, nous rapporterons chacun de ces cercles à des cercles fixes, nous chercherons les deux variations séparément, leur différence donnera l'angle  $SOE$ . Ces deux portions variables font l'angle  $GOE$ , & l'angle  $SOG$  ; la première partie  $GOE$ , qui vient du changement d'un des cercles variables  $EO$ , ne dépend que de la situation du nœud ou de celle du pôle  $O$ , la seconde  $SOG$  dépend

de l'angle  $SPG$  qui est la différence entre l'ascension droite de l'étoile & le lieu du pôle  $O$ . Il faut concevoir par le pôle de l'écliptique  $E$  & par l'étoile  $S$  un cercle de latitude  $ESG$ , & l'on aura un triangle sphérique  $LPG$  qui se change en  $EOG$ , le côté  $EG$ , & l'angle  $G$  étant les mêmes, le reste variable; alors on trouve que la petite variation  $PO$  du côté adjacent à l'angle constant  $G$  est à la petite variation de l'angle opposé au côté constant  $EG$ , comme la tangente du côté  $EP$  opposé à l'angle constant est au sinus de l'angle  $EPG$  opposé au côté constant (3674); ainsi l'on dira, tang.  $23^{\circ}\frac{1}{2}$  : sin.  $EPO :: 9'' : x$ , &  $x$  sera la différence entre l'angle  $GOE$  & l'angle  $GPE$  qui est formé au pôle moyen. C'est le changement que la nutation  $PO$  a produit sur l'angle  $GPE$ , c'est donc la première partie de la nutation cherchée, commune à tous les astres, étoiles ou planètes; c'est la quantité qu'il faut ajouter à toutes les ascensions droites comptées au pôle moyen. C'est sur ce principe qu'est calculée la table VII. de mon recueil, pag. 179. dans laquelle cependant j'ai fait entrer une correction (2875). Cette première partie se retranche de l'ascension droite moyenne dans les six premiers signes de la longitude du nœud, & s'ajoute dans les six autres.

Fig. 243.

Nutation en ascen. droite première partie.

2871. On trouvera de même le changement que la nutation produit sur l'autre partie de l'ascension droite  $SPE$ ; c'est-à-dire, sur l'angle  $SPG$ , qui devient  $SOG$  par l'effet de la nutation; cette petite variation se calculera par la même analogie, au moyen du triangle  $SOG$  dont l'angle  $G$  est constant, aussi-bien que le côté  $SG$ , tandis que  $SP$  se change en  $SO$ ; l'on dira donc (3674), tang.  $SP$  : sin.  $SPG :: 9'' :: dSPG$ , c'est-à-dire, la tangente du complément de la déclinaison est au cosinus de la distance entre l'étoile & le lieu du nœud, comme  $9''$  sont à la quantité dont l'angle  $SPG$  doit varier pour devenir l'angle  $SOG$ ; c'est la variation du second angle, qui avec le précédent forme l'ascension droite moyenne  $SPE$  comptée du colure des solstices; c'est donc la seconde partie de la nutation en ascension droite. Si l'on prend

Seconde partie.

*Fig. 243.* pour argument l'ascension droite de l'étoile moins la longitude du nœud l'équation sera soustractive dans le premier & dernier quart de l'argument, additive entre 3 & 9° pour trouver l'ascension droite apparente. C'est le contraire quand les étoiles ont une déclinaison australe, parce que la tangente de la déclinaison devient négative. C'est ainsi que l'on a calculé la table IX. (*pag.* 180 du recueil des tables que j'ai cité à l'art. 2830); elle ne va que jusqu'à 54° de déclinaison, parce qu'on emploie assez rarement les étoiles plus éloignées de l'équateur; mais en tout cas, il feroit facile de l'étendre par l'analogie précédente ou par celles des articles 2865 & 2874. On en verra bientôt un exemple (2879). On trouve dans le Journal de Trevoux, & même dans les Calendriers astronomiques de Berlin pour plusieurs années, des tables de toutes les équations précédentes; mais il y avoit des erreurs de signes.

Erreurs de  
quelques ta-  
bles.

Effet sur l'é-  
quation du  
temps.

2872. Cette seconde partie de la nutation en ascension droite affecte les retours du soleil au méridien, & l'on est obligé d'en tenir compte dans le calcul de l'équation du temps (970). La première partie de la nutation n'y entre point, parce que celle-ci ne change que le lieu de l'équinoxe, elle ne change pas le point de l'équateur auquel un astre répond, & par conséquent ne change rien à la durée de ses retours au méridien; c'est la seconde partie de la nutation qui seule affecte ces retours, en faisant que l'astre réponde à un point physique de l'équateur tel que *V* différent du point *T* auquel il répondoit, de la quantité *VX*; c'est pour cela que j'ai mis cette partie de la nutation à la *pag.* 46 des tables de cet ouvrage, & j'en ai donné l'explication aux *pages* 18 & 38 des mêmes tables.

Corrections  
de la nutation  
en supposant  
une ellipse.

2873. Tous les calculs de nutation que nous venons d'expliquer supposent comme dans l'hypothèse de M. Machin, que le pôle décrit un cercle; cependant M. Bradley avoit remarqué lui-même que quelques observations avoient paru différer un peu de la théorie que nous avons exposée, & que les résultats des observations de  $\alpha$  de Cassiopée & de  $\eta$  de la grande Ourse se

trouvoient un peu rapprochés en supposant au lieu du petit cercle décrit par le pôle une ellipse qui n'eût que 16'' de diamètre de  $D$  en  $B$  dans le sens du colure des équinoxes, & qui en eût 18 dans le sens du colure des solstices ; mais comme cela n'étoit pas suffisant pour faire disparaître entièrement les inégalités, M. Bradley renvoyoit à la théorie la détermination de cet élément.

Si l'on consulte les *Recherches sur la précession des équinoxes*, de M. d'Alembert, on trouve que l'ellipse décrite par le pôle doit être encore plus étroite, le petit axe doit être au grand comme le cosinus de  $23^{\circ}\frac{1}{2}$  est au cosinus du double (3574).

Il est vrai que l'on peut avec la seule hypothèse du cercle représenter, pour ainsi dire, les observations avec toute la précision des observations même ; ainsi l'on pourroit se contenter des tables de la nutation en déclinaison & de la seconde partie de la nutation en ascension droite qui ne sont calculées que dans l'hypothèse du cercle, & négliger la correction qui dépend de l'ellipse. Cependant pour ne rien omettre d'intéressant à cet égard, j'ai calculé la table XII. pag. 182 de mon recueil, pour réduire à l'hypothèse de l'ellipse les quantités prises dans les tables qui ne seroient calculées que dans l'hypothèse du cercle.

2874. Cette correction, n'a encore été expliquée dans aucun livre, elle peut se calculer de la manière suivante. Soit  $E$  (fig. 242) le pôle de l'écliptique ;  $P$  le lieu moyen du pôle de l'équateur,  $M$  le lieu vrai du pôle dans l'ellipse  $RQV$ ,  $O$  son lieu dans le cercle, on suppose que le lieu  $M$  dans l'ellipse soit sur la perpendiculaire  $NAO$  ; & que le rapport entre les axes  $RP$  &  $PQ$  soit celui de 9'' à 6'' 7, comme on le déduit des formules de M. d'Alembert, en faisant les substitutions avec soin,  $NM$  est à  $AO$  dans le même rapport, donc 9'' à 6'' 7, comme la tang. de  $NPO$  ou de la longitude du nœud est à la tangente de  $NPM$ , égale à la longitude du nœud corrigée & telle qu'il faut l'employer dans les formules précédentes. Connoissant l'an-

Fig. 243.

Fig. 242.

*fig. 242.* gle  $NPM$ , on dira la sécante de l'angle  $NPO$  est à la sécante de  $NPM$  comme  $PO$  est à  $PM$ , ou ce qui est plus commode,  $\cos. NPM : \cos. NPO :: PO : PM$ , car les sécantes sont en raison inverse des cosinus. Ainsi le lieu vrai du pôle en  $M$  est déterminé par l'angle  $RPM$ , qu'il faut employer à la place de l'angle  $RPO$ , & par la longueur  $PM$  qui doit servir de base aux calculs des équations précédentes dans lesquels nous avons employé  $PO = 9''$ . La valeur de  $PM$ , qui est la distance du pôle vrai au pôle moyen, se trouve dans la seconde colonne de la table XII. *pag.* 182 du recueil que j'ai cité. Les colonnes suivantes donnent la différence entre une équation calculée sur une base  $PO$  & celle qui auroit été calculée sur  $PM$ ; celle-ci est toujours la plus petite; ainsi la correction est toujours soustractive.

Par exemple, dans la table V. *pag.* 178. on trouveroit la plus grande nutation de  $22'' 8$  pour trois signes de la longitude du nœud, en supposant un cercle, mais la distance des pôles est alors de  $6'' 7$ ; il faudra dire  $9'' : 6'' 7 :: 22'' 8$  est  $16'' 8$ , &  $16'' 8$  sera la nutation toute corrigée, c'est-à-dire, la nutation dans l'ellipse, plus petite de  $6''$ . Cette différence  $6''$  est l'équation que l'on trouveroit dans la table XII. si elle étoit étendue jusqu'à  $22'' 8$  au lieu d'être bornée à  $16'$ .

Correction  
du nœud,

2875. Ainsi pour calculer la nutation dans l'ellipse il faut diminuer la distance des pôles, & employer  $PM$  au lieu de  $PO$ ; il faut aussi corriger la longitude du nœud ou l'angle  $RPO$ , en retranchant l'angle  $AIPO$ , qui peut aller à  $8^{\circ} 26'$ ; car l'angle  $OPS$  (*fig.* 243) que nous avons employé pour calculer la nutation (2869) doit être corrigé de la même quantité; on trouve cette correction par l'analogie expliquée ci-dessus (2874); la correction est nulle quand le pôle est en  $A$  ou en  $B$ ; on en trouve une table à la *pag.* 181 du recueil que j'ai cité, de même que dans la connoissance des temps de 1765 & dans celle de 1766. Ainsi des tables déjà faites par les formules précédentes & avec l'hypothèse circulaire, peuvent se corriger, au moyen de cette double attention; c'est-à-dire,

à-dire , qu'en se servant de ces tables , il faut employer le lieu du nœud corrigé ; & ensuite appliquer à la nutation trouvée , la correction qui provient de la distance des poles.

2876. La nutation en longitude dans l'ellipse se calcule facilement : on multiplie la distance des poles  $PM$  par le sinus de l'angle  $NPM$ , c'est à-dire, de la longitude du nœud corrigé , & l'on divise le produit par le sinus de  $PE = 23^{\circ} \frac{1}{2}$  ; elle est de  $16'' 8$  quand le nœud est dans les solstices , & que la distance des poles n'est que de  $6'' 7$  ; c'est ainsi que j'ai calculé la nutation en longitude dans l'ellipse (pag. 31 des tables de cet ouvrage).

Règles pour  
la nutation  
dans l'ellipse.

La première partie de la nutation en ascension droite dans l'ellipse se calcule de même en employant la tangente de  $23^{\circ} \frac{1}{2}$  au lieu du sinus (2870). (Table VII. de mon recueil, pag. 179).

2877. Pour calculer la seconde partie de la nutation en ascension droite dans l'ellipse, on ajoute le logarithme de la tangente de la déclinaison de l'étoile, celui de la distance des poles, & celui du cosinus de la différence entre l'ascension droite de l'étoile & celle du nœud corrigé.

2878. La nutation en déclinaison se trouvera en multipliant la distance des poles (2874) par le sinus de l'ascension droite de l'étoile moins la longitude du nœud corrigée. La table de l'équation de l'obliquité de l'écliptique (2861) est la seule qui n'exige aucune correction ; en effet , soit que le pole soit en  $O$  ou en  $M$ , l'obliquité de l'écliptique est toujours égale à  $LN$  ; ainsi la table VI. de mon recueil est également bonne pour le cercle & pour l'ellipse.

2879. EXEMPLE. Le 10 Juillet 1761, la longitude moyenne du nœud de la lune étant de  $1^s 27^{\circ} 26'$  on demande la nutation d'ALDEBARAN, dont l'ascension droite étoit de  $65^{\circ} 34'$  & la déclinaison de  $16^{\circ} 1'$ . On dira  $9'' : 6'' 7 :: \text{tang. } 57^{\circ} 26' : \text{tang. } 49^{\circ} 22'$ . C'est le lieu du nœud corrigé, qu'il faut retrancher de l'ascension droite de l'étoile  $65^{\circ} 34'$ , & l'on aura l'argument  $16^{\circ} 12'$ . On dira

Calcul de la  
nutation dans  
l'ellipse.

aussi  $\cos. 49^{\circ} 22' : \cos. 57^{\circ} 26' :: 9'' 0 : 7'' 4$ . C'est la distance du pôle vrai au pôle moyen.

Pour avoir la nutation en ascension droite on ajoutera le logarithme de  $7'' 4$  avec celui du sinus de  $49^{\circ} 22'$ , & l'on en retranchera celui de la tangente de  $23^{\circ} 28'$ , on aura le logar. de  $13'' 0$ . C'est la première partie de la nutation en ascension droite, qui est soustractive, parce que le nœud est dans un des six premiers signes.

Pour trouver la seconde partie de la nutation en ascension droite, on ajoutera le logarithme de  $7'' 4$ , avec celui du cosinus de l'argument  $16^{\circ} 12'$ , & celui de la tangente de la déclinaison  $16^{\circ} 1'$ , on aura le logarithme de  $2'' 1$ ; c'est la seconde partie de la nutation en ascension droite, soustractive, parce que l'argument est entre  $9^{\circ}$  &  $35^{\circ}$ , & que l'étoile est boréale; ainsi le total de la nutation en ascension droite sera —  $15'' 1$ .

La nutation en déclinaison est le produit de  $7'' 4$ , par le sinus de l'argument  $16^{\circ} 12'$ , c'est-à-dire,  $2'' 1$ , additive à la déclinaison moyenne, parce que l'argument  $16^{\circ} 12'$  est entre  $0$  &  $6$  signes, & que l'étoile est boréale.

C'est ainsi que l'aberration & la nutation ont mis dans les calculs de l'astronomie moderne, une longueur qui seroit quelquefois rebutante sans le secours des tables particulières. Pour y remédier, j'ai mis dans le livre de la connoissance des temps, ou des mouvemens célestes, depuis l'année 1760 inclusivement, jusqu'à l'année 1772, les aberrations & les nutations de 263 étoiles principales, sous une forme très-commode pour les calculateurs, & j'espère les continuer dans les volumes suivans; on trouvera celles des étoiles de la première grandeur à la fin des tables de cet ouvrage.





## LIVRE DIX-HUITIEME.

### ASTRONOMIE DES SATELLITES.

LES SATELLITES de Jupiter font quatre petites planètes qui tournent autour de Jupiter , comme nous l'avons indiqué dans la figure 47 ; Galilée les appelloit *Mediceæ Sydera* ; Hévélius les nommoit *Circulatores Jovis*, *Jovis comites* ; ils servent continuellement aux astronomes pour déterminer les différences de longitudes entre les différens pays de la terre ( 2494 ) ; il importoit donc beaucoup d'avoir une théorie sûre & exacte de leurs mouvemens , & plusieurs astronomes y ont travaillé avec la plus grande assiduité ; c'est ce qui m'engage à en parler ici fort au long , d'autant plus que cette matière n'a été traitée jusqu'ici dans aucun livre d'astronomie avec un détail suffisant.

2880. Les quatre satellites de Jupiter furent apperçus par Galilée le 7 Janvier 1610 <sup>(a)</sup>, peu après la découverte des lunettes d'approche (2283) ; Simon Marius prétendit les avoir vus dès le mois de Novembre précédent <sup>(b)</sup>, & il publia des tables de leurs mouvemens qui se trouvèrent très-défectueuses ; Gassendi assure dans la vie de M. de Peiresc, que celui-ci fut un des premiers après Galilée & Reinieri , à travailler conjointement avec Morin, &c. pour réduire en tables les mouvemens des satellites. Hodierna ayant fait quelques observations vers l'an 1655 , publia des tables , qui , fondées sur un trop petit nombre d'observations , se trouvèrent fort imparfaites ; on n'eut de tables un peu exactes des mouvemens des satellites qu'en 1668 , par M. Cassini ; il en donna d'autres encore en 1693 ; M. Pound en donna aussi en 1719 , dans les Transactions Phi-

Découverte  
des satellites.

(a) *Nuncius Sydereus*, Florentiæ, 1610. Il Saggiatore, 1613. { *detectus, inventore & autore Simone Mario, Norimb, 1614.*

(b) *Mundus Jovialis*, anno 1609 ]

lofophiques, n°. 361. Les tables de M. Bradley remifes à M. Halley en 1718, n'ont été publiées qu'en 1749. (2881) Celles dont nous nous fervons aujourd'hui pour calculer les éclipses des fatellites de Jupiter, font de M. Wargentín; il en avoit donné une première édition en 1746. (*Acta Societ. Reg. Scient. Upsalienfis ad an. 1741*), je les ai fait réimprimer en 1759, considérablement augmentées par l'auteur, à la suite des tables de Halley; on en trouvera une troisième édition dans cet ouvrage, d'après un nouveau manuscrit de M. Wargentín. C'est à l'explication de ces tables & de leur construction, que se réduit une grande partie de ce que j'ai à dire sur la théorie des fatellites de Jupiter.

2882. La première chose qu'on doit faire pour construire les tables, est de déterminer les temps des révolutions; pour cela on pourroit observer plusieurs fois le moment où chaque fatellite paroîtroit en conjonction avec Jupiter; mais afin que les conjonctions observées de la terre soient les mêmes que les conjonctions vues du soleil; il faudroit choisir pour déterminer les révolutions, les conjonctions des fatellites qui arrivent quand Jupiter est en opposition; car alors si le fatellite passe au-dessus, ou au-dessous du disque de Jupiter, (& il en est de même des fatellites de Saturne), le moment où il répond au centre de Jupiter est celui de la conjonction vue du soleil & vue de la terre. On a encore d'une manière plus facile & plus commode les conjonctions vues du soleil, par le moyen des éclipses (2917); car lorsqu'un fatellite est au milieu de l'ombre que Jupiter répand derrière lui, il est évident que le fatellite est en conjonction avec Jupiter, puisqu'il est sur la ligne menée du soleil à Jupiter. L'intervalle d'une éclipse à l'autre sera la durée d'une RÉVOLUTION SYNODIQUE (1173); c'est-à-dire, d'une révolution par rapport au soleil; & ce sont presque les seules révolutions dont on fasse usage. On a soin de comparer entre elles des conjonctions très-éloignées, pour mieux compenfer les inégalités des fatellites, celles de Jupiter, & les erreurs inévitables dans les observations; on trouvera ces révolu-

Méthode  
pour obser-  
ver leurs ré-  
volutions sy-  
nodiques.

tions calculées avec le plus grand soin, à l'art. 2973, & dans la seconde ligne de la table de l'art. 2972, telles que M. Wargentin, les a déduites des observations les plus récentes.

2883. LA RÉVOLUTION PÉRIODIQUE est le retour d'un satellite au même point de son orbe, ou au même point du ciel vu de Jupiter, après avoir fait  $360^\circ$ ; cette révolution périodique est un peu plus courte que la révolution synodique; celle-ci ne le rameneroit pas jusqu'à l'ombre de Jupiter qui pendant ce temps-là s'est avancé lui-même, d'une certaine quantité dans son orbite, tout ainsi que nous l'avons expliqué pour la lune (1418). Nous ne parlerons guères que des révolutions synodiques; ce sont les seules que nous puissions immédiatement observer, & celles dont dépendent les éclipses qui sont aujourd'hui les seules choses que l'on observe; cependant on trouvera dans la table des élémens (2972), les révolutions périodiques des quatre satellites par rapport aux équinoxes. Pour avoir les révolutions périodiques par le moyen des révolutions synodiques observées, il faut faire la proportion suivante;  $360^\circ$  plus le mouvement de Jupiter, pendant une révolution synodique, sont à la durée de cette révolution synodique observée, comme  $360^\circ$  sont à la durée de la révolution périodique.

2884. Connoissant les révolutions des satellites, il faut aussi connoître leurs distances par rapport au centre de Jupiter, en les mesurant dans le temps de leur plus grande élongation, avec un micromètre ou un héliomètre (2433); il suffit même de mesurer la distance d'un seul, les autres distances se calculent aisément par le rapport constant qu'il y a entre les carrés des temps & les cubes des distances, comme nous le dirons bientôt (2887).

C'est ainsi qu'on a trouvé les distances ou les élongations telles que je les ai rapportées, dans la table de l'article 2972 d'après Newton; celle du 4<sup>e</sup>. satellite a été trouvée par M. Pound de  $8' 16''$  avec un micromètre appliqué à une lunette de 15 pieds, & celle du

Révolutions  
périodiques.

Distances  
des satellites;

3<sup>e</sup> fatellite de  $4' 42''$  avec une lunette de 123 pieds. Les deux autres ont été conclues par le calcul, de  $2' 56'' 47'''$ , &  $1' 51'' 6'''$ . (Newton, L. III. ).

Comme il est plus commode d'exprimer ces distances en demi-diamètres de Jupiter, & en centièmes de ce même rayon, c'est aussi la forme que l'on emploie ; on trouvera ces distances dans la table des élémens (2972), telles qu'elles furent déterminées par M. Cassini (*Lem. d'astr. pag.* 633) ; par exemple, la distance du premier fatellite est de 5, 67, c'est-à-dire, 5 demi diamètres de Jupiter, & 67 centièmes, ou deux tiers ; par-là on trouveroit aisément leurs distances réelles, car le diamètre de Jupiter est environ onze fois plus grand que celui de la terre (1398). Il suffiroit donc de multiplier par 11 les distances que nous donnons en demi-diamètres de Jupiter, pour les avoir en demi-diamètres de la terre, ou par 15416 pour les avoir en lieues.

Distance en  
lieues,

2885. Le diamètre de Jupiter vu du centre du soleil dans ses moyennes distances au soleil, ou vu de la terre dans ses moyennes distances à la terre, est de  $37'' \frac{1}{4}$  (1393) ; son demi-diamètre est donc  $18'' \frac{1}{8}$ . Si l'on multiplie cette quantité par les distances exprimées en demi-diamètres de Jupiter, on aura ces mêmes distances en minutes & en secondes, telles qu'on les observe quand Jupiter est dans ses moyennes distances à la terre ; mais elles peuvent augmenter ensuite ou diminuer d'un cinquième à cause de la distance de Jupiter, plus ou moins grande par rapport à la terre. Les distances des fatellites en minutes & en secondes, peuvent servir à comparer les distances de ces fatellites avec celles des planètes au soleil ; supposons, par exemple, qu'on veuille prendre la distance de Vénus au soleil pour unité, ou pour échelle commune, & qu'on demande la distance du quatrième fatellite par rapport au centre de Jupiter ; on fera cette proportion : la distance de Vénus au soleil 723 (art. 1222), est à celle de Jupiter comme 1 est à 7, 1903 distance de Jupiter au soleil ; on dira ensuite le rayon est au sinus de  $8' 16''$ , élongation du fatellite, comme 7, 1903 est à 0, 01729, distance du

satellite, en parties de celle de Vénus; nous en ferons usage dans le XXII<sup>e</sup>. livre (3405). Cette distance est celle que Newton a employée.

2886. C'est d'après le diamètre supposé de  $37''\frac{1}{4}$ , que Newton nous donne les distances d'une manière un peu différente, savoir, 5, 965; 9, 494; 15, 141; 26, 63; (Newton, pag. 390 & 391); il rapporte les distances suivant différens observateurs, mais il s'en tient à celles que nous venons de donner.

2887. Wendelinus en comparant les distances des satellites avec les durées de leurs révolutions périodiques, remarqua que la loi de Képler (1224), y étoit observée, aussi bien que dans les planètes (*Astr. ref.* 371); en effet, si l'on prend le carré de  $11\ 18^h\ 28'$ , & celui de  $161\ 16^h\ 32'$ , ou plus exactement les temps périodiques du premier & du 4<sup>e</sup>. satellite par rapport aux étoiles fixes; & si l'on prend aussi les cubes de leurs distances 5, 67 & 25, 30, on aura (en ne prenant que les premiers chiffres), les nombres 6642, 5775, 1820, 1619, qui sont véritablement en proportion.

On y observe la loi de Képler.

2888. Les révolutions des satellites (2882), étant additionnées successivement jusqu'à ce qu'elles forment des nombres semblables, on trouve à peu-près les périodes suivantes.

Retour des satellites à même configuration.

247 révolutions du I. font 437<sup>i</sup> 3<sup>h</sup> 44'

123 révolutions du II. font 437 3 42

61 révolutions du III. font 437 3 36

26 révolutions du IV. font 435 14 16

Ainsi dans l'intervalle de 437 jours, les 3 premiers satellites reviennent à une même situation entre eux, à 8' près; cette période nous servira quand nous parlerons des attractions réciproques des satellites (2900, 2969); & des inégalités qui en résultent, sur-tout dans les trois premiers.

## INEGALITÉS DES SATELLITES.

Inégalité qui  
vient de la pa-  
rallaxe an-  
nuelle.

Fig. 244.

2889. LA première & la plus grande inégalité qu'on ait remarquée dans les révolutions des satellites, par rapport au disque de Jupiter, est celle qui est produite par la parallaxe annuelle (1141); soit *S* le soleil (fig. 244), *I* le centre de Jupiter, *B* un satellite en conjonction sur la ligne des centres, ou sur l'axe de l'ombre, *T* le lieu de la terre, *TIG* le rayon mené de la terre par le centre de Jupiter; l'angle *TIS* égal à l'angle *BIG* est la parallaxe annuelle de Jupiter, qui peut aller à  $12^{\circ}$ ; il faut alors que le satellite arrive de *B* en *G* & parcoure  $12^{\circ}$  de son orbite, pour nous paroître en conjonction sur la ligne *TIG*, quoique sa véritable conjonction soit arrivée au point *B*; ces  $12^{\circ}$ , font  $1^{\text{h}} 25'$  de temps pour le premier satellite,  $2^{\text{h}} 50'$ ,  $5^{\text{h}} 44'$  &  $13^{\text{h}} 24'$  pour les autres; telle est l'inégalité qu'on trouve entre les révolutions des satellites, ou leurs retours observés de la terre, quand on les compare au disque apparent de Jupiter, & qu'on observe les passages des satellites sur ce disque; mais quand on se sert des éclipses pour connoître les révolutions, on n'est point exposé à cette inégalité; nous en parlerons cependant quand il s'agira des observations (2988), parce que la situation apparente des satellites en dépend.

2890. Je passe aux inégalités qui ont lieu par rapport à la ligne des centres *SIB*, & qui affectent les retours des satellites à leurs conjonctions, & les intervalles des éclipses. Nous avons supposé dans la recherche des périodes (2882), qu'on avoit pris un intervalle de temps assez long pour que les inégalités fussent fondues & compensées; si dans la recherche des révolutions ou des moyens mouvemens, on ne prenoit que l'intervalle d'une seule révolution du satellite, le résultat seroit affecté des inégalités de Jupiter, & de celles du satellite; mais si l'on compare des observations éloignées d'une période entière de Jupiter, ou de plusieurs, c'est-à-dire, de 12, de 24

ans, &c. tout sera compensé, & l'on aura exactement le mouvement moyen, abstraction faite de l'inégalité des retours; on parvient ensuite à connoître ces inégalités, en comparant entre eux les intervalles des différentes éclipses; intervalles qui devroient être toujours égaux, si le mouvement n'étoit pas altéré par des variations considérables.

2891. La plus grande inégalité dans les retours des conjonctions & des éclipses, est celle qui vient de l'inégalité du mouvement de Jupiter; car la différence entre le retour d'une conjonction & une révolution périodique complète du satellite, dépend du mouvement de Jupiter vu du soleil dans cet intervalle de temps ( 1421 ), lequel est irrégulier; donc les éclipses par cela seul ne reviendront point dans des intervalles de temps égaux. L'intervalle entre deux éclipses est égal à une révolution du satellite, plus le temps qu'il lui faut, pour atteindre l'ombre de Jupiter, qui s'est avancée autant que Jupiter lui-même, mais inégalement; or l'équation de Jupiter étant de  $5^{\circ} 34'$  ( 1274 ), tantôt additive, tantôt soustractive, la somme de tous les petits intervalles dont chaque révolution synodique excède chaque révolution périodique, peut monter à plus de  $11^{\circ}$ .

De la grande inégalité des conjonctions.

2892. Soit *ABP* (fig. 245), l'orbite de Jupiter, *S* le soleil, *F* le foyer supérieur de l'ellipse, autour duquel le mouvement de Jupiter est sensiblement uniforme ( 1252 ); supposons un satellite qui dans une période de Jupiter fasse un nombre complet de révolutions périodiques; que Jupiter ait fait le quart de sa révolution en temps, c'est-à-dire, que l'angle *AFB* qui exprime l'anomalie moyenne, soit de  $90^{\circ}$ ; le satellite doit aussi avoir achevé le quart des révolutions périodiques qu'il peut faire pendant une période de Jupiter, & être parvenu au point *H* qui répond dans le ciel au même point que le lieu moyen de Jupiter; mais le satellite arrivera en *K*, où se fait la conjonction avec Jupiter, & sera éclipsé, long temps avant que d'être arrivé en *H*; la différence *KH* mesure l'angle *KBH* égal à l'angle

Fig. 245.

## 234 ASTRONOMIE, LIV. XVIII.

*FBS*, qui est l'équation du centre de Jupiter, c'est-à-dire,  $5^{\circ} 34' (1274)$ , le premier satellite emploie  $0^h 39' 25''$  à parcourir  $5^{\circ} 34'$  de son orbite; ainsi les éclipses que l'on observe devront avancer de  $39' 25''$  au bout de 3 ans; six ans après, lorsque Jupiter sera dans la partie opposée de son orbite elles retarderont d'autant.

Valeur de la  
plus grande  
équation,

2893. Pour trouver la quantité de cette équation dans chaque orbite des satellites on fait cette proportion :  $360^{\circ}$  sont à la durée de la révolution synodique, comme  $5^{\circ} 34' 1''$  sont à un quatrième terme; on les trouvera calculées exactement dans la table de l'art. 2972. M. Wargentin les suppose de  $39' 22''$ ;  $1^h 19' 13''$ ;  $2^h 39' 42''$ ; &  $6^h 12' 59''$ . Tel est le fondement de la plus grande inégalité des conjonctions & des éclipses des satellites; dans nos tables elle a pour argument le nombre *A*, qui est l'anomalie moyenne de Jupiter, calculée en dixièmes de degrés; elle est égale à l'équation même de Jupiter convertie en temps à raison de la révolution synodique du satellite; mais l'équation de Jupiter étant variable (1274), on est obligé de changer la valeur de cette équation, comme nous le remarquerons dans l'usage des tables, pag. 172.

L'inégalité qui dépend de l'excentricité de Jupiter, & que je viens d'expliquer, fut la première que M. Cassini employa dans le calcul des éclipses; mais il remarqua bientôt qu'elle ne suffisoit pas pour expliquer toutes les différences qui s'observoient entre les retours de ces éclipses. Il employa d'abord dans ses éphémérides certaines équations empiriques, c'est-à-dire, que l'observation lui indiquoit, sans en connoître la loi ni le principe; & nous en employons encore de semblables, du moins pour le troisième satellite (2903).

Propagation  
successive de  
la lumière.

2894. La première inégalité dont on ait aperçut la véritable cause, est celle qui vient de la propagation successive de la lumière. Soit *S* (fig. 245) le soleil; *ABP* l'orbite de Jupiter, *TR* l'orbite de la terre dont le diamètre *TR* est de 66 millions de lieues; la lumière que Jupiter nous réfléchit, est un corps dont l'impres-



sion doit arriver jusqu'à nous , pour nous faire appercevoir Jupiter & ses satellites ; le mouvement de ce corps ne sauroit être d'une vitesse infinie , il lui faut un certain temps pour arriver de *T* en *R* ; ainsi quand la terre est en *T*, Jupiter étant en opposition, la lumière arrive plutôt à nos yeux que quand la terre est en *R*, Jupiter approchant de sa conjonction ; on observa en effet que les éclipses des satellites arrivoient environ un quart d'heure plus tard quand la terre étoit vers *R*, que quand elle étoit en *T*.

*Fig. 245.*

2895. Nous voyons que le 22 Aout 1675 , M. Cassini publia un petit écrit pour annoncer les configurations des satellites , & qu'il y parloit de la propagation successive de la lumière , sur laquelle M. Romer lut sa dissertation à l'académie le 22 Novembre suivant. (*Regiæ scientiarum academ. histor. authore Jo. Bapt. Duhamel* , édition de 1698 , pag. 145 ).

« M. Romer expliqua très-ingénieusement ( dit M. Cassini ), une de ces inégalités qu'il avoit observées pendant quelques années, dans le premier satellite, par le mouvement successif de la lumière, qui demande plus de temps à venir de Jupiter à la terre lorsqu'il en est plus éloigné, que quand il en est plus près; mais il n'examina pas si cette hypothèse s'accordoit aux autres satellites qui demanderoient la même inégalité de temps: il m'est arrivé souvent, qu'ayant établi les époques des satellites dans les oppositions avec le soleil, où les inégalités synodiques doivent cesser, & les ayant comparées ensemble pour avoir le moyen mouvement, lorsque je calculois sur ces époques, & sur ce moyen mouvement les éclipses arrivées près de l'une & de l'autre quadrature de Jupiter avec le soleil, le moyen mouvement calculé au temps de ces quadratures s'est trouvé différer d'un degré entier, ou un peu plus, du vrai mouvement trouvé par les observations immédiates; de sorte que les satellites dans les quadratures avoient environ un degré d'équation subtractive à l'égard du mouvement établi dans les oppositions, d'où l'on pouvoit inférer que cette

M. Romer  
la découvre.

## 236 ASTRONOMIE, Liv. XVIII.

» équation seroit doublée dans les conjonctions (Voyez les  
» *hypothèses & les tables des satellites*, &c. 1693, in-fol. pag.  
» 52 ) ».

2896. On voyoit clairement dans le premier satellite cette inégalité ; mais il y eut quelques difficultés pour les autres satellites, parce que l'inégalité sembloit beaucoup plus grande que dans le premier, suivant M. Maraldi. (*Mém. acad.* 1707). Cependant M. Halley en 1694, assuroit qu'il falloit nécessairement introduire cette équation de la même quantité dans tous les satellites. (*Phil. transf. n°. 214*) ; M. Pound fit la même remarque (*Philos. transf.* 1719), de même que M. de Fouchy (*Mém. acad.* 1732). M. Pound en publia une table, à laquelle il joignit la correction qui dépend de la distance de Jupiter à la terre (2898) ; M. Whiston les publia de nouveau en 1738. (*The longitude discovered by the Jupiter's planets*; By W. Whiston, 1738. in-8°.).

M. Maraldi (*Mém. acad.* 1741) ne doutoit plus après la découverte de l'aberration (2800) qui prouvoit invinciblement la propagation successive de la lumière, que cette équation ne dût être commune aux 4 satellites, & il trouvoit que les tables du 3<sup>e</sup> étoient fort rapprochées de l'observation par le moyen de cette équation ; M. Wargentin s'assura en 1746, de cette équation de la lumière, par la comparaison d'un grand nombre d'observations.

Explication  
de cette iné-  
galité.

Fig. 245.

2897. La vitesse avec laquelle les rayons de lumière parviennent depuis le soleil jusqu'à nos yeux, est telle que pendant le même temps la terre fait dans son orbite un arc de 20'' (2806) ; or la terre décrit un arc de 20'' en  $0^h 8' 7'' \frac{1}{3}$  de temps à peu-près ; la lumière met donc 8' à parvenir du soleil à la terre. Soit *TVR* (fig. 245) l'orbite de la terre, *S* le soleil ; lorsque la terre sera en *R*, Jupiter étant en conjonction avec le soleil, c'est-à-dire, en *A*, la lumière mettra pour venir jusqu'à nous 16' 15'' de plus qu'elle n'en employoit lorsque la terre étoit en *T*, & Jupiter en opposition dans le point *A* ; ainsi les éclipses des satellites arriveront 16' 15'' plus tard dans

les conjonctions que dans les oppositions, & dans les autres temps à proportion ; c'est l'objet de l'équation principale de la lumière qui est contenue dans la table CXXV.

2898. La table que donne M. Wargentin de cette équation de la lumière, suppose que Jupiter soit dans ses moyennes distances ; mais sa distance au soleil est souvent plus grande à cause de l'excentricité de Jupiter, & la différence des distances est quelquefois égale à la moitié de  $SR$  ; en sorte que quand Jupiter en conjonction ou en opposition, est en même temps aphélie, il y a  $4' 5''$  de plus que quand il est périhélie ; on en a fait une table qui dépend de l'anomalie de Jupiter ; c'est la petite équation de la lumière, *pag.* 165.

2899. La grande équation qui est causée par l'excentricité de Jupiter (2893), & les deux équations de la lumière, sont des causes d'inégalités communes à tous les satellites ; mais il y a d'autres équations particulières à chacun d'eux ; on les a reconnues par observation ; on en a déterminé les quantités à quelques minutes près, sans en connoître parfaitement la cause, & l'on applique une de ces équations empiriques à chacun des quatre satellites : suivant les tables de 1759, elle est de  $3' \frac{1}{2}$  pour le premier, de  $16' \frac{1}{2}$  pour le 2<sup>e</sup>, de  $8'$  pour le 3<sup>e</sup>, & de  $1^h 3'$  pour le 4<sup>e</sup> ; dans les nouvelles tables l'équation du 3<sup>e</sup>. est partagée en trois autres ; ces équations ne sont pas encore suffisantes, parce qu'on n'a pas un assez grand nombre d'observations pour connoître toutes les inégalités des satellites ; ces équations sont le résultat de plusieurs inégalités qu'il faudroit séparer, & dont nous ne connoissons jusqu'ici que la plus grande somme (2971).

Equations  
particulières  
à chaque sa-  
tellite.

La manière de déterminer les équations particulières à chaque satellite, consiste uniquement à comparer beaucoup d'observations avec le calcul des tables, où l'on a employé les inégalités précédentes ; car alors la différence entre le calcul & l'observation forme l'équation que l'on cherche ; quand on a fait cette comparaison un

## 238 ASTRONOMIE, LIV. XVIII.

grand nombre de fois, l'on est en état de former une table de l'inégalité & d'en voir la période.

Equation  
du premier.

2900. L'équation du 1<sup>er</sup> fatellite est de  $3'30''$  de temps, ce qui répond à un demi-degré de son orbite; M. Bradley apperçut en 1719. que dans les années 1682, 1695 & 1718, c'est-à-dire, environ tous les 12 ans, les éclipses du 1<sup>er</sup> fatellite duroient environ  $2^h 20'$ , tandis que dans l'autre nœud, en 1677 & 1689 ces durées n'étoient que de  $2^h 14'$ ; cette différence paroissoit prouver que dans le premier cas le fatellite avoit un mouvement plus lent, & se trouvoit par conséquent à une plus grande distance de Jupiter, ce qui indiquoit une excentricité dans son orbite; cependant M. Bradley regardoit l'attraction des fatellites comme étant la principale cause de cette inégalité, & il indiqua la période de 437 jours (*Philos. transf.* 1726, n<sup>o</sup>. 394); il en est parlé dans l'avertissement qui est à la suite de ses tables insérées parmi celles de M. Halley. Mais M. Wargentin avant la publication de ces tables déterminâ par les observations la loi & la quantité de cette équation du premier fatellite, & il la fit entrer dans ses tables publiées en 1746; ce qui leur donna un très-grand degré d'exactitude.

Depuis ce temps-là, M. Bailly s'est assuré que toutes les inégalités sensibles du premier fatellite sont dûes à l'action du second, mais que la plus considérable de toutes est en effet de  $3'30''$  de temps, comme l'a trouvée M. Wargentin, avec une période de 437 jours. (*Essai sur la théorie des satell. de Jupiter*, 1766, pag. 77). Cette équation est comprise dans la table CXXIX.

Equation  
du second.

2901. Le second fatellite est celui de tous qui a les plus grandes inégalités; l'excentricité de son orbite peut bien y entrer pour quelque chose; cependant on approche beaucoup de l'observation par l'équation seule de  $16' \frac{1}{2}$ , dont la période est de 437 jours  $20^h$ , & qui paroît provenir de l'attraction du 1<sup>er</sup> & du 3<sup>e</sup> fatellite. M. Bradley indiqua le premier cette période de 437 jours, en assurant qu'elle ramenoit les erreurs des tables à peu près dans le même ordre. Il ajoutoit cependant que les der-

nières observations indiquoient une excentricité dans son orbite, & que d'autres fois le second satellite s'écartoit d'une quantité sensible, en si peu de temps qu'on ne pouvoit attribuer ces différences qu'aux attractions des autres satellites. Le P. Grammatici essaya de fixer la quantité de cette équation, mais M. Wargentin est le premier qui l'ait déterminée exactement dans ses tables, ce qui les a rendues fort exactes.

Le second satellite est dérangé tout à la fois par le 1<sup>er</sup> & le 3<sup>e</sup>; mais cette double perturbation, suivant M. Bailly, se réduit à une seule équation principale, & produit l'équation de 16' de temps en plus & en moins, que M. Wargentin avoit admise dans ses tables de 1746, & qu'il a retenue dans les dernières.

2902. M. Maraldi aperçut que le calcul des éclipses du troisième satellite s'écartoit de l'observation lorsque Jupiter étoit dans ses moyennes distances, (*Mém. acad.* 1741). M. Wargentin dans ses tables de 1746 soupçonnoit une équation égale à celle du premier satellite, & d'une même période, mais dans ses tables de 1759, il introduisit une équation de 16' de temps, en plus & en moins, dont la période étoit de 12 ans & demi; elle satisfaisoit à la plus grande partie des inégalités au commencement du siècle; mais elle s'est trouvé répondre mal aux observations modernes, il sembloit depuis quelques années qu'on auroit pu la négliger en ajoutant seulement 7' aux époques, comme si elle eût été le résultat de deux équations qui conspiroient il y a 60 ans, & qui se détruisoient en partie de nos jours.

Equation du  
troisième.

2903. Cette inégalité du 3<sup>e</sup> satellite paroît venir en grande partie de son excentricité, puisque la période est de  $12\frac{1}{2}$  ans; mais M. Bailly, d'après la théorie comparée à un grand nombre d'observations, pense que l'équation de l'orbite n'est que de 10' de degré; qu'il s'y joint cinq autres équations. La première de 25'' due à l'action du premier satellite, la seconde de 4' 10'' due à l'action du second, M. de la Grange la trouve de 4' 41'' (ou 2' 14'' de temps); la 3<sup>e</sup> de 1' 19'' due encore à l'action du

second, mais à raison de l'excentricité de l'orbite troublée du troisième satellite ; enfin les deux autres équations de  $17''$  & de  $59''$  dûes à l'action du 4<sup>e</sup> satellite ; ces cinq équations peuvent produire dans certains cas jusqu'à  $16' 11''$ , suivant M. Bailly, quantité qui ne diffère pas beaucoup de  $16' 46''$  de degré ou  $16'$  de temps, valeur de l'équation totale déterminée autrefois par les observations, & qui étoit employée dans les tables de 1759. M. Wargentin en a employé trois dans cette nouvelle édition, l'une de  $5'$  de temps, dont la période est de 437 jours, mais dont il n'a réglé la quantité que par l'examen des observations ; les autres de  $9'$  & de  $5'$  de temps, toujours additives, mais purement empiriques, c'est-à-dire, dont la cause n'est point assez éclaircie, & dont la loi n'est ajustée que sur les seules observations. Il donne à ces équations des périodes d'environ  $12 \frac{1}{2}$  & 14 ans, & quoiqu'il convienne que cela paroît peu probable, il le propose en attendant que la théorie ou l'expérience nous ait éclairés là-dessus. Peut-être, dit-il, l'excentricité de ce satellite a-t-elle quelque variation à laquelle ces deux équations peuvent répondre. L'équation qui naît de l'action du 4<sup>e</sup> satellite, suivant M. de la Grange, a une période de  $49^j 14^h 12'$  environ ; il soupçonne qu'elle pourroit être la cause des inégalités considérables, & des sauts qu'on remarque d'un mois à l'autre, dans les conjonctions de ce 3<sup>e</sup> satellite (2971).

Equation du  
quatrième.

2904. On voit par les tables de Halley que dès l'année 1717, Bradley avoit trouvé par toutes les observations que l'orbite du 4<sup>e</sup> satellite étoit elliptique, & la plus grande équation de  $0^{\circ} 48'$ , ainsi que celle de Vénus (1270). Avant que ces tables eussent été rendues publiques, M. Maraldi remarquoit en 1732, que les tables de M. Cassini s'écartoient de l'observation de près de deux heures, toujours dans le même sens, quand Jupiter revenoit au même point de son orbite, & que cette erreur étoit nulle dans les moyennes distances. Sa première idée fut de diminuer les époques des conjonctions de  $0^h 55'$ , qui répondent à  $0^{\circ} 50'$  ; au moyen de ce changement les erreurs diminueoient de moitié, devenoient tantôt additives, tantôt soustractives ; elles

elles se trouvoient nulles quand Jupiter étoit dans ses apfides, & augmentoient comme l'équation de son orbite.

2905. Soit *S* le soleil (*fig.* 246), *AC* l'orbite de Jupiter, *A* son aphélie, *PBQ* l'orbite elliptique du 4<sup>e</sup> satelite, dont le grand axe est actuellement presque parallèle à celui de l'orbite de Jupiter, mais dans une situation renversée; lorsque Jupiter sera parvenu de *A* en *O*, le grand axe *PQ* prendra la situation *RV* parallèle à *PQ*; parce que le satelite & tous les points de son orbite reçoivent un mouvement de translation parallèle & égal à celui de Jupiter lui-même, & par lequel toutes les circonstances du mouvement relatif sont les mêmes, à peu près comme nous l'avons expliqué dans les art. 1075, 1095. Jupiter étant en *O* la conjonction du satelite arrivera en *F* sur la ligne des centres *SOF*, mais comme aux environs du point *R* où le satelite est le plus près de Jupiter sa vitesse est plus grande que la vitesse moyenne, il arrivera plutôt en *F* & fera éclipsé plutôt que suivant les tables, qui ne représentent à cet égard que le moyen mouvement.

2906. Dans la conjonction du 6 Avril 1708, M. Maraldi trouve pour le lieu du satelite sur son orbite  $5^{\circ} 27' 55'' 26''$ , & le 3 Mars 1753,  $3^{\circ} 15' 51' 7''$ , le mouvement vrai a donc été de  $9^{\circ} 17' 55' 41''$ , tandis que le mouvement moyen auroit été de  $9^{\circ} 19' 13' 5''$ , c'est-à-dire, de  $1^{\circ} 17' 24''$  plus grand. Entre l'observation de 1708, & celle du 4 Août 1759, il trouve le mouvement vrai plus grand de  $34' 28''$  que le mouvement moyen; la demi-somme de ces deux erreurs ou de ces deux différences, est la plus grande qu'on ait pu appercevoir, d'où il suit qu'elle donne la plus grande équation du 4<sup>e</sup> satelite (1263), qui se trouve par-là de  $0^{\circ} 55' 56''$ . Ces observations indiquent aussi que le point de la plus grande vitesse est du côté de l'aphélie de Jupiter, puisque le satelite en allant de  $5^{\circ} 28'$  à  $3^{\circ} 16'$  a un plus petit mouvement qu'en allant de  $5^{\circ} 28'$  à  $9^{\circ} 20'$  qui étoit sa longitude en 1759.

2907. Cette équation de l'orbite du 4<sup>e</sup> satelite va jusqu'à  $1^{\text{h}} 0' 30''$  en plus & en moins, suivant les nouvelles

tables de M. Wargentin, & elle fuffit pour le 4<sup>e</sup> fatellite; les attractions des trois autres n'influent pas fenfiblement fur fon mouvement, & M. Bailly n'a trouvé que deux ou trois petites inégalités qui viennent de l'attraction du foleil fur ce fatellite; mais M. Wargentin a employé dans fes tables les cinq petites inégalités de Jupiter, produites par l'attraction de Saturne, & qui font fenfibles, furtout dans les conjonctions du 4<sup>e</sup> fatellite (2912).

2908. Le lieu de l'apfide <sup>(a)</sup> du 4<sup>e</sup> fatellite, fuivant M. Bradley étoit en 1717 à  $11^{\circ} 8'$ ; mais il trouva que les observations de 1671, 1676 & 1677 exigeoient que l'on plaçât le lieu de l'apfide pour 1677 à  $10^{\circ} 14'$ , de forte qu'il lui attribua un mouvement progressif de fix degrés en dix ans, ou de  $36'$  par an; toutes les observations qu'il avoit faites, s'accordoient avec fon hypothèse.

Elémens de  
fa théorie.

2909. Cependant M. Maraldi a reconnu enfuite que le mouvement de l'apfide étoit encore plus confidérable, & qu'on repréentoit toutes les observations du 4<sup>e</sup> fatellite en fupposant la plus grande équation de fon orbite  $0^{\circ} 55' 56''$ , l'époque de fa longitude moyenne pour 1700, c'est-à-dire, le 31 Décembre 1699 à midi,  $7^{\circ} 17^{\circ} 18' 2''$ , le lieu de fon apfide, ou apojove,  $10^{\circ} 29' 22''$  pour 1700, & le mouvement annuel de cette apfide  $44' 15''$ . Sur un nombre de 152 observations que M. Maraldi a calculées avec ces élémens, il n'y en a que 30 dans lesquelles le calcul diffère de l'observation de plus de  $5' \frac{1}{2}$ , parmi lesquelles quatre observations feulemeut diffèrent de  $10'$  & trois de  $13'$ ; c'est avoir beaucoup fait que d'être parvenu à les repréfenter avec une auffi grande précision, fans avoir tenu compte des inégalités que Jupiter lui-même éprouve par l'attraction de Saturne (2912); M. Wargentin qui les a fait entrer dans fes tables doit y avoir ajouté par-là un nouveau degré de précision.

Effet de l'a-  
platiffement  
de Jupiter,

2910. Ce mouvement de l'apfide du 4<sup>e</sup> fatellite vient de l'attraction des autres fatellites, (M. Bailly, pag. 107); ainfi que le mouvement de l'apogée de la

(a) On a auffi appelé *Apoïve* Jupiter, quoique ce terme foit com-  
l'apfide fupérieure des fatellites de | pofé d'un mot Grec & d'un mot Lat.



Lune vient de l'attraction du soleil ; cependant il y a dans l'aplatissement de Jupiter une cause qui peut donner aux apfides des satellites un mouvement considérable ; on en trouve le calcul par le P. Walmesley, dans les *Transf. philos.* de 1758, art. 90. par M. Bailly, dans les *Mémoires* de 1763, & dans sa théorie, pag. 65 ; & par M. Euler, dans les *Mémoires de Berlin*, pour 1763 ; le P. Walmesley semble persuadé que l'aplatissement de Jupiter occasionne seul un mouvement de  $34'$  par année dans le 4<sup>e</sup> satellite. M. Euler en supposant que les diamètres de Jupiter soient comme 8 est à 9, trouve  $1^{\circ} 32' 40''$  par année, & pour les trois autres satellites  $288^{\circ}$ ,  $57^{\circ} 3'$ ,  $11^{\circ} 10'$  ; mais la supposition d'homogénéité, & l'erreur sur le degré d'aplatissement de Jupiter peuvent mettre dans ces calculs une incertitude considérable. Au reste, si l'orbite du premier satellite est très-peu excentrique, ce grand mouvement sera insensible dans les observations. M. Euler, le fils (*Jean Albert*), dans les *mémoires de Berlin*, pour 1765, pag. 414, examine les inégalités qui pourroient avoir lieu à raison de la figure du corps attiré, c'est-à-dire, de la figure des satellites ; mais il trouve qu'elles sont insensibles quant au mouvement progressif.

2911. On a négligé jusqu'ici dans les tables la réduction des longitudes des satellites, ou la différence entre la conjonction & le milieu de l'éclipse (1777) ; elle n'est que la moitié de celle qu'on trouveroit en calculant de la manière indiquée pour les éclipses de lune ; parce que les conjonctions se comptent sur l'orbite du satellite, & non pas sur celle de Jupiter, ce qui diminue la réduction de moitié. Cette réduction est employée dans les nouvelles tables, dont nous donnons ici l'explication ; elle va jusqu'à  $1' 29''$  de temps, pour le 3<sup>e</sup> satellite, quand son inclinaison est de  $3^{\circ} 26'$ , & à  $1' 42''$  pour le 4<sup>e</sup> ; elle est égale à la moitié du sinus versé de l'inclinaison, réduite en secondes, convertie en temps, & multipliée par le sinus du double de la distance au nœud (3639) ; elle est soustractive dans le premier &

Réduction

le 3<sup>e</sup> quart de l'argument de latitude, soit qu'on compte du nœud ascendant ou du nœud descendant. Si l'on prenoit l'inclinaison vraie, c'est-à-dire, dans l'hypothèse elliptique (2939), on trouveroit la réduction du 3<sup>e</sup> satellite plus petite d'environ 10'', mais il n'y a que celle du 4<sup>e</sup> satellite que j'ai calculée moi-même, (*Table CLIV*), où cette attention soit observée.

Inégalités  
de Jupiter.

2912. Les inégalités de Jupiter doivent entrer aussi dans les tables des éclipses des satellites; & comme Jupiter s'écarte quelquefois de 4' des meilleures tables que l'on ait, ces variations peuvent produire 28'' de temps sur le premier satellite; 57'' sur le second; 1' 44'' sur le 3<sup>e</sup>; & 4' 27'' sur le 4<sup>e</sup>; on ne sauroit donc attendre de ces tables une plus grande perfection jusqu'à ce que la théorie de Jupiter ait été perfectionnée, & qu'on ait déterminé exactement les dérangemens que Jupiter & Saturne se causent mutuellement. J'ai donné dans la connoissance des mouvemens célestes de 1763, 1764 & 1766, des tables des inégalités que Jupiter éprouve par l'action de Saturne, & de ce qui en résulte pour le 4<sup>e</sup> satellite; on trouvera toutes ces équations calculées dans les tables pour le commencement de chaque année. On pourroit aussi les calculer pour un temps quelconque par le moyen des tables de Jupiter. Ainsi pour le 3 Septembre 1763, l'on trouvera par les tables CXV & suiv. que la somme des cinq équations de Jupiter est de 9' 59''; le 2<sup>e</sup> satellite emploie 2' 22'' à les parcourir, à raison de 31 13<sup>h</sup> 18' pour 360°. Ainsi l'effet de ces perturbations sur la conjonction du 2<sup>e</sup> satellite sera de 2' 22''; c'est ainsi que je l'ai employé dans l'exemple. Il y a encore dans les conjonctions qu'on observe, quelques inégalités optiques, dont je parlerai à l'occasion des éclipses (2984), & d'autres inégalités produites par l'attraction mutuelle des satellites les uns sur les autres (2969), mais qui sont encore peu connues.

Des époques  
des conjonc-  
tions.

2913. Pour construire les tables des conjonctions des satellites, il ne suffit pas de connoître les inégalités des révolutions, il faut encore établir une époque dans laquelle

toutes les inégalités s'étant trouvées nulles, le lieu moyen & le lieu vrai des satellites aient été les mêmes, & la conjonction moyenne d'accord avec la conjonction vraie (2977); on peut même choisir l'observation quelconque d'une conjonction, la corriger par toutes les équations déjà connues, pour la réduire à une conjonction moyenne sur l'orbite du satellite, & l'on aura une époque des conjonctions, j'en donnerai l'exemple & le calcul (2977).

Pour épargner aux calculateurs l'attention d'ajouter ou de retrancher les équations suivant les cas, M. Warrentin dans ses tables a diminué par avance toutes les époques, comme M. Pound l'avoit fait dans ses tables en 1719 (*Philos. trans.*), afin de rendre toutes les équations additives, excepté la grande équation, dont les changemens successifs ne permettent pas cette facilité de calcul; par-là il arrive qu'une équation est nulle dans le cas où elle auroit été la plus grande à soustraire, & que l'équation additive est quelquefois doublée.

2914. Ainsi la table des époques des conjonctions moyennes du premier satellite (tab. CXXVI), indique le moment où arrive à chaque année la première conjonction du satellite avec le lieu moyen de Jupiter, compté sur l'orbite du satellite, mais ce temps est diminué de  $8' 7'' \frac{1}{2}$  équation de la lumière (2897).

Equations  
toujours ad-  
ditives.

Au moyen de ces  $8' 7'' \frac{1}{2}$  que l'on ôte des époques, l'équation se trouve toujours additive; elle est la somme ou la différence de  $8' 7'' \frac{1}{2}$  & de l'équation qui auroit lieu si les tables étoient construites à la manière ordinaire; par-là elle peut aller jusqu'à  $16' 15''$ , qui est le double de  $8' 7'' \frac{1}{2}$ . Il en est de même de toutes les autres équations, exceptés de celle qui dépend de l'excentricité de Jupiter; celle-ci étant variable, on n'a pu faire d'avance la soustraction d'une quantité constante (2893).

2915. Lorsqu'on découvre une nouvelle équation tantôt additive, tantôt soustractive, on retranche des époques le double de la plus grande équation, afin qu'elle soit toujours additive. On trouvera dans la table des élémens (2972), les époques des quatre satellites, c'est-

à-dire, la première conjonction moyenne de 1760, du moins telle qu'on l'emploie dans les tables. On voit, par exemple, que celle du second satellite arrivera le 1 Janvier 1760 à  $14^h 59'$  de temps moyen, mais ce temps est diminué de la somme des équations, & même encore d'un jour (2974). J'ai ajouté dans la même table les époques des longitudes moyennes pour 1700, c'est-à-dire, le point du ciel où chaque satellite paroïsoit répondre la veille du 1 Janvier 1700, à midi de temps moyen, vu du centre de Jupiter, en comptant sur l'orbite de chaque satellite, d'après les tables de M. Cassini; enfin les moyens mouvemens, soit pour 365 jours, soit pour cent années Juliennes, avec lesquels on peut construire des tables (1326), & trouver les configurations (2987).

Époques des  
argumens.

2916. A la suite des époques des conjonctions, j'ai mis les argumens des équations générales des satellites pour les mêmes époques. Le nombre *A* est l'anomalie moyenne de Jupiter, exprimée en dixièmes de degrés; il sert à trouver la grande équation, qui n'est autre chose que l'équation de l'orbite de Jupiter convertie en temps (2821); le nombre *B*, est la distance de Jupiter à la conjonction, en millièmes parties du cercle; l'équation de la lumière est proportionnelle au cosinus du nombre *B*.

### DES ECLIPSES DES SATELLITES.

De l'ombre  
de Jupiter.

2917. AVANT que de parler des éclipses des satellites, qui sont la partie essentielle de ce traité; il faut déterminer la largeur de l'ombre que les satellites traversent dans leurs éclipses. Cette ombre que Jupiter répand derrière son disque, n'est pas un cylindre parfait; parce que le soleil qui est le corps lumineux est plus grand que Jupiter; les rayons qui partent des deux bords du soleil & qui touchent les bords de Jupiter, sont donc des rayons convergens, & puisqu'on fait le rapport des diamètres de Jupiter & du soleil, on trouveroit aisément le point où les deux rayons vont concourir pour former la pointe du cône

d'ombre, d'où l'on déduiroit le diamètre de la section, dans la région de chaque satellite.

Mais cette méthode ne pourroit pas s'appliquer immédiatement aux éclipses que nous observons, 1<sup>o</sup>, parce que la pénombre qui est plus ou moins grande, suivant qu'on approche des bords du cône d'ombre (1788), fait que l'obscurité ne commence pas exactement au point que donneroit ce calcul; 2<sup>o</sup>, parce que les satellites ont un diamètre sensible & n'entrent dans l'ombre que peu-à-peu; d'où il suit que quand nous perdons le satellite de vue avec une lunette de 15 pieds, nous ne savons pas si son centre est exactement sur le bord du cône d'ombre; & le calcul de la véritable largeur de l'ombre ne nous indiqueroit point le moment de l'immersion.

2918. C'est donc par expérience qu'il faut déterminer le diamètre de l'ombre, c'est-à-dire, par la durée des éclipses observées lorsqu'elles arrivent près des nœuds, & que les satellites traversent l'ombre par le centre (2922).

Pour le premier & le second satellite, on ne voit jamais l'immersion & l'émergence aux environs des nœuds; on voit seulement celles du 3<sup>e</sup> & du 4<sup>e</sup> satellite, aussi-tôt que la parallaxe annuelle de Jupiter est d'environ 8<sup>o</sup>, ce qui arrive pendant une partie de l'année; ainsi pour les deux premiers satellites, l'on est obligé de comparer les immersions qui arrivent quelques jours avant l'opposition, avec les émergences qui arrivent quelques jours après; en déduisant le nombre des révolutions entières qu'il a dû y avoir entre l'immersion & l'émergence; c'est ainsi qu'on a déterminé les demi-diamètres de l'ombre en temps pour chaque satellite, tels qu'ils sont dans la table des éléments (2972); par exemple, celui du premier satellite est de 1<sup>h</sup> 7' 55", c'est-à-dire, qu'il est 2<sup>h</sup> 15' 50" dans l'ombre lorsqu'il la traverse par le centre, & qu'il y demeure le plus long-temps.

Demi-diamètre de l'ombre en temps.

On est obligé de chercher aussi les demi-durées du second satellite, par les immersions arrivées avant l'opposition, & les émergences qu'on observe après l'opposition, quoique distantes d'un ou deux mois entre elles. Dans ces

cas-là, il faut avoir soin de choisir, autant qu'il est possible, des observations faites avec les mêmes lunettes, les mêmes yeux, à pareilles distances de l'opposition, & telles que la bonté de chacune soit constatée par des observations précédentes ou suivantes, & dont la distance à l'opposition soit à peu-près entre 10 & 30 jours.

2919. La révolution synodique est à  $360^\circ$ , comme le demi-diamètre de l'ombre en temps, est au demi-diamètre en degrés; on en trouvera aussi la valeur dans la table (2972); ainsi la plus grande demi-durée des éclipses du 2<sup>e</sup> satellite étant  $1^h 25' 40''$ , on a  $6^\circ 1' 33''$  pour le demi-diamètre de l'ombre en degrés de son orbite. On peut l'exprimer aussi en demi-diamètres de Jupiter, en disant,  $1 : 9,494 :: \sin. 6^\circ 1' 33'' : 0,9967$ , c'est à-dire, que le rayon de Jupiter est à celui de la section de l'ombre, à la distance du second satellite, comme 1000 est à 9967. Ainsi le demi-diamètre de l'ombre est plus petit de  $\frac{1}{303}$  que celui de Jupiter. Si l'on employoit la distance 9,00 avec M. Cassini, l'on trouveroit 0,9466 plus petit de  $\frac{1}{17}$ , mais je me suis servi des distances de Newton, en calculant le demi-diamètre de l'ombre pour chaque satellite dans la table des élémens (2972).

Effet de  
l'excentricité.

2920. Le diamètre de l'ombre en temps ou la durée des éclipses centrales qu'on suppose toujours la même, doit varier si les orbites des satellites sont excentriques. Par exemple, pour le 2<sup>e</sup>, on trouve le demi-diamètre de l'ombre quelquefois  $1^h 25'$ , quelquefois  $1^h 27'$ ; cela indique une excentricité. Dans le 4<sup>e</sup> satellite dont l'orbite est certainement elliptique (2904) la différence devroit être sensible dans certains cas; mais d'un autre côté le satellite est plus éloigné de Jupiter dans son apside supérieure, & traverse une section de l'ombre moindre que dans l'apside inférieure. (*Mém.* 1762, pag. 75), & la différence est quelquefois considérable; ainsi l'on ne fait point usage de ces considérations dans nos tables.

Inclinaison  
des orbites.

2921. Aussi-tôt qu'on eut observé plusieurs fois de suite les éclipses des satellites de Jupiter on s'aperçut bientôt que les durées de leurs éclipses n'étoient pas tous  
jours

jours égales ; quelquefois le 3<sup>e</sup> satellite n'est éclipsé que pendant 40', quelquefois 3<sup>h</sup> 34'. On vit même que le 4<sup>e</sup> satellite dans certains temps s'éclipsait à chaque révolution , & qu'après quelques années il passait au-dessus de Jupiter sans être éclipsé. Cela fit juger que les orbites des satellites n'étoient pas couchées dans le même plan que l'orbite de Jupiter ; car si cela eût été , tous les satellites auroient été éclipsés à chaque révolution , & toujours pendant le même temps ; ces différences dans la durée des éclipses sont la seule méthode qu'on emploie pour connoître les inclinaisons des orbites.

2922. Il est nécessaire d'expliquer ici la manière dont l'inclinaison des orbites produit l'inégalité dans les durées des éclipses , & suivant quelle loi varie cette durée ; car je ne connois aucun livre où l'on soit entré dans le détail qu'exige cette matière. Lorsqu'un satellite traverse le cône d'ombre par son centre , il est exactement dans la ligne droite qui joint les centres de Jupiter & du soleil ; ainsi il est dans la commune section de son orbite avec celle de Jupiter , car il est à la fois & dans le plan de son orbite ( puisqu'il ne la quitte jamais ) , & dans celui de l'orbite de Jupiter , puisque la ligne menée du soleil à Jupiter est toujours dans le plan de cette orbite. Le satellite étant alors dans la commune section de son orbite & de celle de Jupiter , il est évident que Jupiter y est aussi ; l'on peut donc alors dire que Jupiter est dans le nœud de son satellite ; ainsi quand Jupiter est au degré de longitude , où répond un des nœuds de l'orbite d'un satellite ( vu du centre de Jupiter ) , le satellite traverse l'ombre par le centre & la durée de son éclipse est la plus longue.

Eclipses centrales des satellites.

Soit *SO* (*fig.* 249) la ligne des nœuds , ou la ligne sur laquelle étoit Jupiter , quand le plan de l'orbite du satellite étoit dirigé vers le soleil , & que les satellites traversoient l'ombre par le centre ; supposons que Jupiter ait avancé de *O* en *I* avec l'orbite du satellite autour de lui , cette orbite restera toujours parallèle à elle-même ( 2905 ) , & la ligne des nœuds sera sur une direction

*Fig.* 249.

## 250 ASTRONOMIE, LIV. XVIII.

*AC* parallèle à *SO*. Ainsi quand Jupiter s'éloigne du nœud, la ligne de l'ombre n'est plus dans la commune section des orbes de Jupiter & du satellite; donc le satellite venant à se trouver en opposition au point *M* ne fera pas dans le plan de l'orbite de Jupiter, & ne fera pas sur la ligne des centres, mais au-dessus ou au-dessous.

La ligne  
des nœuds  
est fixe,

2923. Quand Jupiter est dans le nœud d'un de ses satellites, un observateur supposé dans le soleil se trouve dans le plan de l'orbite du satellite, & il la voit en forme de ligne droite; pour qu'il la vît toujours droite il faudroit qu'elle passât toujours par son œil, que la commune section ou la ligne des nœuds passât toujours par le soleil; pour cela il faudroit qu'elle fît le tour du ciel aussi bien que Jupiter en douze ans, ce qui n'arrive point; la ligne des nœuds est à peu-près fixe dans le ciel; c'est-à-dire, parallèle à elle-même, & dirigée sensiblement vers le même point du ciel; quand Jupiter y a passé une fois il s'écoule six années avant qu'il y revienne.

2924. Soient donc *NCIA* la ligne des nœuds, *ABCD* l'orbite du satellite qui traverse en *A* & en *C* le plan de l'orbite de Jupiter; il faut concevoir que l'orbite du satellite, est relevée en *B* au-dessus du plan de la figure, & se trouve un peu vers le nord; au contraire en *D* elle est un peu vers le midi, ou au-dessous du plan de la figure; depuis *A* jusqu'en *B*, le satellite va toujours en s'élevant au-dessus du plan de l'orbite de Jupiter; depuis *B* jusqu'en *C*, il revient vers ce plan, & depuis *C* jusqu'en *D*, il descend au-dessous du plan, & il y revient depuis *D* jusqu'en *A*. Puisque *B* est la limite, le point de la plus grande latitude, ou de la plus grande élévation du satellite au-dessus du plan de l'orbite de Jupiter, ce satellite arrivé en *M* dans sa conjonction supérieure où il est éclipsé, ne sera pas encore à sa plus grande latitude, & il sera d'autant moins éloigné du plan de la figure ou de l'orbite de Jupiter, que l'angle *AIM* fera moindre, ou son égal *SIN*. Or l'angle *SIN*, qui est la distance du satellite à son nœud, est égal à l'angle



*ISO*, ou à la distance qu'il y a entre le lieu *I* de Jupiter, & la ligne *SO* supposée fixe, à laquelle la ligne des nœuds *IN* reste toujours parallèle, quel que soit le lieu de Jupiter; ainsi la latitude du satellite en *M* dépendra de l'arc *AM*, ou de l'angle *IOS*, distance de Jupiter à la ligne des nœuds *SO*, qui répond toujours vers le milieu de l'onzième signe de longitude.

2925. La quantité dont le point *M* s'élève au-dessus du plan de l'orbite de Jupiter, est à la quantité dont la limite *B* s'en éloigne, comme le sinus de *AM* est au sinus de l'arc *AB*, c'est-à-dire, au rayon; car si deux cercles se coupent en *A* & en *C*; leur distance en différens points, tels que *M*, perpendiculairement au cercle incliné, ou à l'orbite du satellite, est comme le sinus de la distance au point *A* (3666), c'est-à-dire, à l'intersection, cette distance étant mesurée sur l'autre cercle, qui est l'orbite de Jupiter; ainsi la latitude du satellite en *M*, est comme le sinus de la distance de Jupiter au nœud du satellite, mesurée sur l'orbite de Jupiter.

2926. Lorsque par le mouvement de Jupiter dans son orbite le rayon *SI* est devenu perpendiculaire à la ligne des nœuds *SO* ou *IN*; le point *M* de la conjonction supérieure concourt avec le point *B*, qui est la limite de la plus grande latitude; alors l'angle de l'orbite avec le rayon visuel *SIM*, est égal à l'inclinaison du satellite, par exemple,  $3^{\circ}$ ; & l'orbite vue du soleil paroît sous la forme d'une ellipse, dans laquelle le grand axe est au petit comme le rayon est au sinus de  $3^{\circ}$  (1828) en ne considérant pas le mouvement de Jupiter pendant la durée de la révolution du satellite, ou bien en considérant le satellite seulement par rapport à Jupiter. Soit *S* le soleil (fig. 250), *I* le centre de Jupiter, *IH* le rayon de l'orbite d'un satellite qui est dans un plan perpendiculaire à l'orbite de Jupiter, & qui est incliné sur le rayon solaire de la quantité de l'angle *SIH*; on aura *IH* : *KH* :: *R* : sin. *KIH*, donc *KH* = *IH* sin. *KIH*, c'est la quantité dont le satellite paroît s'élever au-dessus du plan de l'œil, dans le temps où l'ellipse fera la plus

Valeur du  
petit axe.

Pl. XXXIII,  
Fig. 250.

ouverte. Dans les autres positions de Jupiter par rapport au nœud, cette quantité diminuera comme le sinus de la distance de Jupiter au nœud (2925); ainsi appellant  $I$  la plus grande latitude, ou l'inclinaison du satellite,  $D$  la distance de Jupiter au nœud du satellite, comptée sur l'orbite de Jupiter, &  $R$  la distance du satellite à sa planète, ou le rayon de son orbite, on aura  $R. \sin. I. \sin. D$  pour la quantité dont le satellite paroîtra élevé au-dessus du plan de l'orbite de Jupiter, perpendiculairement à l'orbite du satellite, dans le moment de sa conjonction supérieure; il n'en faut pas davantage pour calculer les durées des éclipses.

Les orbites  
apparentes  
sont des el-  
lipfes.

Fig. 247 &  
248.

2927. Cette élévation du satellite au-dessus de Jupiter est égale à son abaiffement dans le point opposé; l'ellipse qu'il paroît décrire est donc plus ou moins ouverte, suivant que Jupiter s'éloigne de la ligne des nœuds; quand le petit axe de cette ellipse devient plus large que le cône d'ombre, le satellite passe au-dessus de l'ombre, comme on le voit dans la fig. 247; c'est ce qui arrive toujours au 4<sup>e</sup> satellite de Jupiter environ deux ans après le passage de Jupiter dans les nœuds des satellites. Quand Jupiter est à 30 degrés de la ligne des nœuds, l'ellipse (fig. 248) a la moitié de l'ouverture qu'elle avoit dans le cas précédent, parce que le sinus de 30° est la moitié du sinus total; alors le satellite traverse l'ombre malgré l'obliquité de son orbite.

Fig. 251.

2928. La section de l'ombre de Jupiter dans la région du satellite est représentée par le cercle  $EDBF$  (fig. 251) que je suppose perpendiculaire à la ligne des centres du soleil & de Jupiter; il est traversé par un diamètre  $QB$ , qui est une portion de l'orbite de Jupiter;  $ED$  est une portion de l'orbite du satellite,  $CA$  est la perpendiculaire sur cette orbite; c'est un arc qui vu du centre de Jupiter n'est autre chose que la latitude du satellite; son sinus seroit égal à  $\sin. I. \sin. D$  (3665); mais l'arc  $CA$  vu de Jupiter est sensiblement  $= R. \sin. I. \sin. D.$  (2926). Comme il est plus commode pour le calcul des éclipses de rapporter toutes les parties de cette figure au demi-diamètre de

l'ombre (2918); c'est-à-dire, à la demi-durée des éclipses, qui est la plus grande de toutes, & qui est exprimée par  $CB$ , nous réduirons  $CB$ ,  $CA$  &  $AD$  en secondes de temps; nous exprimerons même la distance du satellite à Jupiter, ou le rayon de son orbite, en parties semblables, ou en secondes de temps, en mettant au lieu de  $R$  le temps que le satellite emploie à parcourir un arc de même longueur que le rayon de son orbite, c'est-à-dire, un arc de  $57$  degrés; car il n'importe pas que cette distance qu'on prend pour unité, soit en temps, en degrés, ou en demi-diamètres de Jupiter, ni même que le mouvement de Jupiter rende plus long le temps des  $57^\circ$ , parce que nous ne cherchons ici que le rapport entre la distance & l'arc parcouru pendant l'éclipse. Pour connoître le temps qui répond à un arc d'environ  $57^\circ$ , il suffit de faire cette proportion  $360^\circ$  sont à la révolution synodique, comme  $57^\circ$  ou  $206265''$  sont au temps cherché que j'appelle  $t$ ; on le trouvera pour chaque satellite dans la table des élémens (2972). Ayant multiplié  $\sin. I \sin. D$  par ce nombre de secondes de temps, on aura  $CA$  en secondes de temps  $= t \sin. I \sin. D$ ; on a aussi le rayon  $CD$  ou  $CB$  en secondes de temps, c'est la demi-durée de la plus grande éclipse, celle qui a lieu quand Jupiter est dans le nœud du satellite; enfin, c'est le demi-diamètre de l'ombre en temps (2918) que nous appellerons  $r$ .

Fig. 251.

Temps pour  
 $57^\circ$ .

Dans le triangle  $CAD$  rectangle en  $A$ , l'on a  $CA = \sqrt{CD^2 - AD^2}$ , & nommant  $d$  la demi-durée qui répond à  $AD$ ,  $CA = \sqrt{rr - dd} = R. \sin. I. \sin. D$  (2928); donc prenant le temps qui répond à  $57^\circ$ , c'est-à-dire,  $t$  pour rayon, afin que tout soit exprimé en temps, l'on aura  $\sin. I = \frac{\sqrt{rr - dd}}{t \sin. D}$ . On peut trouver l'inclinaison par cette formule, quand on connoît le demi-diamètre de l'ombre, & une demi-durée observée; mais la difficulté d'évaluer ces carrés avec précision, nous oblige à employer des sinus (2930); on peut aussi mettre

Fig. 251.

$\sqrt{(r+d)(r-d)}$ , dont on a la valeur en prenant la demi-somme des logarithmes de  $r+d$  & de  $r-d$ .

2929. Pour avoir l'expression de la demi-durée & de l'inclinaison, on considère le triangle  $CAD$ , dans lequel  $CD : CA :: R : \sin. ADC$ , dont le complément est  $ACD$ , donc  $\cosin. ACD = CA$ ; or  $CA = t \sin. I. \sin. D$ . Ainsi quand on aura l'inclinaison d'une orbite & la distance de Jupiter au nœud du satellite on connoîtra  $CA$  & l'angle  $ACD$ , dont le sinus  $AD$  mesure la demi-durée de l'éclipse. Pour avoir cette demi-durée en temps on fera cette proportion, le rayon  $CB$  est à la plus grande demi-durée en temps, ou au demi-diamètre de l'ombre, comme le sinus  $AD$ , est à la demi-durée que l'on cherche, c'est-à-dire, qu'on multipliera le temps de la plus grande demi-durée par le sinus de l'angle  $ACD$ , & l'on aura la demi-durée actuelle.

EXEMPLE. On demande la demi-durée d'une éclipse du 4<sup>e</sup> satellite pour le 19 Novembre 1761, à 6 heures, en supposant l'inclinaison de  $2^{\circ} 36'$ , le lieu du nœud  $10^{\circ} 17' 40''$ , & la plus grande demi-durée  $2^{\text{h}} 23'$ . Le lieu de Jupiter sur son orbite pour ce jour-là étoit  $0^{\circ} 4' 23''$ , ainsi sa distance au nœud est  $1^{\circ} 16' 43''$ , ou  $46^{\circ} 43'$ . Donc  
 Log. sin.  $D$ . . . . . 986212  
 Log. sin. inclin.  $2^{\circ} 36'$ . . . . . 865670  
 Log. sin.  $I. \sin. D$ . . . . . 851882

Il faut y ajouter le logarithme du temps pour  $57^{\circ}$  (2928) afin d'avoir le log. de  $AC$  en sec. de temps, & en ôter le log. du rayon  $CD$  en secondes, ou de  $2^{\text{h}} 23' 0''$  pour avoir celui de  $\frac{AC}{CD} = \cosin. ACD$ ; ainsi le log. constant 1,42895 qui est le log. de  $t$ , ou du temps pour  $57^{\circ}$ , moins celui du demi-diamètre de l'ombre, étant ajouté avec celui de sin.  $I. \sin. D$ , donne celui du cosinus de l'angle  $ACD$ .

Log. sin.  $I. \sin. D$ . . . . . 8,51882  
 Logarithme de  $u$  . . . . . 1,42895  
 Log. cosin. de l'angle  $ACD$   $27^{\circ} 32'$ . . . . . 9,94777  
 Log. du sinus de ce même arc. . . . . 9,66489  
 Ajoutez le log. de  $r$  ou  $2^{\text{h}} 23'$ . . . . . 3,93349

Log. de la demi-durée  $1^h 6' 6''$ . . . . . 3,59838  
 On trouveroit  $1^h 6' 8''$  en employant les secondes de  
 l'angle  $ACD$ .

Fig. 251.

2930. On a donc cette formule  $\frac{\sin. I. \sin. D.}{r} = \cos.$  Règle pour  
 $ACD$ ; & le sin. de  $ACD$  multiplié par le demi-diamètre trouver la demi-  
 de l'ombre en temps ( que j'appelle  $r$  ) donne la demi-durée.  
 rée cherchée. Le tems par  $57^\circ$  se trouvera pour chaque  
 fatellite dans la table des élémens, aussi-bien que la valeur  
 $\frac{r}{r}$  du temps par  $57^\circ$  divisé par le demi-diamètre de l'om-  
 bre , égale à la cotangente de l'arc décrit par le fatellite,  
 quand il traverse l'ombre par le centre; j'appelle cette  
 valeur  $u$ , & j'appelle  $d$  la demi-durée que l'on cherche,  
 afin qu'on ait  $u. \sin. I. \sin. D = \cos. ACD$ , &  $r. \sin. ACD$   
 $= d$ , c'est la demi-durée de l'éclipse, en supposant l'om-  
 bre circulaire. ( Voy. l'art. 2934 ).

2931. Cette même formule servira pour trouver l'in- Trouver  
 clinaison, ou pour trouver la distance au nœud, par le l'inclinaison  
 moyen de la demi-durée observée; car cette demi-durée ou le nœud.  
 étant divisée par  $r$  donne le sinus de l'angle  $ACD$ , & le  
 cosinus de cet angle divisé par  $u$  donne la valeur de  $\sin.$   
 $I. \sin. D$ ; si donc on divise cette dernière quantité par  
 $\sin. I$ , l'inclinaison étant supposée connue, l'on aura  $\sin.$   
 $D$ ; mais si l'on divise par  $\sin. D$ , le lieu du nœud étant  
 donné, l'on trouvera  $\sin. I$ . ( Voyez aussi 3937 ).

2932. Dans les règles précédentes j'ai supposé que Exception  
 l'orbite  $AD$  étoit une ligne droite au lieu d'être un arc pour le pre-  
 de cercle, cette supposition ne peut produire aucune mi-  
 différence sensible, si ce n'est peut-être dans le premier fatellite.  
 Pour connoître à quoi elle peut aller, soit  $N$  le  
 nœud du premier fatellite,  $CB = CD = 9^\circ 35' 37''$ , c'est  
 le demi-diamètre de l'ombre;  $AD$  l'arc décrit dans l'om-  
 bre lorsque  $AD$  est parallèle à  $CB$ , le fatellite étant à  $90^\circ$   
 des nœuds, cet arc est de  $9^\circ 0' 18''$ ; dans le triangle rec-  
 tiligne formé par les sinus des arcs  $AC$  &  $CD$ , on a  $\frac{AD}{CD} =$   
 $\sin. ACD$ , donc le sinus de l'arc  $AD$  divisé par le sinus  
 de  $BC$  ou  $CD$  donnera le cosinus de l'arc  $BD$ ;

## 256 ASTRONOMIE, LIV. XVIII.

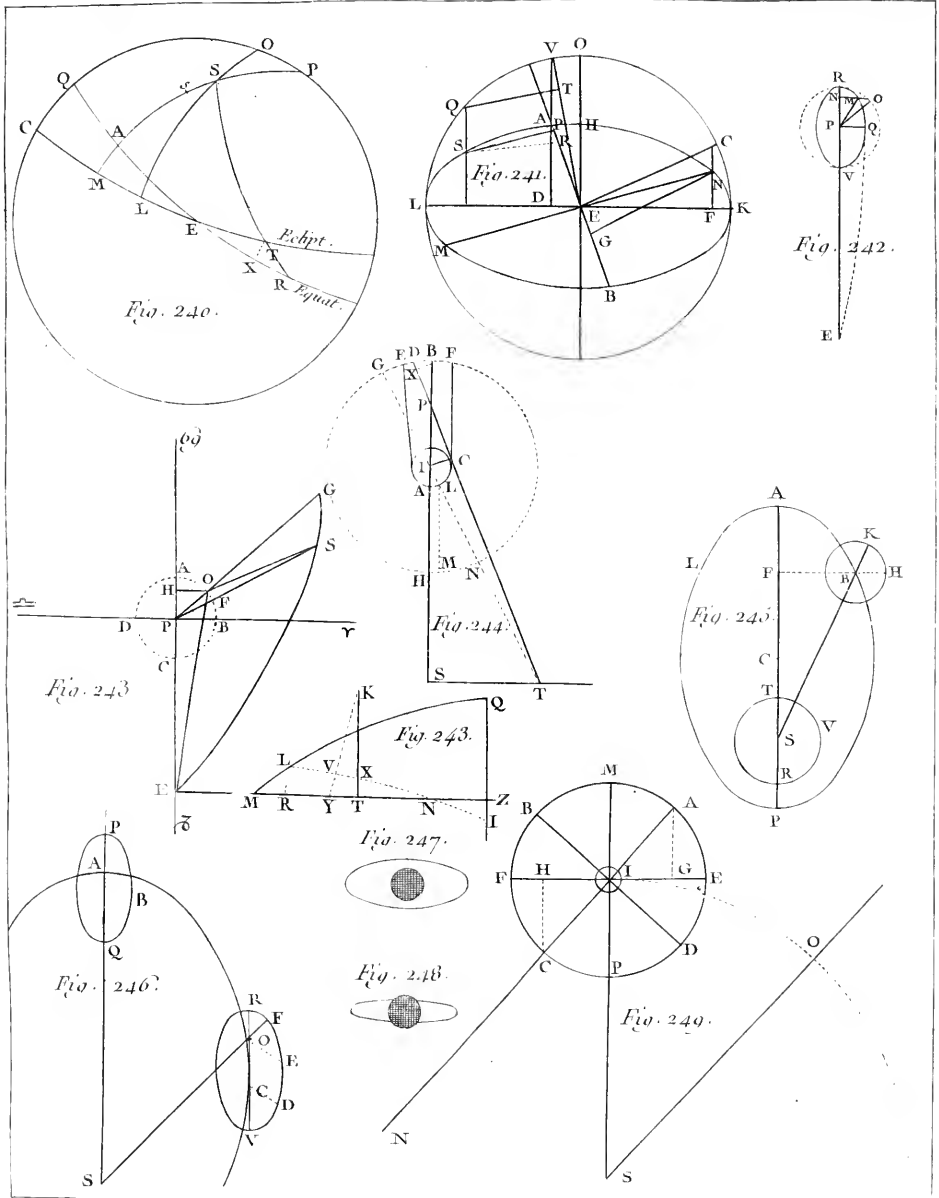
Fig. 251.

le sinus  $DG$  de cet arc doit être réduit en parties de la distance du fatellite, par cette proportion  $R : \sin. BD :: \sin. 9^\circ 35' 37'' : DG$ , & cette valeur de  $DG$  divisée par le cosinus de  $AD$  ou le sinus de  $DN$  donnera le sinus  $AC$  de l'inclinaison  $N$ , qui se trouve par-là de  $3^\circ 18' 40''$ , au lieu de  $3^\circ 18' 37''$  qu'on trouve en supposant l'arc  $DA$  rectiligne ; cette différence est assez petite pour pouvoir être négligée.

2933. Au moyen de la formule (2930) on peut trouver le temps où les éclipses du 4<sup>e</sup> fatellite doivent finir, c'est-à-dire, la distance où il faut que Jupiter soit par rapport au nœud du fatellite pour que la latitude soit égale au demi-diamètre de l'ombre ; il faut faire  $AC = CH$  ou  $CB$  ; car alors l'orbite  $AD$  passant au sommet  $H$  de la section de l'ombre, le fatellite n'y entrera point & ne fera point éclipsé ; on aura donc  $u \cdot \sin. I \cdot \sin. D = 1$ , ou  $\sin. D = \frac{1}{u \sin. I}$  ; les observations ont fait connoître que  $D$  est à peu-près  $55^\circ 11'$ . De même pour trouver l'inclinaison, si la quantité  $D$  est donnée par observation, l'on aura  $\sin. I = \frac{1}{u \sin. D}$  (Voy. l'art. 2938).

2934. La demi-durée d'une éclipse calculée par les règles précédentes est une demi-durée moyenne, qui varie, sur-tout pour le second fatellite, par l'attraction du premier. Si l'on appelle  $e$  la longitude du premier fatellite moins celle du second, il faut multiplier la demi-durée moyenne par l'unité plus  $\frac{1}{100}$  du cosinus de l'angle  $e$ , pour avoir la demi-durée vraie, suivant les calculs de M. Bailly (*Mém.* 1766, pag. 361) ; la différence peut aller à  $51''$  ; mais la fraction  $\frac{1}{100}$  dépend d'une hypothèse sur les masses, qui sont encore peu connues (2931) ; ainsi l'auteur ne propose cette équation aux astronomes, que pour être mieux constatée. M. Bailly a aussi donné dans ses tables une équation des demi-durées du 4<sup>e</sup> fatellite qui va jusqu'à  $1'44''$ , & que je n'ai point employée par la même raison.

*Effet*







Effet de l'aplatissement de Jupiter sur les Éclipses.

2935. LE disque de Jupiter n'est pas exactement rond ; l'axe de sa rotation est au diamètre de son équateur comme 13 est à 14 (3221) ; ainsi tous les calculs que l'on a faits jusqu'ici de la durée des éclipses, en supposant circulaire la section de l'ombre, exigent une correction à raison de l'aplatissement de Jupiter, du moins quand on veut en déduire la véritable inclinaison de l'orbite ; j'ai fait voir qu'il étoit utile d'introduire cette considération dans les calculs, (*Mém. acad.* 1763, pag. 413).

Soit  $FL$  (fig. 252) le diamètre de l'ombre d'occident en orient, tel que l'observation le donne (2918),  $FMLK$  la section circulaire de l'ombre, que nous avons considérée jusqu'ici ;  $FDLE$  une ellipse dont le petit axe  $ED$  soit  $\frac{13}{14}$  du grand axe ; c'est la figure que doit avoir la section de l'ombre de Jupiter, parce que le cône d'ombre étant coupé fort près de Jupiter, sa section ne diffère pas sensiblement de celle de Jupiter, cette figure ne varie point, parce que l'équateur de Jupiter diffère à peine du plan de son orbite (3222).

Figure de la  
section de  
l'ombre.  
Fig. 252.

2936. La ligne  $ABG$  parallèle à  $CF$ , est supposée la trace d'un satellite dans l'ombre, lorsqu'il est dans ses limites, & que les durées des éclipses sont les moindres ; l'ordonnée  $AB$  déterminée par la demi-durée de l'éclipse, est donnée par observation. Quand on suppose l'ombre circulaire, on emploie une ligne  $HI$  parallèle & égale à  $AB$ ,  $CH = \sqrt{rr - dd}$  (2928) ; mais  $AC : CH :: CD : CM$  (3256) :: 13 : 14, donc  $AC = \frac{13}{14} \sqrt{rr - dd}$ . Dans le temps où la demi-durée  $AB$  est la plus grande de toutes, on a  $CA = r \sin. I$ . quelle que soit la figure de l'ombre, & dans les autres cas, on a  $AC = r \sin. D \sin. I$  (2928), l'angle  $I$  étant la véritable inclinaison ; donc  $\sin. I = \frac{\frac{13}{14} \sqrt{rr - dd}}{r \sin. D}$ . L'on trouve donc l'inclinaison plus petite en employant la section elliptique ; on la trouvoit trop grande

# 258 ASTRONOMIE, Liv. XVIII.

Fig. 252.

(2928), quand on supposoit l'ombre circulaire; les sinus de ces deux inclinaisons trouvées dans les deux hypothèses sont entre eux comme 13 est à 14.

2937. Ainsi quand on a observé une demi-durée qui est assez éloignée du nœud, on peut trouver l'inclinaison de l'orbite, en supposant le lieu du nœud connu; car ayant par observation la valeur de  $AC = \frac{1}{14} \sqrt{rr-dd}$  ou  $\frac{1}{14} r \sqrt{1 - \frac{dd}{rr}}$ , on la divisera par  $u \sin. D$ , si l'on veut avoir  $\sin. I$ , ou par  $u \sin. I$ , si l'on veut avoir  $\sin. D$  (2931).

EXEMPLE. La demi-durée du 3<sup>e</sup> satellite ayant été observée de 42', à 90° du nœud, on demande l'inclinaison qui en résulte dans l'ellipse.

Logarithme de la demi-durée 42' 0'' =  $d$  3,401401

Log. du demi-diam. de l'ombre, 1<sup>h</sup> 47' 0'' =  $r$  3,807535

Différence, qu'il faut doubler 2,593866

Logarithme de  $\frac{d^2}{r^2} = 0,15407$  9,187732

Donc  $1 - \frac{d^2}{r^2} = 0,84593$ , log. 9,927334

La moitié de ce logar. fera celui de  $\sqrt{1 - \frac{d^2}{r^2}}$  9,963667

Ajoutant celui de  $\frac{1}{14}$  9,967815

On aura le logarithme de  $AC$  ou  $\frac{1}{14} \sqrt{1 - \frac{d^2}{r^2}}$  9,931482

Otez le logarithme de  $u$  ou  $\frac{1}{r}$  (2930) 1,186099

Il reste celui de  $\sin. I \sin. D$ . 8,745383

Il auroit fallu en ôter aussi le sinus de  $D$ , mais dans ce cas il est égal à zéro, puisque  $D = 90^\circ$ , la demi-durée de 42' étant supposée la plus petite de toutes; ainsi ayant cherché ce logarithme parmi ceux des sinus, on aura 3° 11' 22'' pour l'inclinaison, dans ce cas-là, en employant la section elliptique. Si de ce même logarithme l'on ôtoit le log. sinus de l'inclinaison supposée connue, l'on trouveroit le log. sinus de  $D$  ou de la distance de Jupiter au nœud;

## Effet de l'aplatissement de Jupiter, &c. 259

& connoissant d'ailleurs le lieu de Jupiter, il seroit aisé d'en conclure le lieu du nœud.

2938. Pour avoir l'inclinaison du 4<sup>e</sup> satellite, supposons avec M. Wargentin, que ses éclipses finissent quand Jupiter est à  $55^{\circ} 11' 10''$  des nœuds, comme on le trouve en supposant l'inclinaison dans le cercle de  $2^{\circ} 36'$ , il faudra que  $CA$  ou  $t$ . sin.  $I$ . sin.  $D$  soit égal à  $CD = \frac{1}{14}$ ; or ajoutant le logarithme de  $t$ , c'est-à-dire, 1, 428954 avec celui du sinus de  $55^{\circ} 11' 10'' = D$ , & les retranchant de celui de  $\frac{1}{14}$ , on a sin.  $I$ , ou le sinus de  $2^{\circ} 24' 51''$ , c'est l'inclinaison véritable de cette orbite, au lieu de  $2^{\circ} 36'$  que l'on auroit trouvé dans l'hypothèse circulaire (2933) (Voyez aussi 2957).

Inclinaison  
du quatrième  
satellite.

2939. Au reste les inclinaisons déduites de ces deux hypothèses sont à très-peu près dans le rapport de 13 à 14; ainsi il est aisé de conclure l'une de l'autre; on verra dans la table des élémens (2972), que la différence va à  $16' 18''$  pour le second satellite, & cela est important dans les calculs de la réduction, ou du mouvement des nœuds; il n'en résulte pas de différence dans la table des demi-durées des éclipses, comme l'observe M. Bailly (p. 71); c'est pourquoi j'ai conservé dans les tables les inclinaisons que M. Wargentin ou M. Maraldi ont calculées dans le cercle, cependant le calcul n'est pas sensiblement plus long en employant l'hypothèse exacte de l'ellipse, de la manière suivante.

Différence  
des deux hy-  
pothèses.

2940. Lorsque l'inclinaison est donnée aussi bien que la distance au nœud, on peut trouver aisément la demi-durée d'une éclipse, puisque par la propriété de l'ellipse, (3254)  $CD$  est à  $CF$ , ou 13 est à 14, comme  $\sqrt{AD \cdot AE}$  est à la demi-durée  $AB$ ; on cherche d'abord  $AC$  qui est égal au temps par  $57^{\circ}$  multiplié par sin.  $I$ . sin.  $D$  (2929) quelle hypothèse que l'on prenne; on connoît aussi  $CD$  qui est égal à  $\frac{1}{14} r$ , on en prend la somme & la différence, & l'on a  $AD$  &  $AE$  en temps; la moitié de la somme des logarithmes de  $AD$  &  $AE$ , en y ajoutant le logarithme de  $\frac{1}{14}$  qui est 0,032185, donne la demi-durée  $AB$

Calcul de la  
demi-durée.

# 260 ASTRONOMIE, LIV. XVIII.

dans la section elliptique. Car puisque  $\sin. I = \frac{\frac{1}{13} \sqrt{r r - d d}}{t \sin. D}$

$$(2936) \text{ on a } d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{13} t \sin. D \sin. I\right)^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{1}{13} C A\right)^2} \\ = \frac{1}{13} \sqrt{\left(\frac{1}{13} r - A C\right) \left(\frac{1}{13} r + A C\right)}.$$

EXEMPLE. Soit l'inclinaison du  $3^e = 3^{\circ} 11' 22''$  calculée dans l'ellipse (2937), la distance au nœud  $90^{\circ}$ , le demi-petit axe  $CD = 5961''$  de temps  $= \frac{1}{14} r$ .

Log. du temps pour $57^{\circ}$ .	4,993634
Log. $\sin. I$ dans l'ellipse.	8,745383
Log. $\sin. \text{dif. au nœud.}$	0,000000
Log. $AC$ 5483.	3,739017

$CD \dots 5961,4$

$AC \dots 5483,0$

Somme	11444,4	logarit.	4058593
Différence	478,4		2679791
Somme des logarithmes.			6738384
Moitié.			3369192
Logar. de $\frac{1}{13}$ .			0032185
Demi - durée $42' 0''$ .			3401377

Cette demi-durée dans l'ellipse est en effet celle qui nous a fait trouver ci-dessus l'inclinaison de  $3^{\circ} 11' 22''$ .

## *Des inclinaisons observées dans les quatre Satellites.*

2941. EN observant ainsi les durées des éclipses, on a déterminé les inclinaisons des quatre satellites de Jupiter. M. Cassini en 1693, estimoit qu'elles étoient toutes de  $2^{\circ} 55'$ , mais après un plus grand nombre d'observations, on y a trouvé des différences sensibles. L'inclinaison du premier satellite est suivant les nouvelles tables de  $3^{\circ} 18' 38''$  calculée dans le cercle (2928), on la suppose constante parce que ses variations sont peu considérables.

Le second satellite a un changement d'inclinaison dont la période est de 30 ans, mais qu'on a eu beaucoup de

Changemens  
d'inclinaison.

peine à démêler ; les demi-durées de ses éclipses observées dans les limites, varient depuis  $1^h 7'$  jusqu'à  $1^h 16'$  environ , comme le remarqua M. Maraldi , (*Mém. acad.* 1729).

2942. M. Maraldi dans un mémoire intéressant , lu en 1768 , a déterminé le demi-diamètre de l'ombre où la plus grande demi-durée des éclipses du second satellite de  $1^h 25' 45''$  par les observations des années 1688, 1689, 1707, 1712, 1718, 1724, 1730, 1736, 1742, 1748, 1754, 1760 & 1766. Il a trouvé la plus petite inclinaison de son orbite de  $2^\circ 48' 0''$  pour le commencement des années 1672, 1702, 1732 & 1762, c'est-à-dire, avec une période de 30 ans. Il a employé à cette recherche les observations faites dans les années 1673, 1702, 1703, 1732, 1733, 1762 & 1763 ; le milieu entre 14 déterminations est de  $2^\circ 47' 56''$  ou  $2^\circ 48' 53''$ , suivant qu'il emploie dans le calcul la demi-durée vraie qu'on déduit immédiatement de l'observation, ou la demi-durée moyenne (2934), c'est-à-dire, corrigée de l'équation que donne la théorie, & qui auroit lieu, si le satellite étoit toujours à la même distance de Jupiter, & si son mouvement n'étoit pas troublé par l'action des satellites voisins. Cette inclinaison, la plus petite de toutes, n'étoit suivant les premières tables de M. Wargentin que de  $2^\circ 29'$ , mais il la fait actuellement de  $2^\circ 46'$ .

La plus petite.

La plus grande inclinaison est, suivant M. Maraldi, de  $3^\circ 48' 0''$  pour le commencement des années 1687, 1717, 1747 & 1772 ; il a tiré cette détermination des observations de 1685, 1686, 1715, 1716, 1745 & 1746 ; il trouvoit  $3^\circ 44' 43''$  ou  $3^\circ 44' 40''$  suivant qu'il faisoit entrer dans le calcul la demi-durée vraie (2934) ou la moyenne, mais dans ces années-là l'inclinaison n'étoit pas encore la plus grande ; suivant son hypothèse elle ne devoit l'être qu'un an ou deux après, temps où Jupiter étant trop près des nœuds, il n'auroit pas été sûr de déterminer l'inclinaison par la demi-durée des éclipses. M. Maraldi a donc adopté l'inclinaison de  $3^\circ 48'$ , d'autant plus volontiers que par-là l'inclinaison de l'orbite du premier

La plus grande.

fatellite, sur laquelle se fait le mouvement des nœuds du second fatellite, & qui est de  $3^{\circ} 18'$ , tient un milieu exact entre la plus grande & la plus petite inclinaison du second, ce qui rend le calcul de la variation annuelle de l'inclinaison du second, & de la libration de ses nœuds (2965) plus simple & plus facile à calculer.

Les demi-diamètres des éclipses du second fatellite que M. Maraldi a conclues des élémens précédens, combinés avec la libration du nœud, s'accordent avec celles qu'il a conclues des observations, d'une manière très-exacte; de 122 éclipses il n'en trouve que 12 où l'erreur soit de plus d'une minute, & e le ne passe qu'une seule fois  $1' 43''$ , (*Mém.* 1768, pag. 305). Suivant les nouvelles tables de M. Wargent in l'inclinaison dans le cercle varie depuis  $2^{\circ} 46'$  jusqu'à  $3^{\circ} 46'$ . (*Voy. pag.* 180).

Cause de ces variations.

2943. Pour expliquer la cause de cette variation singulière de l'inclinaison, je suis obligé de dire quelque chose du mouvement des nœuds, dont il sera bientôt question plus en détail (2965). Dans un mémoire présenté à l'académie le 27 Avril 1765, M. Maraldi annonça des variations qu'il avoit remarquées dans le nœud du second fatellite : après avoir déterminé l'inclinaison, par une observation du 17 Septembre 1715, de  $3^{\circ} 44' 53''$ , le lieu du nœud calculé par une observation du 18 Octobre 1714, en supposant la plus grande inclinaison de  $3^{\circ} 44' 53''$ , comme elle étoit le 17 Septembre 1715, étoit à  $10^{\circ} 21' 45'$ . Mais en 1751, après avoir déterminé l'inclinaison de  $3^{\circ} 44' 30''$ , directement par une observation du 9 Janvier, il trouva par une observation du 11 Septembre 1751, que le nœud devoit être dans  $10^{\circ} 0' 54' 9''$ , la différence produit  $20^{\circ} 27' 36''$ , ce qui dénotoit une libration ou un changement en plus & en moins de  $10^{\circ} 13' 48''$ ; le lieu moyen du nœud se trouvoit par-là dans  $10^{\circ} 11' 8'$ , au lieu que M. Wargent in le plaçoit dans  $10^{\circ} 12' 15'$ .

M. Maraldi ajoutoit que si l'on vouloit attribuer au changement d'inclinaison, la différence des durées observées, & supposer que le nœud fût fixe, il faudroit

supposer sur l'angle d'inclinaison une augmentation de 20' en onze mois de 1714 à 1715, & ensuite une diminution de 18'  $\frac{1}{3}$ . Tel étoit le phénomène observé, il étoit une suite nécessaire de la théorie que j'avois déjà donnée à ce sujet.

2944. En effet, j'avois montré que les nœuds des satellites devoient avoir un mouvement tantôt direct & tantôt rétrograde, & qu'il en résultoit une variation dans leurs inclinaisons sur l'orbite de Jupiter (*Mém. de l'acad.* 1762, pag. 233. *Histoire*, pag. 133), & c'est la première idée qui ait été donnée de la cause d'un phénomène si singulier; en même temps j'avois promis de discuter dans un autre mémoire ces changemens d'inclinaison. J'avois parlé des inégalités de l'inclinaison du 3<sup>e</sup> satellite, aux pag. 1052 & 1130 de la première édition de cette *Astronomie*, en disant qu'il faudroit recourir au mouvement des nœuds pour les expliquer; enfin j'avois démontré de semblables variations dans les inclinaisons & dans les nœuds des planètes, aux pag. 507 & 519. Ainsi la cause de ces inégalités étoit trouvée dès 1762.

Découverte  
de la cause.

2945. En conséquence, M. Bailly, à qui M. Maraldi avoit communiqué son observation, proposa en 1765 d'expliquer le changement d'inclinaison & la libration du nœud du 2<sup>e</sup> satellite sur l'orbite de Jupiter, en supposant que le nœud du 2<sup>e</sup> sur l'orbite du 1<sup>er</sup> ou du 3<sup>e</sup>, eut un mouvement périodique d'environ trente ans; c'est ainsi que j'avois expliqué le changement d'inclinaison des planètes (1377). Soit  $BC$  (*fig. 75*) l'orbite de Jupiter,  $CA$  l'orbite du satellite perturbateur, supposée fixe;  $BA$  celle du satellite troublé; l'angle  $A$  qui est l'inclinaison mutuelle de deux orbites étant supposé constant, de même que l'orbite  $BA$ , l'orbite  $CA$  est transportée contre l'ordre des signes, le nœud  $A$  rétrogradant change de situation, & le nœud  $C$  que nous observons, changera de même que l'angle  $B$ , dont nous observons les variations. Suivant les formules de trigonométrie (3727 & 3717)  $\text{tang. } BC = \frac{\sin. A \text{ tang. } A}{\cos. AC \cos. C \text{ tang. } A + \sin. C}$ ;

Planche VI.  
Fig. 75.

# 264 ASTRONOMIE, Liv. XVIII.

cof.  $B = -\text{cof. } A (\text{cof. } C - \sin. C \text{ tang. } A \text{ cof. } AC)$ . Ainsi la valeur de  $BC$  ne change pas beaucoup, quoi que  $CA$  prenne toutes les valeurs possibles par le mouvement de  $A$ .

2946. Tant que le point  $A$  parcourra le premier quart de sa révolution, & jusqu'à ce que  $\sin. AC$  soit  $\sqrt{1 - \left(\frac{\text{tang. } A^2}{\text{tang. } C^2}\right)}$ , comme je vais bientôt le démontrer (2948), le nœud  $B$  s'éloignera du point  $C$ , & aura un mouvement rétrograde; il deviendra ensuite direct, & se rapprochera du point  $C$ , ou il coïncidera lorsque le nœud  $A$  aura parcouru  $180^\circ$ ; enfin ce nœud  $A$  faisant le troisième quart de sa révolution, le nœud  $B$  continuera d'être direct & s'éloignera du point  $C$  dans l'autre sens.

2947. L'angle  $B$ , inclinaison du satellite troublé sur l'orbite de Jupiter, diminue pendant la première moitié de la révolution du nœud  $A$ , en commençant du point  $C$  où elle est la plus grande. Lorsque le nœud  $A$  est parvenu à  $180^\circ$  du point  $C$ ; l'angle  $CB$  est plus petit que l'angle  $C$  de la même quantité qu'il étoit plus grand au commencement de la révolution; ainsi le nœud & l'inclinaison  $C$  reviendront les mêmes au bout de trente ans, si le nœud  $A$  rétrograde de  $12^\circ$  par an, comme l'exige l'observation, puisqu'on trouve que les nœuds du second satellite sur l'orbite de Jupiter, sont encore sensiblement aux mêmes points depuis un siècle, & que l'inclinaison reparoît la même tous les trente ans.

2948. Pour démontrer que le *maximum* de  $BC$  arrive, suivant la formule de M. Bailly, lorsque  $\sin. AC = \sqrt{1 - \frac{\text{tang. } A^2}{\text{tang. } C^2}}$ , soit  $\text{tang. } BC = y$ ;  $\sin. AC = x$ ,  $\text{cof. } AC = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $\text{tang. } A = a$ ;  $\text{cof. } C = b$ ;  $\sin. C = m$ ; alors  $y = \frac{ax}{ab\sqrt{1 - x^2} + m}$ , dont il faut faire la différentielle égal à zéro, suivant la règle du *maximum* (3299); or  $dy = a dx (a b \sqrt{1 - x^2} + m) + \frac{a^2 b x^2 dx}{\sqrt{1 - x^2}}$  (3295),  $= dx \frac{a^2 b + a m \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}$ , ainsi  $a b + m \sqrt{1 - x^2} = 0$ ;  $\frac{a^2 b^2}{m^2} =$



$1 - x x$ ,  $x = \sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{m^2}}$ ; c'est-à-dire,  $\sin. AC = \sqrt{1 - \frac{\text{tang. } A^2 \text{ cof. } C^2}{\sin. C^2}}$  ou  $\sqrt{1 - \frac{\text{tang. } A^2}{\text{tang. } C^2}}$ , comme je l'ai supposé (2946).

2948. Il est très-rare d'avoir immédiatement & par observation la durée des éclipses du 3<sup>e</sup> satelite; jusqu'ici (c'est-à-dire, en 1771) on n'a vu que neuf fois l'immersion & l'émerfion; cela devoit arriver tous les 12 ans, quand les quadratures de Jupiter arrivent vers 1<sup>s</sup> 12° de longitude, comme en 1751, 1763, 1774, &c. mais les mauvais temps nous empêchent souvent de faire ces observations importantes. Dans les quadratures qui arrivent vers l'autre limite, comme dans les années 1745, 1757, 1769, Jupiter n'étant qu'à 23° de son aphélie, la parallaxe annuelle est trop petite, & l'on ne peut voir les deux phases; mais comme ces observations sont importantes & curieuses, je vais expliquer ici la méthode qui peut servir à les prédire, je l'ai donnée d'une manière plus rigoureuse & plus étendue dans les mémoires de 1765, pag. 465.

Pour calculer les temps où l'on peut voir les immersions & les émerfions du 2<sup>e</sup> satelite, il faut d'abord trouver quelle est la portion de la section de l'ombre que l'on voit de la terre, dans une direction oblique, c'est-à-dire, la valeur de  $DF$  (fig. 244); la portion  $ED$  de l'ombre de Jupiter étant cachée par son disque. Soit la parallaxe annuelle (1141), ou l'angle  $SPT = P$ ;  $IP = \frac{CI}{\sin. P}$  (3611);  $PB = IB - IP = 9 - \frac{1}{\sin. P}$  (la distance du satelite étant de 9 demi-diamètres de  $\varpi$ ). Dans le triangle  $PBD$ ,  $BD = PB. \text{tang. } P$ ; donc  $BD = (9 - \frac{1}{\sin. P}) \text{tang. } P = \frac{9 \sin. P - 1}{\cos. P}$ ; il faut la multiplier par  $\cos. P$  pour avoir sa valeur  $BX$  perpendiculairement au rayon visuel,  $= 9 \sin. P - 1$ ; c'est la partie de l'ombre qui se voit de la terre, à côté du disque de Jupiter.

Temps où l'on voit les deux phases.

Fig. 244.

Fig. 253.

2949. On suppose deux cercles *DKL*, *FHE* (fig. 253), le premier qui représente le disque de Jupiter, le second qui représente la section de l'ombre = 0,9466 (art. 2919); connoissant  $BD = 9 \sin. P - 1$ , on l'ajoutera avec le demi-diamètre *ID* de Jupiter = 1, & l'on aura  $BI = 9 \sin. P$ , d'où l'on conclura *NM*, qu'on peut supposer = *BA*, parce que l'orbite *AN* du satellite est presque parallèle à celle de Jupiter, sur-tout quand il est près des limites; la valeur de  $BA = 9 \sin. I. \sin. D$  (2926), fera connoître la distance de Jupiter au nœud (2931). Mais pour plus d'exactitude, il faut employer la différence de latitude entre Jupiter & son ombre qui vient de la latitude de la terre par rapport à l'orbite de Jupiter; elle est à peu-près égale à la septième partie de l'équation de l'orbite solaire, du moins vers le temps où Jupiter est en quadrature (*Mém. acad.* 1765, pag. 470), parce que la latitude de la terre vue de Jupiter, qui est alors à la même distance du soleil que de la terre, puisque c'est dans les quadratures, est cinq fois plus petite que l'inclinaison de Jupiter = 79'; c'est-à-dire, qu'elle ne va qu'à 16', qui est la septième partie de 1° 56', & elle croit comme le sinus de la distance au nœud de Jupiter, ou à 3° 8', de même que l'équation du soleil est proportionnelle au sinus de son anomalie qui est aussi la distance à 3° 8'; ainsi la quantité dont le centre *C* de l'ombre doit nous paroître plus méridional que Jupiter, dans les six premiers mois de l'année forme un arc *BC* qui vu du centre de Jupiter, est égal à 16' tout au plus, tandis que *IB* est la parallaxe annuelle exprimée en minutes; connoissant *IB* & *BC*, on cherche *BIC* & le côté *IC* en degrés & minutes, on prend 9 fois son sinus pour l'exprimer en demi-diamètres de Jupiter. Dans le triangle *CAI* on connoît *CN* qui est toujours le demi-diamètre de l'ombre, parce que son centre est supposé vu en *C*; on connoît également les deux autres côtés  $IN = 1$ ,  $IC = 9 \sin. IC$ ; on trouvera l'angle *NIC*, l'on aura par conséquent *NIB*, & la latitude *NM* de l'intersection *N*, qui doit être égale au moins à 9 sin. *I*.

fin.  $D$ , latitude du fatellite, pour qu'on puisse voir les deux phases. Si l'on veut avoir cette latitude du fatellite plus exactement, il ne faut pas prendre la simple distance  $D$  de Jupiter au nœud; mais y ajouter ou en ôter l'arc  $AN$  de l'orbite du fatellite, qui est de  $5^{\circ}$  environ pour le second fatellite, l'on aura sa distance au nœud; ainsi l'on connoîtra  $\sin. I. \sin. D$ , & l'on verra si dans le jour proposé la hauteur  $MN$  du fatellite est assez grande pour qu'il paroisse au-dessus de l'intersection  $N$  du disque de Jupiter & de la section de l'ombre.

2950. On peut représenter sur une grande figure, avec une précision suffisante pour la pratique, les cas où le second fatellite peut paroître dans l'immersion & l'émer-sion. Le cercle  $OB$  (fig. 254), qui représente l'ombre de Jupiter doit avoir 302' de rayon (2919); on porte à l'occident du centre  $C$ , (si Jupiter passe au méridien le soir), un nombre  $CF$  de minutes égal à la parallaxe du grand orbe (2989), & du point  $F$  comme centre, on décrit un autre cercle  $IK$ , dont le rayon  $FI$  soit = 320', & qui représente le disque de Jupiter.

Figure qui  
peut les faire  
connoître.

Fig. 254.

2951. Pour tracer sur cette figure l'orbite du second fatellite, on prendra  $CA$  égal à l'inclinaison de son orbite, qui change depuis 166' jusqu'à 228' (2942), & l'on tirera l'orbite  $AEDG$ ; s'il y a un intervalle  $DE$  entre l'ombre & le disque de Jupiter, on verra l'immersion & l'émer-sion.

2952. Quand le second fatellite plus près de son nœud décrira l'orbite  $LMR$ , ce sera le temps où les deux phénomènes se confondant au point  $M$ , on cessera de voir l'émer-sion, (ou l'immersion si c'étoit après l'opposition): pour trouver à quelle distance du nœud cela doit arriver, on décrira sur  $CA$  un quart-de-cercle  $APN$ , que l'on divisera en degrés, en mettant en  $N$   $4^{\circ} 12'$  &  $10^{\circ} 12'$ , c'est-à-dire, les lieux des nœuds, & en  $A$   $1^{\circ} 12'$  &  $7^{\circ} 12'$ . Alors la ligne  $ML$  prolongée marquera au point  $P$ , sur la circonférence  $APN$ , la longitude héliocentrique de Jupiter pour le temps où les émer-sions cesseront de paroître, & l'arc  $PN$  marquera les quatre distances au

nœud qui dans chaque révolution de Jupiter indiquent le commencement & la fin des temps où l'on peut voir les durées entières de ses éclipses, en supposant la parallaxe *CF*.

2953. Il y aura cependant encore quelques éclipses de plus où l'on ne verra pas les deux phases, parce que si le satellite en disparaissant à nos yeux est confondu avec la lumière de Jupiter, ou si le point de l'ombre *EM* où entre le satellite n'est pas encore assez détaché de Jupiter, le satellite ne sera pas sensible à nos yeux.

Inclinaison  
du troisième.

2954. L'INCLINAISON du troisième satellite a été long-temps un autre objet de difficulté; elle ne parut que de  $3^{\circ}$  dans le dernier siècle, & elle a paru en 1763 de près de  $3^{\circ} 26'$ . Dans l'éclipse du 25 Janvier 1763, la demi-durée a été de  $43'$ , d'où M. Maraldi conclut l'inclinaison de  $3^{\circ} 25' 41''$ , en supposant le demi-diamètre de l'ombre  $1^h 47' 10''$ , & la section circulaire; cette inclinaison se trouvoit plus grande qu'en 1745 de  $7' \frac{1}{2}$ ; mais il semble que depuis 1763 elle a cessé d'augmenter, car en 1769 elle n'a été que de  $3^{\circ} 23' 33''$ ; si elle eût augmenté jusqu'à  $3^{\circ} 44'$ , le 3<sup>e</sup> satellite se seroit trouvé dans le même cas que le 4<sup>e</sup>, qui n'est plus éclipsé lorsque Jupiter s'éloigne des nœuds (Voy. M. Maraldi, *Mém. acad.* 1745). J'ai fait voir que cette augmentation de l'inclinaison étoit une suite naturelle du mouvement des nœuds, & de l'attraction des autres satellites, sur-tout du premier & du troisième (*Mém. acad.* 1765, pag. 608).

2955. M. de la Grange en partant de quelques suppositions, a jugé que la période de cette augmentation pouvoit être de 195 ans; M. Bailly, en 1766, la jugeoit de 200 ans, mais en convenant qu'il y avoit dans ces résultats beaucoup d'incertitude. M. Wargentin, en 1768, supposoit que la plus petite inclinaison avoit été de  $3^{\circ} 0'$  en 1697, & qu'elle seroit la plus grande en 1782. M. Maraldi trouve que la période est de 132 ans; il juge, d'après les observations de 1763, que l'inclinaison étoit alors de  $3^{\circ} 25' \frac{2}{3}$ , mais qu'elle a dû augmenter encore

pendant deux ans, & jusqu'à  $3^{\circ} 25' 57''$ , c'est la plus grande inclinaison, & elle répond aux années 1633 & 1765. La plus petite inclinaison est, suivant M. Maraldi, de  $3^{\circ} 2'$ , & répond à l'année 1697. Sur ces données, & avec les principes de l'art. 2946, il a calculé une table des inclinaisons pour toute la durée de la période, avec la libration du nœud produite par l'action du premier satellite, qui est la principale cause de ce mouvement. Mais parmi le grand nombre d'observations que M. Maraldi a calculées dans cette hypothèse, il y en a plusieurs où la demi-durée s'écarte de  $3'$  du calcul, ce qui fait qu'il ne regarde point sa période comme certaine. On aura en 1775 des occasions de résoudre cette difficulté; en attendant, je me suis servi de cette hypothèse dans les tables du 3<sup>e</sup> satellite (p. 191), & M. Wargentin lui-même en diffère peu, (*Nautical almanach for 1771*), si ce n'est pour le lieu du nœud où la correction du nombre  $A$ , qu'il n'a fixée que sur les observations, sans y introduire aucune loi.

2956. L'inclinaison du 4<sup>e</sup> satellite est constamment de  $2^{\circ} 36'$ , ou à peu-près, en la calculant dans l'hypothèse circulaire. (M. Maraldi, *Mém.* 1758, pag. 191). Le mouvement des nœuds de ce satellite qui est de  $4' 19''$  par an, suivant M. Wargentin (2967), doit produire un changement dans cette inclinaison, & M. Bailly pense qu'elle a dû être la plus petite en 1720, les nœuds du premier & du 4<sup>e</sup> s'étant trouvés au même point de l'orbite de Jupiter; mais ses accroissemens sont lents, & il faudra peut-être encore bien du temps avant qu'ils deviennent sensibles, (*Mém. acad.* 1766, pag. 363).

2957. M. Maraldi fit voir en 1750 qu'il étoit presque impossible de concilier toutes les observations des demi-durées du 4<sup>e</sup> satellite, en combinant le changement de l'inclinaison avec le mouvement du nœud, (*Mém. acad.* 1750, pag. 119); cependant il en approche beaucoup (2967), en supposant l'inclinaison constante de  $2^{\circ} 36'$ , le demi-diamètre de l'ombre  $2^{\circ} 8' 2''$ , & le lieu du nœud en 1745,  $4^{\circ} 16' 11'$ , avec un mouvement pro-

Inclinaison  
du quatrième,

## 270 ASTRONOMIE, LIV. XVIII.

gressif de  $5' 33''$  par an; il est étonnant qu'il ait pu, avec une hypothèse aussi simple, représenter aussi exactement toutes les observations que l'on a faites depuis un siècle. Cette inclinaison de  $2^{\circ} 36'$  est assez grande pour que le 4<sup>e</sup> satellite soit élevé au-dessus du cône d'ombre aussi-tôt que les éclipses arrivent à  $55^{\circ}$  des nœuds; par exemple, depuis le mois de Janvier 1768 jusqu'au mois de Juillet 1770, il n'y a point eu d'éclipses du 4<sup>e</sup> satellite.

Trouver  
l'inclinaison  
des satellites  
de Saturne.

2958. Lorsqu'il s'agit des satellites dont on ne peut point observer les éclipses, tels que ceux de Saturne (2998), on détermine l'inclinaison de leurs orbites par l'ouverture des ellipses qu'ils paroissent décrire. Dans la figure 247, on voit l'ellipse décrite par le 4<sup>e</sup> satellite lorsque Jupiter est à  $90^{\circ}$  du nœud; si l'on mesure alors la distance apparente du satellite à Jupiter, au nord & au sud, dans ses conjonctions supérieures & inférieures, on aura le petit axe de l'ellipse, & par conséquent l'inclinaison de l'orbite (2927).

### *Des Nœuds des Satellites.*

2959. LA durée d'une éclipse, lorsqu'elle est la plus longue, indique à peu-près le lieu du nœud; par exemple, le 30 Avril 1742, M. Maraldi & M. Cassini trouvèrent la durée d'une éclipse du 3<sup>e</sup> satellite, la plus longue que l'on eût jamais observée; ce jour-là le lieu de Jupiter vu du soleil, étoit à  $15^{\circ} 42'$  du Lion; l'on peut donc supposer que c'est dans ce point-là que l'orbite de Jupiter étoit coupée par le plan de l'orbite du 3<sup>e</sup> satellite.

Méthode  
pour le lieu  
du nœud.

2960. Mais la meilleure méthode pour déterminer le lieu du nœud d'un satellite, est d'observer deux éclipses d'égale durée, avant & après le passage de Jupiter par les nœuds ou par les limites de l'orbite du satellite: le 12 Mars 1687, Flamsteed observa la durée d'une éclipse du 3<sup>e</sup> satellite  $2^h 33' 0''$ , la longitude héliocentrique de Jupiter étoit alors  $8^s 11^{\circ} 58'$ ; le 6 Décembre 1702 la durée fut exactement la même, la longitude héliocentrique de Jupiter étant de  $0^s 15^{\circ} 21'$ ; la différence entre cette lon-

gitude & la précédente est de  $4^{\circ} 3' 23''$ , dont la moitié étant ajoutée à la première longitude, donne le lieu du nœud ascendant du satellite à  $10^{\circ} 13' 29''$ , en supposant que le nœud n'eût pas varié dans l'intervalle de ces deux observations.

2961. L'on pourroit, au défaut des éclipses, observer le passage de l'ombre du satellite le long des bandes qui sont sur le disque de Jupiter; lorsque cette ombre traversera Jupiter par le centre, ce sera une preuve que Jupiter est dans le lieu du nœud du satellite. (*Mém. de l'Acad.* 1717). Nous en parlerons ci-après (2986).

2962. On peut encore déterminer le lieu du nœud d'un satellite sans le secours de ses éclipses, ou de ses passages sur le disque de la planète, en faisant les observations suivantes, auxquelles on est obligé d'avoir recours lorsqu'il s'agit des satellites de Saturne. On compare le satellite ou à la ligne des bandes si c'est Jupiter, ou à la ligne des anses (3227) si c'est Saturne, & l'on examine soit dans la partie inférieure de l'orbite, soit dans la partie supérieure, à quelle distance le satellite passe de la planète lorsqu'il est sur la même ligne.

Lorsque Saturne passe dans le nœud du satellite vu de la terre; c'est-à-dire, lorsque Saturne est placé de manière que le plan de l'orbite du satellite passe par la terre, & soit dirigé vers notre œil, l'orbite du satellite doit paroître comme une ligne droite inclinée sur l'orbite *AB* de Saturne (*fig.* 255), mais quelques jours avant, l'orbite du satellite paroît une ellipse *KICD*; cette ellipse est encore ouverte, & coupe la ligne des anses en deux points *G* & *H*, l'un au-delà de Saturne vers la conjonction supérieure; l'autre en-deçà & vers la conjonction inférieure du satellite. Ces deux intersections *G* & *H* se rapprochent ensuite peu-à-peu du centre de Saturne, & se confondent au centre de la planète dès que Saturne arrive dans le nœud du satellite vu de la terre; il n'est donc pas difficile de juger par-là, de la situation du nœud du satellite de Saturne. Je suppose qu'on ait estimé ou mesuré la distance du satellite au centre de Saturne, &

Méthode  
pour les sa-  
tellites de Sa-  
turne.

*Fig.* 255.

la quantité dont il est au-dessus ou au-dessous de la ligne des anses, quelques jours avant & après ses conjonctions inférieures & supérieures : on aura la situation du fatellite dans les points *C, D, E*, pendant plusieurs jours de suite, & les rapportant exactement sur un carton, l'on trouvera quel jour le fatellite a du passer en *G* sur la ligne des anses *HG*, & à quelle distance il étoit alors du centre *S* de Saturne. Lorsqu'après une demi-révolution le fatellite parcourra *IK*, l'on observera de même plusieurs jours de suite sa situation par rapport à la ligne des anses *HSG*; on estimera facilement le temps où le fatellite a du se trouver en *H* sur la ligne des anses, supposé qu'on n'ait pu l'observer exactement dans ce point-là; l'on connoîtra ainsi la distance *GH* des deux intersections; si l'on continue ces observations, d'une révolution à l'autre, pendant que les points *G* & *H* se rapprocheront peu-à-peu, on jugera facilement du jour où ces deux intersections ont dû se confondre vues de la terre; on calculera pour cet instant le lieu de Saturne vu de la terre; le point opposé sera le lieu de la terre vu de Saturne. Mais ce ne sera point-là le nœud de l'orbite du fatellite sur l'écliptique, car la terre n'est point dans le plan de l'écliptique, vue de Saturne, suivant la définition de l'écliptique, à moins que Saturne vu de la terre ne soit sans latitude, & ne paroisse dans l'écliptique.

Lieu du  
nœud vu de  
Saturne.  
*Fig. 257.*

Il faut donc en conclure le lieu du nœud vu de Saturne, & sur l'orbite de Saturne; pour cela supposons un observateur au centre de Saturne; soit *OR* (*fig. 257*), l'orbite de Saturne, ou plutôt l'orbite que le soleil lui paroît décrire en 30 ans autour de Saturne; *ATNL* l'orbite du fatellite qui coupe au point *N* l'orbite de Saturne, en sorte que le point *N* soit le nœud qu'il s'agit de trouver. Soit *T* le lieu de la terre qui est dans le plan de l'orbite du fatellite au temps de l'observation que nous venons de supposer; la longitude du point *T* réduite à l'orbite *OR* de Saturne, (c'est-à-dire, la longitude du point *X* marqué par un arc *TX* perpendiculaire à *OR*), est à peu-près opposée à la longitude géocentrique de Saturne, ou plutôt c'est  
la



la longitude de la terre vue de Saturne (1144), & réduite à l'orbite de Saturne,  $TX$  est égale à la latitude de la terre par rapport à l'orbite de Saturne vue du centre de Saturne (1144);  $NX$  est la différence entre le lieu  $X$  de la terre & le lieu  $N$  du nœud, que l'on cherche; l'angle  $N$  est l'inclinaison de l'orbite du satellite que je suppose connue (2958); ainsi par le moyen de  $TX$  & de l'angle  $N$ , dans le triangle sphérique rectangle  $TXN$ , on trouvera  $NX$  distance entre le lieu opposé au lieu géocentrique de Saturne, & le lieu du nœud  $N$ ; d'où l'on conclura le lieu du nœud du satellite sur l'orbite de Saturne. Je crois cette méthode plus simple que celles qui ont été employées jusqu'ici. On pourroit représenter l'écliptique par un autre cercle tel que  $ECTM$ , mais la terre étant vue de Saturne en  $T$ , le grand cercle  $ECTM$  (qui passe par la terre faisant en  $C$  un angle de  $2^{\circ} \frac{1}{2}$ , égal à l'inclinaison de l'orbite de Saturne), n'est pas exactement l'écliptique, c'est-à-dire, l'orbite de la terre (3234).

2963. M. J. D. Cassini supposoit en 1693 que les nœuds des 4 satellites de Jupiter étoient à  $10^{\circ} 14^{\circ} \frac{1}{2}$  de longitude; M. Cassini son fils, en 1740 n'y avoit encore rien changé (*Elem. d'astr. pag. 637*); M. Bradley pensoit en 1718 qu'ils étoient à  $10^{\circ} 11^{\circ} \frac{1}{2}$ , & il ne faisoit aucune différence entre les nœuds des 4 satellites; mais un plus grand nombre d'observations a montré que les nœuds des différens satellites ne sont pas au même point du ciel; on trouvera dans la table des élémens (2972) les nœuds, tels que M. Wargentin les a supposés dans ses tables, d'après les demi-durées observées (2960).

2964. Le nœud du premier satellite est à  $10^{\circ} 14^{\circ} 30'$ , & les observations n'y font appercevoir aucun mouvement. Cependant l'aplatissement seul de Jupiter devoit produire dans le nœud du 1<sup>er</sup> satellite un mouvement de  $104^{\circ} 9' 31''$  par an, suivant les calculs de M. Bailly, en supposant le globe de Jupiter homogène (*Mém. acad. 1766, pag. 353*). Mais on concilie à cet égard l'observation avec la théorie, en supposant que l'équateur de Jupiter soit sensiblement dans le même plan que l'or-

Nœud du  
premier sa-  
tellite.

## 274 ASTRONOMIE, LIV. XVIII.

bite du premier fatellite, car alors le mouvement du nœud provenant de cette cause doit être nul. Cependant il y a un mouv. rétrog. produit par le soleil, de  $33''$  par an, mais on n'en tient pas compte, non plus que de celui de l'aphélie de Jupiter qui doit être commun à ces nœuds.

Du second.

2965. Le nœud du second fatellite, suivant les premières tables de M. Wargentin, étoit constamment à  $10^{\circ} 11' 48''$ ; cependant l'aplatissement seul de Jupiter devoit occasionner un mouvement annuel du nœud sur l'équateur de Jupiter, qui, suivant les calculs de M. Bailly est de  $20^{\circ} 34'$ , en supposant le globe de Jupiter homogène, & de  $9^{\circ} 26'$ , en supposant que la densité décroît du centre à la circonférence, comme le carré des distances, & que les ellipticités croissent comme la racine carrée du cube de la même distance; ainsi qu'exige l'aplatissement observée de  $\frac{1}{4}$  (*Mém. acad.* 1766); mais ce mouvement peut être insensible sur l'orbite de Jupiter. M. Wargentin, dans ses nouvelles tables admet un mouvement progressif du nœud sur l'orbite de Jupiter de  $1^{\circ} 42'$  par siècle, par rapport à l'aphélie de Jupiter; il est représenté au bas de la table CXXXVII. pag. 180, par une correction du nombre *A*, qui est nulle en 1770, & — 5, en 1800. J'en expliquerai le fondement, art. 2968. Il paroît aussi qu'il faut admettre une libration de 8 à  $9^{\circ}$ , dans le nœud du second fatellite, en vertu de l'attraction du premier, c'est-à-dire, supposer que le nœud du second fasse une révolution en 30 ans sur l'orbite du premier (2945). M. Bailly fait voir que l'action du 4<sup>e</sup> fatellite peut être négligée dans cette recherche, & que le mouvement du nœud du second qui a lieu sur l'orbite du 3<sup>e</sup> peut être considéré, comme s'il avoit lieu sur l'orbite du premier, dont l'inclinaison est presque la même, en sorte que de ces deux attractions, jointes à la différence qui vient de l'aplatissement de Jupiter, il résulte un mouvement du nœud de  $12^{\circ}$  par an, & une libration ou équation analogue au changement de l'inclinaison. Cette libration est de  $8^{\circ} 42' \frac{1}{2}$ , suivant M. Maraldi, de  $9^{\circ} 21'$ , suivant M. Bailly, & de  $11^{\circ}$

27', suivant M. de la Grange. Elle est exprimée dans la table des inclinaisons par la correction que l'on applique au nombre *A*, quand on cherche les demi-durées, &c qui monte à 87, ou  $8^{\circ} 42'$ . Ce mouvement des nœuds du second satellite sur l'orbite de Jupiter, autour du nœud du premier est commun à tous les satellites; leurs nœuds oscillent tous autour des nœuds du premier, tandis que les nœuds du premier oscillent eux-mêmes autour d'un point qu'on peut regarder comme leur lieu moyen. (2946). Le lieu moyen du nœud ascendant du second satellite est  $10^{\circ} 13' 52''$ , suivant M. Maraldi (*Mém. acad.* 1768, pag. 305); c'est aussi le lieu du nœud du 3<sup>e</sup> satellite pour l'année 1697; suivant M. Wargentin, il'y a 7' de moins.

2966. Le nœud moyen du 3<sup>e</sup> satell., suivant M. Wargentin, est constamment à  $10^{\circ} 14' 24''$ , cependant le calcul des inégalités qui proviennent de l'aplatissement de Jupiter donne, suivant M. Bailly, un mouvement annuel de  $4^{\circ} 1' 32''$ , en supposant Jupiter homogène, & de  $1^{\circ} 50' 45''$  dans l'hypothèse que j'ai expliqué ci-dessus. M. Maraldi n'admet qu'un mouvement progressif d'environ 3' par an, d'après les observations. Il doit y avoir aussi un balancement analogue au changement de l'inclinaison dont nous avons parlé (2955). V. M. Bailly, pag. 143. Cette libration du nœud se voit dans la table CXLVI. d'après l'hypothèse adoptée par M. Maraldi.

Du troisième.

2967. Le 4<sup>e</sup> satellite est celui dans lequel on a le mieux observé jusqu'ici le mouvement du nœud. M. Bradley avoit cru que par la théorie de l'attraction, ce mouvement devoit être rétrograde, mais les observations ont forcé M. Wargentin & M. Maraldi à faire ce mouvement direct, & j'ai fait voir le premier que l'attraction des autres satellites devoit réellement le produire (*Mém. acad.* 1762, pag. 230), ainsi que dans les autres planètes (1348). Suivant M. Maraldi, le lieu du nœud étoit à  $4^{\circ} 16' 11''$  en 1745, & le mouvement est de  $5' 33''$  par an. (*Mém. acad.* 1758, pag. 86). M. Bailly le trouve de  $5' 15''$  (pag. 12). La considération de l'aplatissement de Jupiter donnoit aussi à M. Bailly un mouvement annuel

Nœud du  
quatrième.

## 276 ASTRONOMIE, LIV. XVIII.

de  $33' 8''$  sur l'équateur de Jupiter, en supposant Jupiter homogène, & de  $15' 12''$  en faisant varier les densités; mais pour le rapporter à l'orbite de Jupiter, il faudroit connoître exactement l'inclinaison de l'équateur de Jupiter sur son orbite, que l'on ne peut observer que grossièrement (3222). M. Wargentin avoit cru que le mouvement du nœud étoit irrégulier, (*Connoiss. des mouv. célest.* 1766, pag. 221). Mais en rejetant l'observation du 12 Juillet 1687, ce mouvement devient assez régulier; il le suppose donc dans les nouvelles tables de  $3' 18''$  par rapport à l'aphélie de Jupiter, ce qui fait  $4' 19''$  par rapport aux équinoxes, & la longitude du nœud en 1760,  $10^s 16^o 39'$ .

2968. Le nombre *A* qui dans les tables exprime l'anomalie moyenne de Jupiter, & sert d'argument à la grande équation (2893), sert aussi d'argument à la table des demi-durées; par exemple, le nœud du 4<sup>e</sup> satellite de Jupiter est à  $10^s 1^o \frac{1}{2}$  de l'aphélie de Jupiter, & quand Jupiter est dans ce nœud, son anomalie moyenne exprimée en dixièmes de degré est 3015, ainsi en augmentant le nombre *A* de 3015 il indiquera le nœud; il suffira donc de mettre la plus grande demi-durée vis-à-vis de 3015, & ainsi des autres, pour que le nombre *A* soit l'argument des demi-durées; voici la manière dont on peut reconnoître quel lieu du nœud supposent les tables. Le nombre *A* vis-à-vis de la plus grande demi-durée, *p.* 201,

est de $130^o \frac{1}{2}$ & $301^o \frac{1}{2}$ ou en nomb.	1305	3015
Ainsi l'anom. moy. de Jupiter est	$4^s 10^o 30'$	$10^s 1^o 30'$
L'équation pour cette anom. . .	— 4 24	+ 4 36
Donc les anom. vr. de Jupiter,	4 6 6	10 6 6
Ajoutant l'aphélie en 1760,	6 10 33	6 10 33
On a le lieu vrai du nœud,	10 16 39	4 16 39

Tel est donc le lieu du nœud que M. Wargentin a supposé dans ses tables pour 1760. M. Maraldi le trouve de  $4^s 17^o 34'$ , c'est-à-dire, plus avancé de  $55'$  (2967). Lorsqu'on veut faire servir la même table pour d'autres années, il faut pour chaque degré ôter 10 du nombre *A*, avant que de chercher les demi-durées. En effet, si dans

la table le nombre  $A$  est de 1305, quand Jupiter est dans le nœud du quatrième satellite, & que la durée est la plus grande; ce nœud avançant ensuite de  $1^{\circ}$  par rapport à l'aphélie, Jupiter sera dans le nœud, & la durée la plus grande, quand le nombre  $A$  sera réellement de 1315, il faudra donc en ôter 10 pour chercher dans la table cette demi-durée dans le nœud, qui est toujours correspondante à 1305. Ainsi le mouvement du nœud du 4<sup>e</sup> satellite étant de  $3' 18''$  pour chaque année, par rapport à l'aphélie, il faut ôter  $5\frac{2}{5}$  tous les dix ans du nombre  $A$ . Si l'on vouloit savoir quelle demi-durée doit répondre dans nos tables à un nombre  $A$  donné, il faudroit de ce nombre  $A$  donné, qui est l'anomalie moyenne de Jupiter, déduire l'anomalie vraie de Jupiter, sa longitude vraie, & par conséquent sa distance au nœud du satellite, qui est supposé connu (2967), d'où il seroit aisé de conclure la demi-durée (2940).

*Attractions réciproques des Satellites.*

2969. LA loi de l'attraction générale qui se vérifie dans toutes les parties de l'astronomie (3383), se reconnoît évidemment dans les inégalités des satellites de Jupiter; on a vu (2900) que l'inégalité la plus sensible du premier satellite se rétablit au bout de 437 jours, suivant la remarque de M. Bradley; l'action mutuelle des satellites lui parut sur-tout remarquable dans les inégalités du 2<sup>e</sup> satellite, mais il vit qu'elle avoit aussi lieu dans le mouvement du premier.

Inégalités  
périodiques.

Les inclinaisons du 2<sup>e</sup> & du 3<sup>e</sup> satellite, forment une autre preuve bien marquée de l'attraction mutuelle; on a vu le changement singulier & alternatif de leurs inclinaisons (2943, 2954), dont il seroit impossible de rendre raison sans cela.

Changement  
d'inclinaison.

2970. Quoiqu'on ait supposé fixe le nœud du premier, & qu'on ait employé une inclinaison constante pour le premier & le quatrième, cependant les observations indiquent assez que cela n'est vrai qu'à peu-près: toutes les

Mouvement  
des nœuds.

fois qu'on a voulu concilier les demi-durées des éclipses ; on a trouvé des incertitudes & des variétés, qui donnent lieu de croire que les nœuds des 3 premiers satellites ont un mouvement (2965, 2966), & que l'inclinaison du 4<sup>e</sup> n'est pas constante, ( *Mém. acad.* 1750, pag. 119, & 1761, pag. 378 ).

Le mouvement direct du nœud du 4<sup>e</sup> satellite est surtout une preuve manifeste de l'attraction des trois autres (2967) ; ce mouvement du nœud seroit rétrograde s'il étoit produit par l'attraction du soleil (1348) ; cependant les observations prouvent évidemment qu'il est direct, & cela est conforme à l'effet que doivent produire les attractions des autres satellites, comme je l'ai fait voir, ( *Mém.* 1762, pag. 230 ).

Dérangemens irréguliers.

2971. Le 3<sup>e</sup> satellite a des inégalités considérables qu'on n'a point encore déterminées, & dont la marche irrégulière fait voir qu'elles dépendent nécessairement des attractions réciproques des satellites. M. Maraldi qui s'occupoit en 1764 de la théorie du 3<sup>e</sup> satellite me fit voir la comparaïson qu'il avoit faite de ses tables avec un grand nombre d'observations ; entre le 22 Mai 1743, & le 6 Janvier 1744, il y avoit un saut de 10' de degré ; entre le 4 Février & le 15 Juillet 1755, 18' ; entre le 9 Janvier & le 21 Juillet 1726, 17' ; entre le 7 Février & le 12 Août 1727, 14' ; entre le 10 Mars 1740, & le 25 Octobre 9' ; enfin il y avoit entre le 28 Février & le 25 Août 1751, 15' de différence dans l'erreur des tables ; il n'y a que les attractions mutuelles des satellites qui puissent changer aussi considérablement dans de si courts intervalles ; le 4<sup>e</sup> satellite paroît y devoir entrer (2903). Ce sont ces irrégularités qui ont empêché M. Maraldi de publier le résultat de son travail.

Le 4<sup>e</sup> satellite étant le plus petit (2979), & le plus éloigné de tous, son attraction ne doit pas altérer beaucoup le mouvement des trois autres ; aussi leurs inégalités dépendent principalement de la position respective de ces trois satellites intérieurs, sur-tout du 1<sup>er</sup> & du 3<sup>e</sup>, qui sont les plus considérables. (2981)

Telles sont à peu-près les réflexions que j'exposai en 1764, dans le comité qui étoit chargé de fixer le sujet du prix de 1766, afin d'établir la nécessité de proposer les inégalités que les satellites de Jupiter éprouvent par leur action mutuelle; c'étoit en effet une des questions les plus curieuses de l'astronomie physique. M. de la Grange qui remporta le prix, composa sur ce sujet un très-beau mémoire que j'ai cité plusieurs fois, & qui sera imprimé parmi les pièces des prix.

2972. La table suivante est l'abrégé de toutes les recherches que j'ai données jusqu'ici, l'extrait de nos meilleures tables, & le tableau de toute la théorie des quatre satellites de Jupiter. Ces élémens auront besoin d'être encore vérifiés par un grand nombre d'observations; on les trouvera pour le premier satellite dans les actes d'Upsal, année 1742, & dans la *Connoissance des mouvemens célestes*, année 1767; pour le second satellite dans les actes d'Upsal, année 1743, & les *Mémoires de l'académie* 1768; pour le 3<sup>e</sup> dans la *Connoissance des temps*, année 1768; pour le 4<sup>e</sup> dans les mémoires de 1750, & dans la *Connoissance des mouvemens célestes*, année 1766. Il y a aussi quelques observations à la fin des tables de M. Bailly; il y en a beaucoup dans les transactions philosophiques de la société royale de Londres; dans les mémoires de l'académie de Pétersbourg; dans les éphémérides du P. Hell, &c. personne n'en a fait un plus grand nombre que M. Maraldi, qui, à l'exemple de M. son Oncle s'est, pour ainsi dire, voué à cette partie importante de l'astronomie; M. Wargentin, astronome célèbre de l'académie royale des Sciences de Stockholm, a suivi cet exemple, & depuis plus de 25 ans, il n'a laissé passer aucune occasion d'observer les satellites, & de perfectionner leur théorie. M. Messier a fait aussi une quantité immense d'observations de même espèce. Mais jusqu'ici la différence des lunettes; & les inégalités optiques provenant du degré de lumière des satellites, & qu'on a été obligé de négliger, ont mis dans les observations bien des discordances qu'il faudroit faire disparaître, par l'examen de ces différentes causes; M. Bailly s'en occupe actuellement (Janvier 1771).

Observations  
des satellites.

TABLE de tous les Éléments qui servent à la théorie & au calcul des quatre Satellites de Jupiter, sur lesquels sont fondées les Tables CXXVI & suivantes, ou les corrections dont j'ai parlé dans les Articles précédens.

ÉLÉMENTS.	I.	II.	III.	IV.
Révolution périodique (2883).....	1j 18h 27' 33"	3j 13h 13' 42"	7j 3h 42' 33"	16j 16h 32' 8"
Révol. synodiques (2882, 2973)....	1 18 28 36	3 13 17 54	7 3 59 36	16 18 5 7
La même réduite en secondes.....	152915''9479	307075''7489	619175''8675	1447507''0917
Log. de cette révolution en temps...	5, 1844528	5, 472427	5, 7918140	6, 1606207
Demi-diam. de l'ombre en d. (2919)...	9° 35' 37"	6° 1' 33"	3° 43' 58"	2° 8' 2"
Log. du demi-d. de l'omb. en temps...	3, 610128	3, 710993	3, 807535	3, 933487
ou demi-d. de l'om. en temps (2918)...	1h 7' 55"	1h 25' 40"	1h 47' 00"	2h 23' 0"
Demi-d. de l'ombre, celui de Jupiter étant, 1. (2919).....	0, 9941	0, 9967	0, 9857	0, 9913
Demi-durée des écl. à 90° des nœuds, lorsque l'incl. est la moindre (2941)...	1 3 45	1 16 5	1 2 25	0 0 0
Lorsque l'incl. est la plus grande....	1 3 45	1 6 49	0 42 8	0 0 0
La plus gr. inclinaison dans le cercle...	3° 18 38"	3° 48' 0"	3° 25' 57"	2° 36' 0"
L'inclinaison moyenne.....	3 18 38	3 18 0	3 13 58	2 36 0
La plus petite inclinaison.....	3 18 38	2 48 0	3 2 0	2 36 0
Dans l'ellipse } la plus grande.....	3 4 27	3 31 42	3 11 14	2 24 51
(2937) } la plus petite.....	3 4 27	2 36 0	2 49 0	2 24 51
Logarith. de la distance en temps, ou log. du temps pour 57°, = r (2928)...	4, 3862729	4, 6890628	4, 9936342	5, 3624408
Logarithme de u (2930).....	0, 7761453	0, 9780995	1, 1860952	1, 4289538
Lieu moy. du nœud en 1760, (2963)...	16° 14' 30"	16° 13' 45"	16° 14' 24"	10 16° 39"
Mouvement annuel du nœud.....	0	2' 3"	0	4' 19"
Distances en demi-diamètres de Jupiter suivant Cassini (2884).....	5, 67	9, 00	14, 38	25, 30
Suivant Newton.....	5, 965	9, 494	15, 141	26, 630
Distances en min. dans les moyennes distances de Jupiter (2884).....	1' 51"	2' 57"	4' 42"	8' 16"
Epoques des conjonct. 1760 (2977)...	0j 10h 44' 20"	1j 14h 58' 56"	2j 5h 41' 49"	1j 7h 30' 10"
Nomb. A ou anomalie de Jupiter....	1172	1173	1174	1175
Nomb. B ou distance de Jupiter à la conjonction (2916).....	911	914	915	913
La plus grande équation (2893)....	0h 59' 25"	1h 19' 5"	2h 35' 35"	6h 13' 4"
Equat. particulière (2899).....	3 30	16 0	9 30	1 0 30
Change. des conj. en cent années Jul. 1j 9h 8' 53"	1548	1548	1550	1560
Change. correspon. du nombre A....	569	568	572	604
Change. correspon. du nombre B....	25 12° 12' 10"	25 12° 28' 11"	55 12° 47' 16"	75 17° 5' 44"
Long. moy. Jovicentrique, 1700.....	6 23 29 20	3 11 22 29	1 20 19 3	0 21 34 16
Mouv. diurne Jovicentrique.....	7 24 47 45	3 22 31 40	1 21 19 37	6 24 50 0
Mouvement séculaire (2915).....				

### Explication des tables des Satellites.

2973. POUR avoir les révolutions des satellites de Jupiter, avec une exactitude suffisante, il faut connoître en décimales de secondes la durée d'une révolution, puisque les conjonctions du premier satellite retardent de 1j 9h 8' 53" en cent ans (table CXXVI.), la révolution



tion étant de  $11^h 18^m 28' 36''$ , il y a  $9^h 19' 43''$  de différence, qu'il faut ôter de l'intervalle de 100 ans, pour avoir le temps que ce satellite emploie à faire 20637 révolutions complètes; ce nombre de 20637 est facile à trouver, car il suffit de diviser 36525 jours qu'il y a dans un siècle, ou  $315576000''$ , par  $11^h 18^m 28' 36''$  ou  $152916''$ . On trouvera  $20637 \frac{1}{3}$ , qui est le nombre de révolutions du premier satellite; mais il y aura un reste, & cela même nous apprend qu'il ne lui faut pas tout-à-fait un siècle pour faire 20637 révolutions. Ayant donc retranché les  $9^h 19' 43''$  ou  $33583''$  de l'espace d'un siècle, ou de  $315576000''$ , on divisera le reste par 20637 & l'on aura la durée de la révolution synodique  $11^h 18^m 28' 35'' 947909$ .

Revolutions  
exactes.

Pour le second satellite, il faut retrancher  $270156''$  du siècle, & diviser par 10276 révolutions, & l'on a  $31^h 13^m 17' 53'' 74893$ , révolution du second satellite.

Pour le troisième, l'on retranchera  $439779''$ , & divisant par 5096, l'on trouvera  $71^h 3^m 59' 35'' 86754$ .

Pour le quatrième, on ôte  $194540''$  de la durée du siècle, & l'on divise la différence par 2180, le quotient est  $161^h 18^m 5' 7'' 09174$ , révolution synodique du quatrième satellite.

2974. Si l'on ajoute continuellement  $11^h 18^m 28' 35'' 947909$  deux cent & six fois, l'on aura  $364^h 14^m 11' 25'' 269254$ , qui répond au 30 Décembre  $14^h 11' 25''$ ; c'est ainsi que l'on a toutes les autres conjonctions qui dans nos tables répondent aux différens jours du mois pour le premier satellite (*pag.* 167 & suiv.), & par lesquelles on passe nécessairement en faisant ces 206 additions.

Si l'on ajoute encore une fois la révolution, l'on aura  $3661^h 8^m 40' 1'' 21716$ , ce qui prouve qu'au bout d'un an les conjonctions avancent de  $11^h 8^m 40' 1''$  si l'année a été commune; c'est en effet le nombre qu'on trouve (*pag.* 166), vis-à-vis d'une année commune. Ayant doublé ce nombre, on aura  $21^h 17^m 20' 2''$  pour deux années; mais, puisque ce nombre excède une révolution du premier

Jour que l'on  
 ôte des épo-  
 ques des bis-  
 sextiles,

fatellite, il n'indiqueroit pas la première conjonction de l'année; il faut donc en ôter une révolution, & l'on aura  $22^h 51' 26''$  pour deux ans; si l'on y ajoute encore  $11^h 40' 1''$ , l'on aura  $21^h 31' 27''$  pour trois ans; mais il en faut ôter une révolution qui se trouve tout entière dans cette somme, ( car il y a 619 révolutions dans trois ans ); & il reste  $13^h 2' 52''$ , changement pour trois ans. On ajoutera encore  $11^h 40' 1''$ , & l'on aura pour le retardement des quatre ans,  $11^h 21' 42' 53''$ ; on en ôtera un jour, que l'on met de plus dans les deux premiers mois des années bissextiles, afin qu'il n'y ait rien à changer aux dix autres mois ( 1326 ), il reste  $11^h 42' 53''$  pour la quantité dont les époques doivent changer dans nos tables tous les quatre ans, en partant d'une année bissextile, & tombant sur une année bissextile.

Si l'on ajoute  $11^h 40' 1''$  avec  $11^h 21' 42' 53''$ , & qu'on ôte une révolution, l'on aura pour la cinquième année, qui suit l'année bissextile  $11^h 11' 54' 18''$ ; mais il faut en ôter un jour, parce que l'année précédente ayant été supposée bissextile étoit plus longue d'un jour, ce qui fait que les conjonctions retardent moins; on aura donc  $11^h 54' 18''$ .

En doublant le nombre qui répond à quatre ans dans les tables, & ôtant une révolution, on a pour huit ans  $11^h 57' 18''$ , & ainsi des autres années de 4 en 4.

2975. Par-là on peut construire ou prolonger la table des époques des conjonctions moyennes pour chaque année. L'époque du premier fatellite pour 1700, est  $11^h 04' 49' 53''$ ; on y ajoutera pour quatre ans  $11^h 42' 53''$ , on ôtera une révolution, on trouvera  $11^h 4' 10''$  pour 1704, & ainsi de suite. Les quatre années de la table supposent qu'on parte d'une année bissextile & qu'on tombe sur année bissextile, en passant trois années communes; mais à cause de la réforme Grégorienne du calendrier, l'année 1700 étoit commune, donc les conjonctions ont retardé en 1701 d'un jour de plus, ou de  $11^h 40' 1''$ ; il faudroit donc ajouter un jour, mais nous l'ôtons des époques des bissextiles, afin qu'en ajoutant

un jour dans les deux premiers mois tout soit compensé (1326).

Si l'on part d'une année biffextile, par exemple, de 1760 à laquelle répond oi 10<sup>h</sup> 44' 20", on y ajoutera pour 4 années oi 21<sup>h</sup> 42' 53", & l'on aura pour 1764, 11<sup>h</sup> 27' 13"; il n'y a point ici de jour à ôter, puisque l'on part d'une année biffextile où le jour étoit déjà retranché.

2976. Ainsi pour prolonger la table des époques, il faut prendre le nombre ou l'époque d'une année biffextile, y ajouter 11<sup>h</sup> 40' 1", ôter une révolution si elle s'y trouve, & l'on aura l'époque de l'année commune suivante; il en est de même pour la seconde & la troisième, mais pour la quatrième année, on ajoutera seulement 8<sup>h</sup> 40' 1", parce qu'elle est biffextile, & qu'on diminue les époques d'un jour dans les années biffextiles. Tout le reste va dans le même ordre; à chaque fois on retranche une révolution quand elle s'y trouve de trop, avec les argumens correspondans à une révolution. Si l'on prenoit pour époque une année commune, il ne faudroit pas se servir de la table des révolutions pour les années, par exemple, si à la conjonction de 1775 qui est oi 3<sup>h</sup> 58' 39", on ajoutoit, pour cinq ans, oi 11<sup>h</sup> 54' 18", on n'auroit point la conjonction de 1780, il faudroit en ôter un jour. De même lorsque de 4 en 4 ans l'on est parvenu à une centième année qui comme l'année 1800 est commune au lieu d'être biffextile (1547), on ajoute un jour à la somme, ou au changement séculaire des conjonctions, sans rien changer aux argumens; à moins qu'on ne soit obligé d'ôter une révolution de la somme, parce que ce jour ajouté est aussi-tôt rétabli par l'addition d'un jour, dans les moyens mouvemens des années biffextiles. Si l'on prenoit un nombre d'années terminé par une biffextile, mais qu'on s'en servît pour un intervalle de temps, dans lequel il y eût une année séculaire commune, comme 1800, il faudroit aussi mettre un jour de plus à l'époque, sans changer les argumens *A*, *B*, *C*, à moins qu'on ne fût obligé après avoir ajouté un jour d'ôter une révolution entière, dans ce

## 284 ASTRONOMIE, Liv. XVIII.

cas, il faut toujours ôter les argumens correspondans à une révolution, parce que ce jour d'addition n'est plus une simple notation des tables, lorsqu'il nous transporte à une révolution différente.

2977. Il nous reste à expliquer la manière de trouver la première conjonction pour une certaine année (2913), & d'en conclure toutes les autres : il faut partir d'une observation ; je choisis celle du premier satellite, dont l'émerfion fut observée le 2 Janvier 1764, à  $10^h 23'$  du soir, temps vrai réduit au méridien de Paris, ou  $10^h 27' 38''$  de temps moyen. Comme l'on veut que l'équation du temps soit toujours additive, il faut ôter  $14' 42''$  qui est la plus grande équation du temps soustractive, & l'on aura  $10^h 12' 56''$  pour le temps moyen de l'observation, compté à la manière de nos tables.

Il en faut ôter la demi-durée de l'éclipse qui calculée par les méthodes ci-dessus (2940), étoit  $1^h 4' 51''$ , la distance au nœud étant de  $50^{\circ} 17'$ , le demi-diamètre de l'ombre  $1^h 7' 55''$ , & l'inclinaison  $3^{\circ} 18' \frac{1}{2}$  ; il reste pour le temps moyen du milieu de l'éclipse  $9^h 8' 5''$ , d'où il faut déduire la conjonction moyenne en y appliquant toutes les équations qui avoient lieu ce jour-là. L'anomalie moyenne de Jupiter étant alors de  $7^s 28^{\circ} \frac{1}{2}$  environ, l'équation de son orbite étoit de  $4^{\circ} 51' \frac{1}{2}$  additive, & convertie en temps à raison du mouvement du premier satellite, elle donne  $34' 39''$  à ôter de la conjonction.

2978. La même anomalie de Jupiter nous apprend que la distance de Jupiter au soleil étoit de 5079, & qu'elle surpassoit la moyenne 5101 de 122 ; c'est ce que la lumière parcourt en  $58'' \frac{1}{2}$ , à raison de  $8' 8''$  pour 1000 (2806), ainsi il faut ajouter  $58'' \frac{1}{2}$  ; mais il y a  $2' 2'' \frac{1}{2}$  à ôter pour la plus grande équation de la lumière provenant de cette cause-là, afin que l'équation soit toujours additive ; ainsi nous ôterons  $1' 4''$  de la conjonction observée.

La distance de Jupiter à son opposition étoit alors de  $\frac{77}{1000}$  du cercle ; ainsi la grande équation de la lumière

étoit de  $7' 0'' \frac{1}{2}$  additive, mais la plus grande est  $8' 7'' \frac{1}{2}$  qu'il faut ôter de toutes les époques, ainsi, il reste  $1' 7''$  à ôter de l'époque trouvée par observation.

L'équation *C* particulière au premier satellite, & qui est de  $3' 30''$  (2900) avoit été à son maximum le 10 Février 1763, elle recommence tous les 437 jours, elle se trouvoit alors de  $0' 27''$ , additive à la conjonction observée pour avoir la moyenne; mais il faut ôter les  $3' 30''$ , c'est-à-dire, la plus grande équation, il restera donc  $3' 3''$  à ôter encore de la conjonction observée pour avoir la moyenne comptée à la manière de nos tables. Il faut faire la même opération sur les petites équations qui viennent des inégalités de Jupiter, & qui montent à  $32''$  pour ce jour-là (*pag.* 172 des tables); enfin l'on ôtera  $17''$  pour la différence entre le milieu de l'éclipse & la conjonction que nous voulons en conclure (2911), toutes ces soustractions étant faites, il reste  $21^h 8^h 27' 23''$ ; mais comme dans les années bissextiles on écrit un jour de moins (2974), on aura  $11^h 8^h 27' 23''$  pour la première conjonction, ou pour l'époque des conjonctions de 1764, elle diffère de  $10''$  de celle qui est employée effectivement dans les tables, parce qu'elles n'ont pas été faites précisément sur cette observation. Dans la table des éléments, art. 2972, les époques des quatre satellites ne sont diminuées que de la somme des petites équations; l'équation *A* reste soustractive dans le premier demi-cercle d'anomalie (2913). Toutes ces équations nécessaires pour réduire une observation en conjonction moyenne se prennent dans les tables des satellites, dont jusqu'ici nous avons expliqué la construction.

### De la grosseur des Satellites.

2979. JE ne crois pas que personne puisse voir les satellites de Jupiter à la vue simple, quoiqu'ils paroissent dans nos lunettes avoir à peu-près autant de lumière que des étoiles fixes de 6<sup>e</sup> grandeur vues dans les mêmes lunettes; la lumière de Jupiter, dont ils sont toujours très-

On ne peut  
voir les satel-  
lites sans lun-  
nettes.

proches & qui est très-vive, empêche qu'on ne puisse les apercevoir; ainsi qu'on ne sauroit voir les étoiles de 6<sup>e</sup> grandeur dans le temps de la pleine lune. Il suffit pour voir les satellites de Jupiter d'y employer une lunette de deux pieds; mais pour les voir bien distinctement & pour les observer on est obligé d'y employer des lunettes ordinaires de 15 pieds, ou des télescopes de 2 pieds de foyer; c'est ce qui se pratique généralement pour l'observation de leurs éclipses.

Dans les meilleurs télescopes, les satellites paroissent trop petits pour pouvoir être mesurés avec le micromètre; ce n'est guères que par le temps qu'ils employent à entrer dans l'ombre de Jupiter qu'on peut faire quelque conjecture sur leur véritable diamètre; mais le diamètre conclu de cette manière est évidemment trop petit, parce que nous ne pouvons observer le premier moment de l'immersion; & parce que nous perdons de vue le satellite avant qu'il soit tout-à-fait dans l'ombre.

Gros-  
seur  
des satellites.

M. Maraldi ayant examiné & calculé trois observations de M. Cassini, faites en 1655, trouve que le premier satellite avoit employé 7' à entrer sur le disque de Jupiter, & qu'il y avoit demeuré 2<sup>h</sup> 27', que le 2<sup>e</sup> avoit employé 9' 40'', & avoit demeuré sur le disque 3<sup>h</sup> 4' 20''; pour le 3<sup>e</sup> il trouve 12' 6'' & 3<sup>h</sup> 43' 38''. A l'égard du 4<sup>e</sup> M. Maraldi concluoit des tables qu'il devoit employer 15' à entrer, & demeuré 5<sup>h</sup> 0' sur le disque; par-là le diamètre du troisième satellite se trouve  $\frac{1}{18}$  de celui de Jupiter, & les trois autres  $\frac{1}{15}$  (*Mém. acad.* 1734, pag. 364). Ainsi leurs diamètres sont environ la moitié de celui de la terre. M. Whiston a trouvé des résultats fort différens, en employant la durée de leurs immersions, (*The longitude discovered by the Jupiter's planets*, London 1738, pag. 7); selon lui le 3<sup>e</sup> satellite est le plus grand de tous, & il est à peu-près de la grosseur de la terre; le premier est le plus approchant du troisième, quoique plus petit; M. Whiston le juge un peu plus gros que Mars. Le second satellite est un peu plus petit que le premier, & paroît n'être guères plus grand que Mercure. Le 4<sup>e</sup>, suivant M. Whiston,

eſt le moindre de tous , & n'eſt guères plus grand que la lune. Je parlerai ci-après des différences qu'on remarque dans ces grandeurs apparentes ( 2985 ) ; on verra que M. Caſſini regardoit le 4<sup>e</sup> comme le plus grand des quatre ſatellites.

2980. Par les obſervations de M. Lym , rapportées dans les tranſactions philoſophiques ( n<sup>o</sup>. 393 , 394 , 396 , 401 , 402 , 440 , depuis 1725 , juſqu'à 1736 ) , M. Whifton trouve que le premier ſatellite emploie 1' 10" , le ſecond 2' 20" , le 3<sup>e</sup> 3' 40" , le 4<sup>e</sup> 5' 30" à entrer dans l'ombre de Jupiter , lorsqu'ils y entrent perpendiculairement ; ( voyez auſſi les *Mém. de 1734* ). Delà il ſeroit aisé de conclure leurs diamètres apparens vus du centre de Jupiter ; par exemple , le 4<sup>e</sup> ſatellite en 5' 30" de temps parcourt 6' 7" de ſon orbite ; ainſi ſon diamètre fait environ un angle de 6' vu du centre de Jupiter ; or , la diſtance 25 , 3 multipliée par le ſinus de 3' 3" donne  $\frac{1}{4}$  ; ainſi le diamètre du 4<sup>e</sup> ſatellite n'eſt que  $\frac{1}{4}$  de celui de Jupiter , ce qui ne fait que le quart de celui de la terre. M. Warrentin m'écrivoit en 1767 , qu'il avoit comparé les ombres des ſatellites ſur Jupiter , & qu'il avoit trouvé le 3<sup>e</sup> & le 4<sup>e</sup> 5 à 6 fois plus larges que le premier , & le ſecond deux fois moindre que le premier.

Temps qu'ils  
emploient à  
s'éclipſer.

Diamètre du  
quatrième.

2981. Les maſſes des ſatellites , c'eſt-à-dire , leurs quantités de matière où leurs forces attraſtives ſont encore plus difficiles à déterminer , parce qu'elles ſuppoſent la valeur des denſités connue. On détermine celles des planètes par l'action qu'elles exercent ſur leurs ſatellites ( 3403 ) , & celle de la lune par ſon effet ſur les marées ; celle des ſatellites ne peut ſe connoître que par les inégalités qui proviennent de leurs attraſtions réciproques , obſervées & comparées avec le calcul que donne la théorie.

La maſſe du premier étant ſuppoſée égale à celle du 3<sup>e</sup> , M. de la Grange trouve par les inégalités , qui dans le ſecond ſatellite ſont l'effet des deux attraſtions , que ces maſſes ſont 0,00006869 ; ſuivant M. Bailly , elles ſont de 0,0000638 , celle de Jupiter étant priſe pour unité. Par le mouvement du nœud du ſecond , M. Bailly

## 288 ASTRONOMIE, Liv. XVIII.

trouve pour le premier 0,00004247. La masse du second satellite trouvée par une inégalité du premier, dont il est à peu-près la seule cause, est 0,0000211, suivant M. Bailly, & 0,00002417, suivant M. de la Grange.

La masse du 3<sup>e</sup> déterminée par l'effet qu'il a conjointement avec le premier sur le mouvement du nœud du second, se trouve, suivant M. Bailly, 0,00007614; & par l'effet qu'il produit dans l'inégalité du second, en le supposant égal au premier, qui y contribue aussi, il trouve 0,0000638, & M. la Grange 0,0000687.

La masse du 4<sup>e</sup> est la plus difficile à déterminer, parce qu'il paroît que son action sur le 3<sup>e</sup> est peu sensible; mais par la comparaison d'un grand nombre d'observations; M. Bailly trouve qu'elle peut être environ 0,00005; (*Mém. acad.* 1766).

2982. Les temps que les satellites employent à s'éclipser deviennent beaucoup plus considérables quand les éclipses se font loin des nœuds, c'est alors que les observations sont les plus incertaines, sur-tout quand il s'agit du 4<sup>e</sup> satellite. Lorsqu'il arrive des éclipses où le 4<sup>e</sup> satellite parcourt dans l'ombre une ligne *MN* (*fig.* 256), telle que la distance *MO* approche beaucoup du demi-diamètre du satellite, la corde *Mf* qui marque la demi-duree du centre du satellite diffère beaucoup de la corde *Ma* qui marque la demi-durée de l'éclipse totale, & de *Mc* qui marque la durée de l'éclipse, à compter du milieu *M* jusqu'au dernier contact du satellite; la ligne *ac* répond au temps que le satellite emploie à entrer ou à sortir; & comme nous ne savons point quelle partie du disque du satellite doit être sortie de l'ombre pour que nous commençons à l'apercevoir, nous pouvons nous tromper de beaucoup sur la valeur de la corde *Mf* conclue de l'observation, & sur l'inclinaison qu'on en déduit.

Différences  
des lunettes.

2983. Cette difficulté est encore augmentée par la différence des lunettes, qui produit sur les observations une différence énorme. L'immersion du 4<sup>e</sup> satellite observée le 25 Janvier 1762, parut à 6<sup>h</sup> 16'<sup>1</sup>/<sub>2</sub> avec une bonne lunette de 15 pieds dont M. Maraldi se servoit, & à 6<sup>h</sup> 29' avec



avec un télescope Grégorien de 30 pouces de foyer dont se servoit M. Messier ; cette observation étoit très-difficile à faire , car le satellite mettoit plus de 30' à perdre sa lumière.

Le 3<sup>e</sup> satellite disparut le 25 Janvier 1763 à 5<sup>h</sup> 38' 49" avec un télescope Newtonien de 4 pieds & demi , d'une bonté médiocre , & il ne disparut qu'à 5<sup>h</sup> 41' 39" , c'est-à-dire, 2' 50" plus tard avec un excellent télescope Grégorien de 30 pouces de foyer , ( V. les *Mém. présentés*, tom. V, pag. 616 ), le satellite étoit alors dans ses limites , & il employoit plus d'un quart-d'heure à perdre sa lumière ; voyez sur ces différences l'art. 2494 ; ainsi l'on ne doit pas essayer , ce me semble , de calculer l'effet des lunettes quand il s'agit du 4<sup>e</sup> satellite ; pour ce qui est du premier satellite , j'ai parlé ailleurs de l'effet que produit ordinairement la différence des lunettes ( 2494 ).

2984. M. de Fouchy remarqua, (*Mém. de l'acad.* 1732 ), qu'il devoit y avoir une inégalité optique dans les éclipses des satellites , à raison des distances ; car la lumière des satellites étant moindre quand ils sont plus éloignés du soleil ou de la terre , ils dispa roissent plutôt & reparoissent plus tard : M. de Fouchy propose pour en éviter l'effet , de se servir , autant qu'on le pourra , des conjonctions inférieures des satellites sur le disque de Jupiter pour en déduire leurs mouvemens. M. de Barros a aussi observé que l'opacité de l'atmosphère à différentes hauteurs devoit influer dans ces observations , de même que la proximité des satellites par rapport à Jupiter , & il a rapporté des expériences qui peuvent servir à introduire cet élément dans le calcul , ( *Mémoires de Berlin* 1755 ; pag. 362 ). Ces équations sont peut-être assez considérables pour causer la discordance qu'on observe souvent entre des observations peu éloignées ( 2971 ).

2985. On observe aussi les satellites lorsqu'ils dispa roissent étant cachés par le disque de Jupiter , & lorsqu'ils passent sur ce même disque dans la partie inférieure de leur orbite , parce qu'ils jettent alors des ombres ou taches noires , dont on observe le mouvement , égal à

Différences  
des distances.

Passage des  
satellites sur le  
disque de Ju-  
piter.

celui des fatellites qui les produisent, (*Phil. transf. n° 1* ; 359) ; M. Cassini fut le premier qui en 1664 observa ces sortes de taches. Lorsque Jupiter est à l'occident du soleil elles doivent paroître sur la planète avant le fatellite lui-même ; on y distingue aussi quelquefois le fatellite sous la forme d'une petite tache, plus petite que n'est son ombre lorsqu'on l'y apperçoit.

Rotation des  
fatellites.

M. Cassini le fils (*Elém. d'astron. pag. 622*), conclut en partie de-là que les fatellites ont un mouvement de rotation sur eux-mêmes, aussi bien que les planètes ; en effet puisque les taches obscures qui rendent quelquefois le fatellite visible sur le disque même de Jupiter, ne s'y rencontrent pas toujours, il faut qu'elles soient tantôt dans l'hémisphère visible du fatellite, tantôt dans l'hémisphère opposé ; de-là vient aussi que le 4<sup>e</sup> fatellite paroît souvent plus petit que les autres (2979), quoiqu'il soit plus grand que les deux premiers au jugement de M. Cassini, & que son ombre soit toujours plus grande que la leur. Le troisième sur-tout paroît ordinairement le plus grand de tous & quelquefois on le voit égal aux deux premiers, suivant que les grandes taches obscures qui occupent une partie de la surface, sont tournées vers nous, ou du côté opposé, (*Voy. les Mém. ac. 1707, 1712, 1714 & 1734, pag. 366. M. Duhamel & M. Godin, Hist. de l'acad. à l'année 1694. Anciens Mémoires, T. II, pag. 226*).

M. Pound observant en 1719 les fatellites de Jupiter sur le disque de cette planète, remarqua qu'ils étoient beaucoup plus lumineux dans des temps que dans d'autres ; il en conclut aussi que les fatellites tournent sur leur axe, & qu'il y a des parties de leur surface qui réfléchissent très-peu les rayons du soleil, (*Phil. transf. n° 359, Abrégé IV. 308*).

C'est peut-être pour cette raison que le 3<sup>e</sup> fatellite, paroît quelquefois employer dix minutes à entrer dans Jupiter, ou à en sortir, & d'autres fois 6' seulement, quoique la diversité des lunettes, sa latitude plus ou moins grande, & son mouvement plus ou moins rapide ne puissent pas produire une si grande différence, on est confirmé

dans cette opinion par le 5<sup>e</sup> satellite de Saturne qui non-seulement diminue, mais dispaçoit totalement dans la partie orientale de son orbite (2994).

2986. Les passages de l'ombre des satellites sur le disque de Jupiter se calculent à peu-près comme leurs éclipses; car quand le satellite est dans sa conjonction inférieure vue du soleil, son ombre répond au centre de Jupiter, à moins que la latitude du satellite ne lui fasse décrire une corde au lieu d'un diamètre (2928). Cependant ces passages sont sujets à l'effet de la parallaxe annuelle; car quand le satellite est en conjonction au point *H* de son orbite (*fig.* 244) son ombre est en *A* sur le disque de Jupiter, mais il faut que le satellite arrive en *M* pour que son ombre paroisse en *L* sur la ligne menée de la terre *T* au centre *I* de Jupiter; l'arc *MH* est à l'arc *LA*, comme *IA* est à *IH*. Le 1 Mars 1765, la conjonction héliocentrique du 4<sup>e</sup> satellite n'a dû arriver, suivant la remarque de M. Maraldi, que 25' après que M. Wargentin eût vu l'ombre de ce satellite au milieu du disque de Jupiter; car la parallaxe annuelle *AL* étoit de 9° 33' 35", or *IA* est à *IH*, ou 76 est à 3, comme le sinus de cet arc est à celui de *HM* = 22' 32", que le 4<sup>e</sup> satellite parcourt en 25' 9" de temps.

Le passage du satellite sur le disque de Jupiter n'arrive que quand il est au point *N* de son orbite, après avoir parcouru un arc *HN* égal à la parallaxe annuelle; & il suffit pour le calculer d'ajouter ou de retrancher l'effet de cette parallaxe. Cependant la corde décrite sur le disque de Jupiter dépend non-seulement de sa latitude, mais aussi un peu de l'élévation de notre œil au-dessus du plan de l'orbite de Jupiter, ou de la latitude de la terre vue de Jupiter, dont nous avons parlé (2949). La durée du passage d'un satellite est aussi un peu plus grande que celle des éclipses; M. Whiston ajoute 6' pour le premier, 7' pour le second, 8' pour les deux autres, ce qu'il attribue à la pénombre & en partie à la réfraction produite dans l'atmosphère de Jupiter, qui rétrécit le cône d'ombre. (*The long. discov. pag.* 4 & 18). Nous avons

vu un exemple de cette différence entre Jupiter & son ombre ( 2919 ).

*DES CONFIGURATIONS DES SATELLITES,  
& de l'effet des Parallaxes annuelles.*

2987. POUR distinguer les satellites de Jupiter l'un de l'autre dans différentes positions, & sur-tout pour observer les satellites de Saturne, qui se voyent si difficilement, il est nécessaire d'avoir leur situation apparente vue de la terre par rapport à la planète principale. M. de Peiresec avoit eu l'idée de représenter graphiquement, c'est-à-dire, par des figures, les éclipses des satellites de Jupiter, (*Cassendi in vita Peir.*) ; M. Cassini y trouva aussi une très-grande commodité, & il se forma un instrument composé de cercles mobiles de carton ; M. Weidler en a donné la description & l'usage, d'après celui que M. Maraldi lui communiqua dans un voyage qu'il fit à Paris. (*Explicatio Jovilabii Cassiniani 1727, in-4°. Wutemberg.*)

Flamsteed forma aussi un instrument en 1685, pour trouver en tout temps la situation des satellites, & leurs configurations (*Phil. transf. n°. 178*), M. Whiston, en décrit un dans l'ouvrage que j'ai cité ( 2979 ) ; j'ai moi-même donné la construction & l'usage de celui de M. Cassini, dans mon *Exposition du calcul astronomique*, pag. 79 ; j'en rapporte ici la figure, ainsi que d'un instrument semblable pour les satellites de Saturne, & j'en expliquerai l'usage en peu de mots.

Cercles qui  
représentent  
les orbites.

Pl. XXXIV.  
Fig. 260.

On voit d'abord dans la fig. 260, l'écliptique divisée en 12 signes ; une alidade transparente, que l'on fait ordinairement de corne, & qui est représentée par *ACB* tourne autour du centre *C* ; elle se place sur le point *A*, où répond la longitude géocentrique de Jupiter, connue par une éphéméride, & s'arrête au moyen d'une pince marquée en *D*. La figure suppose la longitude de Jupiter  $9^{\circ} 22'$  pour le 1 Mai 1759. Les quatre cercles intérieurs sont des cercles de carton qui doivent être mobiles au-

tour du centre *C* ; ils représentent les orbites des quatre satellites, divisées en jours, par les tables des moyens mouvemens, (art. 2972 ; *tables de M. Cassini ; Exp. du cal. pag. 243*). On calcule par ces mêmes tables la longitude jovicentrique de chacun des quatre satellites pour le premier jour du mois ; on trouve, par exemple, pour le 1 Mai 1759, les longitudes suivantes,  $0^s 24^o$  pour le 4<sup>e</sup> satellite,  $2^s 25^o$  pour le 3<sup>e</sup>,  $3^s 11^o$  pour le second,  $10^s 13^o$  pour le premier ; on place le chiffre 1 de chaque cercle vis-à-vis de cette longitude calculée ; le chiffre 1 de l'orbite du 4<sup>e</sup> satellite répond à  $0^s 24^o$ , &c. alors la situation du point 1 par rapport à l'alidade *ACB*, fait voir la situation apparente de chaque satellite par rapport à Jupiter, le premier du mois, pour un observateur qui est situé sur le prolongement de l'alidade *ACB* toujours dirigée vers la terre. La situation des points marqués 2 sur chacune des quatre orbites, fait voir la position des 4 satellites, le 2 à pareille heure ; il en est de même à tous les autres jours du mois. Par ce moyen l'on formera la configuration des quatre satellites telle qu'on la voit sur la ligne *EF* au bas de la figure 260 ou Jupiter est supposé en *I* ; le point 4 de l'orbite du troisième satellite étant de 8 lignes à la droite de l'alidade *AB* m'apprend que je dois placer le troisième satellite, de 8 lignes à gauche de Jupiter, sur la ligne des bandes *EF* (3222), & ainsi des autres ; l'on figurera ainsi Jupiter accompagné de ses quatre satellites, tel qu'il paroît dans une lunette de 15 pieds, qui renverse les objets. Les cercles sont disposés pour une figure redressée.

*Fig. 260.*

Les satellites 1 & 3 sont au-dessus de la ligne des bandes, parce que à cause de l'inclinaison des orbites, les satellites paroissent un peu vers le nord dans un des demi-cercles de leurs révolutions ; tant que le satellite est entre  $10^s 15^o$ , &  $4^s 15^o$  de longitude, ou au-dessus de la ligne des nœuds *NN*, il paroît toujours un peu plus septentrional que l'orbite de Jupiter, & cela d'autant plus qu'il est plus éloigné des points *N*.

Latitudes  
des satellites.

Le chiffre qui indique le satellite, se met entre Ju-

Fig. 260.

piler & le point qui marque la place du fatellite, quand on voit sur le jovilabe que le fatellite se rapproche de Jupiter, comme dans la figure; au contraire on met le chiffre au-delà du point quand le fatellite s'éloigne de Jupiter. On peut voir de semblables configurations pour tous les jours, dans la connoissance des temps de chaque année, dans les éphémérides du P. Hell, & dans le *Nautical almanach* de Londres.

Raison de  
cette opéra-  
tion.

On comprendra la raison de l'opération précédente en considérant que la ligne  $CA$  marque le rayon qui va de notre œil au centre de Jupiter; la ligne  $CB$  marque le rayon qui va de Jupiter à la terre; ainsi les fatellites nous paroîtront plus ou moins éloignés de Jupiter, suivant qu'ils seront plus ou moins éloignés de l'alidade  $BCA$  sur laquelle nous voyons toujours le centre de Jupiter, il n'importe point qu'ils soient plus ou moins avancés le long de cette ligne  $CA$ , il ne s'agit que de leur distance à l'alidade. On marque dans les configurations les temps où chaque fatellite paroît sur le disque de Jupiter, où se trouve caché derrière le disque; cela est facile, parce que la largeur de l'alidade est égale à celle de Jupiter lui-même, ainsi quand le point est sous l'alidade, on juge que le fatellite est derrière Jupiter, ou qu'il est sur son disque.

On y marque aussi les temps où le fatellite est dans l'ombre; pour cet effet, il faut tendre un fil du centre  $C$  à la circonférence de l'écliptique; mais sur un point différent du point  $A$ , de la quantité de la parallaxe annuelle, & à gauche si Jupiter a passé l'opposition; ce fil représentera l'axe du cône d'ombre qui est sur la ligne menée du soleil à Jupiter, & on lui supposera la même largeur qu'à l'alidade  $AB$ .

Si l'on connoît l'heure du passage de Jupiter au méridien, on trouvera à très-peu-près la situation de cette ombre par le moyen du petit demi-cercle, où j'ai marqué l'effet de la parallaxe annuelle. Les heures du passage, à gauche sont pour le soir, dans une figure redressée. Je suppose que Jupiter passe au méridien à 2 heures ou à

10 heures, du matin, on abaissera du point marqué 2 & 10 une perpendiculaire sur le diamètre  $PO R$ , la distance  $OS$  du centre à la perpendiculaire marquera la quantité dont l'axe de l'ombre est à droite de l'alidade  $AC$  sur la circonférence extérieure  $AV$  de l'écliptique.

La grandeur de la ligne  $EF$  sur laquelle j'ai figuré les quatre satellites, au bas de la planche XXXIV, paroîtroit plus considérable si l'on se servoit d'un plus fort télescope; il y a même des personnes qui dans une lunette estiment les distances beaucoup plus grandes que moi, & jugent la plus grande distance du 4<sup>e</sup> satellite de trois pouces, tandis que je l'estime d'un pouce & demi; mais cela est indifférent; il suffit que dans la configuration qui est au bas de la planche XXXIV, toutes les parties soient bien proportionnées.

Il y a dans la planche XXXV un semblable instrument pour les configurations des satellites de Saturne, dont nous parlerons ci-après (2994).

2988. Le temps où il importe le plus de connoître la situation apparente des satellites, est celui des immersions & des émerisions; c'est pourquoi je vais parler séparément des effets de la parallaxe annuelle sur la situation des satellites au temps des éclipses. On peut voir des tables à ce sujet, données par Flamsteed (*Philos. trans.* 1686, n°. 184), & par Whiston (*The longitude discovered*, &c.); mais je trouve que cet effet peut se représenter par une simple figure avec une précision suffisante pour l'usage des observateurs.

Effet de la  
parallaxe an-  
nuelle.

Soit  $I$ , le centre de Jupiter (*fig.* 258), environné des orbes de ses quatre satellites;  $IG$  la ligne des syzygies ou l'axe du cône d'ombre;  $GE$  un arc de  $11^\circ$ , pris sur la circonférence de l'orbite du 4<sup>e</sup> satellite; cet arc étant égal à la plus grande parallaxe annuelle de Jupiter, dans ses moyennes distances, la ligne  $IE$  marquera la direction du rayon visuel de la terre quand Jupiter est dans sa quadrature, entre l'opposition & la conjonction, passant au méridien à 6 heures du soir; car alors nous voyons Jupiter  $11^\circ$  à l'occident de son vrai lieu héliocentrique,

*Fig.* 252.

*fig. 258.* marqué par la ligne  $IG$ . Si par les points  $G, F, g, f$ , sur lesquels se trouvent les satellites en conjonction, on tire des parallèles à la ligne  $IE$ , telles que  $GD, FC, gB, fA$ , l'on aura les 4 points,  $A, B, C, D$ , où les satellites doivent paroître à côté de Jupiter, au moment de leur conjonction héliocentrique; c'est sur la droite de Jupiter, après l'opposition dans une lunette qui renverse, de même que dans la figure 258.

Dans les autres temps de l'année & lorsque la parallaxe annuelle sera moindre que  $11^{\circ}$ , on trouvera la position du rayon visuel  $IE$ , qui est la ligne des conjonctions géocentriques, en décrivant sur l'arc  $EG$  comme rayon, un demi-cercle, divisé en degrés, ou en heures; on prendra  $30^{\circ}$  en partant du point  $E$  de 6 heures, l'on y marquera  $4^h$  &  $8^h$ , parce que Jupiter étant éloigné de  $30^{\circ}$  de sa quadrature, passe au méridien environ à  $8^h$  du soir, où à  $4^h$  du soir; & l'on tirera vers ce point de  $4^h$  la ligne telle que  $IE$ ; il est plus commode pour les astronomes d'avoir ce demi-cercle divisé en temps que de l'avoir en degrés, parce que le temps du passage au méridien se trouve calculé dans les éphémérides, & que les astronomes en font un usage continuel.

Lorsque Jupiter, après la conjonction passe au méridien le matin, c'est du côté droit ou dans la partie orientale qu'on doit tirer la ligne  $IE$  de la conjonction géocentrique; & les satellites nous paroîtront à gauche ou à l'occident de Jupiter dans le temps de leurs conjonctions héliocentriques.

Situations  
au temps des  
éclipses.

2989. On trouvera par le moyen de cette figure la distance des satellites en émerison, en prenant du côté de l'orient, c'est-à-dire, à droite des points  $A, B, C, D$ , une quantité égale au demi-diamètre de l'ombre, qui est à peu-près égal au demi-diamètre  $IH$  de Jupiter, & l'on aura la distance des satellites par rapport au bord de Jupiter, pour le temps de leurs émerisions; ou bien l'on examinera la distance  $IA$  d'un satellite au centre de Jupiter, pour le temps de la conjonction, & ce sera sa distance au bord occidental  $H$ , pour le temps de l'im-  
merison,



merfion, & au bord oriental  $X$ , pour le temps de l'émerfion. Ces diftances au bord  $X$  font rapportées fur la figure 259, elles font de  $\frac{6}{10}$ ,  $\frac{8}{10}$ ,  $1\frac{1}{2}$ , &  $2\frac{1}{2}$  diamètres de Jupiter, dans les émerfions qui arrivent au temps des quadratures. Dans les autres temps ces diftances diminuent comme les finus des diftances à la conjonction ou à l'opposition; enforte qu'elles font réduites à moitié quand Jupiter paffe au méridien à  $3^h$  ou à  $9^h$ .

Fig. 258.

La même figure fert à trouver l'effet de la parallaxe annuelle en minutes, que nous avons fupposé à peu-près connu (2950). Il fuffit de divifer l'arc  $GE$  qui exprime la plus grande parallaxe de  $11^\circ$  en  $660'$ ; quand on faura l'heure du paffage de Jupiter au méridien, par exemple  $2^h$ , on prendra la diftance du point marqué  $2^h$ , à la ligne  $GI$ , ou la valeur de la perpendiculaire fur  $GI$ , ce fera la parallaxe annuelle exprimée en minutes; parce que la parallaxe ayant pour bafe le finus de l'arc de l'orbite terreftre qui exprime la diftance de la terre à la conjonction, elle varie comme les perpendiculaires dont nous venons de parler.

Quantité de la parallaxe.

2990. Dans la conftruction de la fig. 258, je n'ai point eu égard aux latitudes des fatellites, & je les ai rapportés fur une ligne  $ID$  qui traverse le centre de Jupiter parallèlement à fon orbite, & dans la direction des bandes (3222), ou de l'équateur de Jupiter, qui ne diffère pas fenfiblement de la direction des 4 orbites; c'est le cas qui a lieu quand Jupiter eft vers  $4^s\frac{1}{2}$  &  $10^s\frac{1}{2}$  de longitude; mais entre  $4^s\frac{1}{2}$  &  $10^s\frac{1}{2}$  de longitude, les fatellites en conjonction paroiffent au midi du diamètre de Jupiter ou de la ligne des bandes, à laquelle nous les avons rapportés, c'est-à-dire, en haut dans la figure renverfée; au contraire entre  $10^s\frac{1}{2}$  &  $4^s\frac{1}{2}$  ils paroiffent au nord ou au-deffous de la ligne des bandes vers le temps de leurs conjonctions fupérieures; la quantité eft la plus confidérable quand Jupiter approche de  $1^s\frac{1}{2}$  ou  $7^s\frac{1}{2}$  de longitude; c'est alors que la latitude des fatellites eft la plus grande; j'en ai marqué l'effet au-deffous des nombres 1, 2, 3, 4, (fig. 259), en fupposant l'inclinaifon moyen-

Situation des fatellites en latitude.

Fig. 259.

## 298 ASTRONOMIE, LIV. XVIII.

*fig. 259.* ne de  $3^{\circ}$ , & les fatellites seront aux points  $p, q, r, s$ , au lieu d'être aux points 1, 2, 3, 4 au temps de leurs émersions, s'ils sont vers  $1^{\text{st}} \frac{1}{2}$  de longitude vus du centre de Jupiter; ou ce qui revient presque au même, si la longitude de Jupiter est à peu-près à  $1^{\text{st}} \frac{1}{2}$ ; ils seroient au-dessus si Jupiter étoit à  $7^{\text{st}} \frac{1}{2}$ .

299 I. Pour voir à peu-près sur la figure 258 cette latitude des fatellites en tout autre temps, on prendra sur l'orbe du 4<sup>e</sup>, un arc  $MN$  égal à  $3^{\circ}$ , inclinaison moyenne entre celles des 4 fatellites; on décrira un cercle  $MKL$ , on le divisera en signes & degrés, marquant en  $K$  le lieu du nœud  $10^{\text{st}} \frac{1}{2}$  &  $4^{\text{st}} \frac{1}{2}$ ; en  $L$   $1^{\text{st}} \frac{1}{2}$ ; & en  $M$   $7^{\text{st}} \frac{1}{2}$ ; on tirera du point  $I$  une ligne au sommet  $M$  du petit cercle; elle marquera en  $O$ , la plus grande latitude  $OP$ , que puisse avoir le 3<sup>e</sup> fatellite; en  $R$  la plus grande latitude  $RT$  du second, &c. ainsi l'on placera les fatellites sur la ligne  $MORI$  prolongée, au lieu de les placer sur la ligne  $NID$ ; si la conjonction arrive près de la limite, ce sera sur une ellipse dont  $MN$ ,  $OP$ , &c. soit le demi-petit axe.

Pour d'autres situations des fatellites, on marque sur le petit cercle  $MKL$ , la longitude, par exemple, du 3<sup>e</sup> fatellite vue du centre de Jupiter, pour un jour donné, qu'il est aisé d'avoir par les cercles de la *fig. 260* (2987); on tire la ligne  $IM$  au point de cette longitude; elle indique la latitude  $OP$  du troisième fatellite en conjonction (pour le temps où il avoit la longitude donnée); c'est sa distance au-dessus ou au-dessous de la ligne des bandes (3222). Il y auroit beaucoup de choses à dire sur les latitudes apparentes des fatellites, vues de la terre; mais cette matière n'est pas d'un usage assez fréquent pour devoir trouver place ici; au reste les principes que j'ai employés ailleurs (2949, 2962, 3234), peuvent s'appliquer à tous les cas.

## DES SATELLITES DE SATURNE.

2992. UNE grande partie des principes que j'ai établis en parlant des 4 satellites de Jupiter, doit s'appliquer aux 5 satellites de Saturne, avec cette différence qu'on n'a point le secours de leurs éclipses pour déterminer leur théorie. On les voit si difficilement que l'on n'a pas même encore déterminé leurs inégalités, quoiqu'elles paroissent considérables; M. Cassini soupçonnoit des inégalités de 6° dans le mouvement du 5<sup>e</sup> satellite (*Mém. acad.* 1716, pag. 217), mais ses tables, les meilleures que nous ayons, ne représentent que les mouvemens moyens. La table que l'on trouvera ci-après (2997), en contient tout le résultat, car il suffit de savoir quelle est la longitude vue de Jupiter, comptée sur l'orbite du satellite, pour une époque donnée, telle que 1760, avec le mouvement diurne du satellite, pour trouver sa longitude en tout temps, & pour former l'instrument de la fig. 261, qui fera trouver la situation apparente des satellites.

2993. M. Huygens, le 25 Mars 1655, observant Saturne avec des lunettes de 12 & de 23 pieds, aperçut le 4<sup>e</sup> satellite pour la première fois; c'est le plus gros de tous, & le seul qu'on puisse voir avec des lunettes ordinaires de 10 à 12 pieds; M. Cassini aperçut le cinquième sur la fin d'Octobre 1671, avec une lunette de 17 pieds; il vit ensuite le troisième avec des lunettes de 35 & 70 pieds, le 23 Décembre 1672, & il publia pour lors un petit ouvrage à ce sujet. Au mois de Mars 1684, il observa les deux intérieurs, c'est-à-dire, le premier & le second, avec des lunettes de Campani de 34, 47, 100 & 136 pieds, avec celles de Borelli de 40 & de 70, & avec celles d'Artonquelli qui étoient encore plus longues. (*Journal des sçav.* 15 Mars 1677 & 1686. *Phil. transf.* n°. 133, 154, 181. *Mém. acad.* 1714). L'on doutoit en Angleterre de l'existence des quatre satellites que M. Cassini avoit découverts; mais en 1718 M. Pound

Découverte  
des satellites  
de Saturne.

ayant élevé au-dessus du clocher de sa Paroisse (2796) l'excellent objectif de 123 pieds de foyer que M. Huygens avoit donné à la société Royale de Londres, il les observa tous les cinq; l'on fut assuré pour la première fois en Angleterre, que Saturne avoit réellement cinq satellites, comme M. Cassini l'avoit dit depuis long temps (*Philos. transf.* n°. 355. Abrégé IV, 322. *Act. erud. suppl.* T. VII.), & l'on vérifia les élémens de leur théorie, comme M. Cassini l'avoit fait à Paris en 1714. Dans le même temps M. Hadley, Vice-Président de la société Royale, ayant trouvé le moyen de faire d'excellens télescopes, à l'instigation de Newton, ce fut avec ces télescopes qu'on continua d'observer les satellites de Saturne. (*Philos. transf.* 1723, n°. 378. *Acta erud. feb.* 1730).

2994. Les satellites de Saturne sont si petits & si éloignés de nous qu'on ne peut les appercevoir qu'avec peine; il faut nécessairement avoir leur configuration, & pour cet effet, nous avons mis dans la planche XXXV, fig. 261, le modele d'un saturnilabe semblable à celui dont nous avons expliqué l'usage pour Jupiter (2987); mais il faut remarquer dans celui de Saturne, que le 5<sup>e</sup> satellite a réellement une distance double de celle qui est dans la figure; on a été obligé de s'écarter de la proportion pour celui-là, afin de ne pas rendre la figure trop grande pour ce volume, & même pour l'usage. On n'a marqué que 31 jours sur son orbite, parce qu'on suppose que les longitudes des satellites soient calculées pour le 1 de chaque mois par les tables. Pour le 4<sup>e</sup> satellite 5 jours & 21 jours répondent presque au même point, parce que tous les 16 jours il achève une révolution.

Le premier & le second satellite ne se voyent qu'à peine avec des lunettes ordinaires de 40 pieds, le troisième est un peu plus gros, quelquefois on l'apperçoit pendant tout le cours de sa révolution; le 4<sup>e</sup> est le plus gros de tous, aussi fut-il découvert le premier (2993). Le 5<sup>e</sup> surpasse les trois premiers quand il est vers sa digression occidentale, mais quelquefois il est très-petit,

& disparoît même entièrement (*Mém. acad.* 1714, 1757, pag. 94). M. Wargentin m'a assuré les avoir vu tous avec une lunette acromatique de dix pieds (2298).

2995. Les tables que nous avons des mouvemens de ces satellites, ne sont destinées qu'à pouvoir reconnoître les satellites, & profiter des circonstances favorables pour les observer d'une manière plus suivie. Huygens avoit donné en 1659, des tables du 4<sup>e</sup>, que M. Halley corrigea par quelques observations faites en 1682 & 1683, (*Phil. transf.* n°. 145). M. Cassini en publia en 1693, pour tous les satellites; mais les meilleures sont celles qui se trouvent dans les *Mém. de* 1716, elles furent dressées par M. Cassini le fils, sur les observations qu'il avoit faites en 1713 & 1714, avec un objectif de 114 pieds de foyer, comparées avec les observations de 1684, &c. 1703, &c. Ces mêmes tables ont été imprimées dans le volume des tables astronomiques de M. Cassini, en 1740 & dans celles de Halley, qui les préféra, par l'avis même de Bradley, à celles que Pound avoit données dans les transactions philosophiques (n°. 356), & qui se trouvent, du moins pour le 4<sup>e</sup> satellite, dans les *Instit. astronom.* pag. 304.

2996. On détermine les révolutions des satellites en comparant ensemble des observations faites lorsque Saturne est à peu-près dans le même lieu de son orbe (2882), & les satellites à même distance de la conjonction; on choisit aussi les temps où leurs ellipses sont les plus ouvertes, c'est-à-dire, où Saturne est à 90° de leurs nœuds, parce qu'alors la réduction est nulle, & le lieu du satellite sur son orbite est le même que son vrai lieu réduit à l'orbite de Saturne; c'est ainsi que M. Cassini a déterminé en 1714 leurs périodes vues de Saturne à l'égard de l'équinoxe, telles qu'on les voit dans la table ci-jointe. Il détermina aussi les époques de leurs longitudes, vues du centre de Saturne, & comptées le long des plans de leurs orbites,

Des tables  
de ces satelli-  
tes.

Satell.	Révol. périod.
I	1 <sup>d</sup> 21 <sup>h</sup> 18' 27"
II	2 17 44 22
III	4 12 25 12
IV	15 22 34 38
V	79 7 47 0

Epoques de  
leurs longitudes.

je les ai rapportées dans la table de l'article suivant, pour l'année 1760, afin qu'on puisse trouver aisément leur position en tout autre temps (1326), comme on les trouveroit par les tables détaillées, qui sont dans les mémoires de l'académie de 1716, ou dans le livre de M. Cassini; si l'on veut avoir ces positions avec exactitude, il faut les réduire au plan de l'orbite de Saturne, comme nous avons réduit les planètes au plan de l'écliptique (1130). L'argument de latitude se trouve en retranchant de la longitude du satellite vue de Saturne celle du nœud, qu'on verra ci-après (2998), c'est-à dire,  $5^s 4^o$  pour le  $5^e$ , &  $5^s 22^o$  pour les quatre autres. Le sinus de la dist. de Saturne au nœud, multiplié par le sinus de l'inclinaison, donnera le sinus de l'angle que fait l'orbite avec notre rayon visuel; & par conséquent la valeur du petit axe de l'ellipse que le satellite paroît décrire, le grand axe étant pris pour unité. Dans les six premiers signes de l'argument, la partie de l'orbite la plus éloignée de nous sera du côté du nord. On trouvera parmi les tables de M. Cassini, & celles de M. Halley, (édition de Londres), des tables de latitude & de réduction pour les satellites de Saturne. Nous négligeons ici la latitude de la terre, par rapport à l'orbite de Saturne, parce qu'elle n'excède guères un quart de degré; nous avons donné la manière dont on pourroit y avoir égard (2949, 2962, 3234).

Des distances  
à Saturne.

2997. On a employé plusieurs méthodes pour déterminer les distances des satellites au centre de Saturne: il est fort difficile de les voir avec Saturne dans le même champ de la lunette, pour mesurer leurs plus grandes digressions; d'ailleurs cette méthode ne peut guères servir que pour les deux premiers satellites. L'on emploie pour les autres l'intervalle de temps qui s'écoule entre le passage de Saturne & celui du satellite par un fil horaire placé au foyer d'un télescope. M. Cassini observa que la règle de Képler (1224) se vérifioit très-bien dans les cinq satellites, (*Mém. ac.* 1716, *p.* 218). M. Pound s'en servit pour trouver, par la distance du  $4^e$ , celles des autres satellites; il détermina, au moyen de l'objectif de 123 pieds, le plus

exactement & le plus souvent qu'il fût possible la distance du 4<sup>e</sup> au centre de Saturne dans ses plus grandes digressions, qu'il trouva de 8, 7 demi-diamètres de l'anneau (3227), & connoissant d'ailleurs (2996) la durée de leurs révolutions, il en conclut par la règle de Képler les distances des 4 autres, comme je vais les rapporter en demi-diamètres de l'anneau, & en demi-diam. de Saturne, (ceux-ci étant comme 7 est à 3). J'y joindrai ces mêmes distances, suiv. les observations de M. Cassini, en demi-diam. de l'anneau, & ensuite celles qu'il en a conclues par la loi de Képler, en supposant le diamètre de l'anneau de 45'' dans les moyennes distances de Saturne, & la distance du 4<sup>e</sup> de 4 diamètres de l'anneau, ou de 3'. (*Elem. d'astron.* pag. 642. *Tables de Halley*, édit. de Lond. *Phil. transf.* 1718, n<sup>o</sup>. 355. *Acta erud. suppl.* T. VII).

TABLE des longitudes &amp; des distances des Satellites de Saturne.

SAT.ELLITE.	Longit. en 1760, suiv. M. Cassini.	Mouvement diurne.	Mouvement pour 365 jours.	Dist. en demi-d. de l'Anneau suivant M. Bradley.	Dist. en demi-d. de Saturne, suivant M. Bradley.	Dist. en demi-d. de l'Anneau suivant M. Cassini.	Dist. en min. & sec. déduites de celle du quatrième.
I.	115 5° 41'	65 10° 41' 51''	4° 40' 35' 15''	2,097	4,893	1 $\frac{1}{15}$	0' 43" $\frac{1}{2}$
II.	9 10 18	4 11 32 5	4 10 10 25	2,686	6,268	2 $\frac{1}{2}$	0 56
III.	4 25 57	2 19 41 25	9 16 57 5	3,752	8,754	3 $\frac{1}{2}$	1 18
IV.	0 0 43	0 22 34 37	10 20 37 7	8,698	20,295	8	3 0
V.	7 20 36	0 4 32 18	7 6 27 28	25,348	59,154	23	8 42 $\frac{1}{2}$

Les distances en demi-diamètres de Saturne étant multipliées par 13664  $\frac{1}{2}$ , donneroient les distances en lieues (1398); mais il faudra rejeter trois chiffres du produit, à cause des trois décimales qui sont jointes dans la table précédente au nombre des demi-diamètres.

Le 9 Juin 1719, à 10<sup>h</sup>, M. Pound avec la lunette de 123 pieds, & un excellent micromètre, trouva que le 4<sup>e</sup> satellite, parvenu à peu-près à sa plus grande digression orientale, étoit à 3' 7'' du centre de Saturne; ainsi la

distance du fatellite à Saturne étoit à la distance moyenne du soleil à la terre, comme 825 est à 100000; d'où il seroit aisé de conclure les quatre autres distances, en parties de celle du soleil.

Inclinaison  
des 4 premiers  
satellites, 30°.

2998. En comparant les fatellites avec l'anneau de Saturne en divers points de leurs orbites, & en examinant l'ouverture de ces ellipses (2958); on a vu que les quatre premiers décrivoient des ellipses semblables à l'anneau, & situées dans le même plan, c'est-à-dire, inclinées d'environ  $31^{\circ} \frac{1}{2}$  à l'écliptique ou 30° sur l'orbite de Saturne. En effet le petit axe des ellipses que décrivent ces fatellites, lorsqu'elles paroissent les plus ouvertes, est à peu-près la moitié du grand axe, de même que le petit diam. de l'anneau (3227) est alors la moitié de celui qui passe par les anses; ces fatellites dans leurs plus grandes digressions sont toujours sur la ligne des anses; tout cela prouve qu'ils se meuvent dans le plan de l'anneau. Or, M. Maraldi trouva, en 1715, que le plan de l'anneau de Saturne coupoit le plan de l'orbite de Saturne sous 30° d'inclinaison (3237). Ainsi l'angle des orbites des 4 premiers fatellites avec l'orbite de Saturne est de 30°.

Inclinaison  
du cinquième  
satellite, 15°  
& demie.

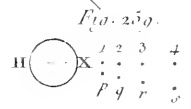
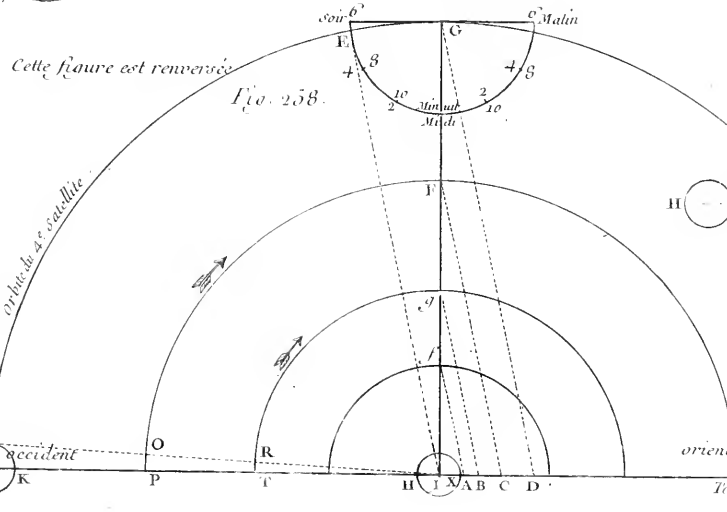
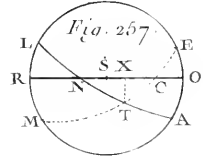
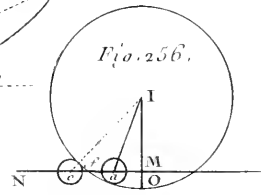
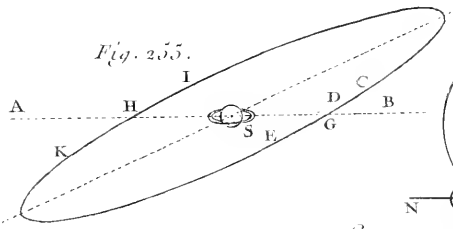
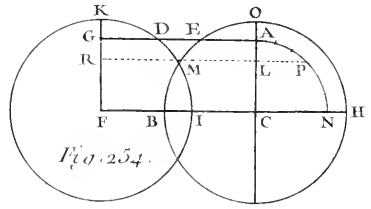
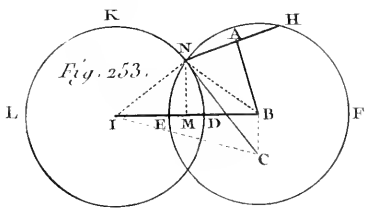
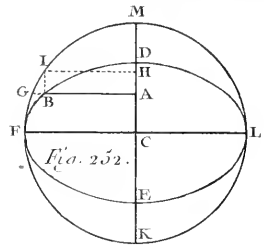
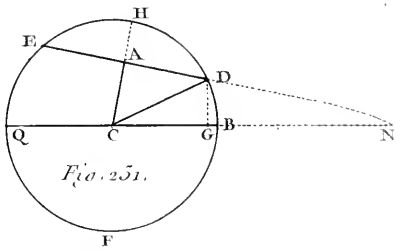
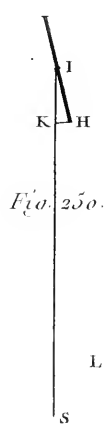
A l'égard du cinquième fatellite, M. Cassini le fils, reconnu en 1714, que son orbite n'étoit inclinée, soit sur l'orbite de Saturne, soit sur le plan de l'anneau que de  $15^{\circ} \frac{1}{2}$ , (*Mém. acad.* 1714, p. 375), & il vit ce fatellite décrire une ligne droite qui passoit à peu-près par le centre de Saturne, pendant que les autres s'en écartoient sensiblement au-dessus & au-dessous; ainsi l'orbite du 5<sup>e</sup> fatellite étoit inclinée de 15 à 16° sur l'écliptique, & autant sur le plan de l'anneau & des orbites des 4 fatellites intérieurs, mais dans un autre sens. J'ai oui dire que M. le Monnier ayant observé le 5<sup>e</sup> fatellite de Saturne en 1757, avec un télescope de 5 pieds, l'inclinaison lui avoit paru un peu différente.

Nœuds des  
4 premiers  
satellites.

M. Maraldi détermina en 1716 la longitude du point d'intersection de l'anneau sur l'orbite de Saturne  $5^{\circ} 19' 48' \frac{1}{2}$ , & sur l'écliptique  $5^{\circ} 16' \frac{1}{2}$ ; il trouvoit par les observations de 1685,  $5^{\circ} 19' 55'$ ; Huygens avoit trouvé

cette





Cette figure est renversée

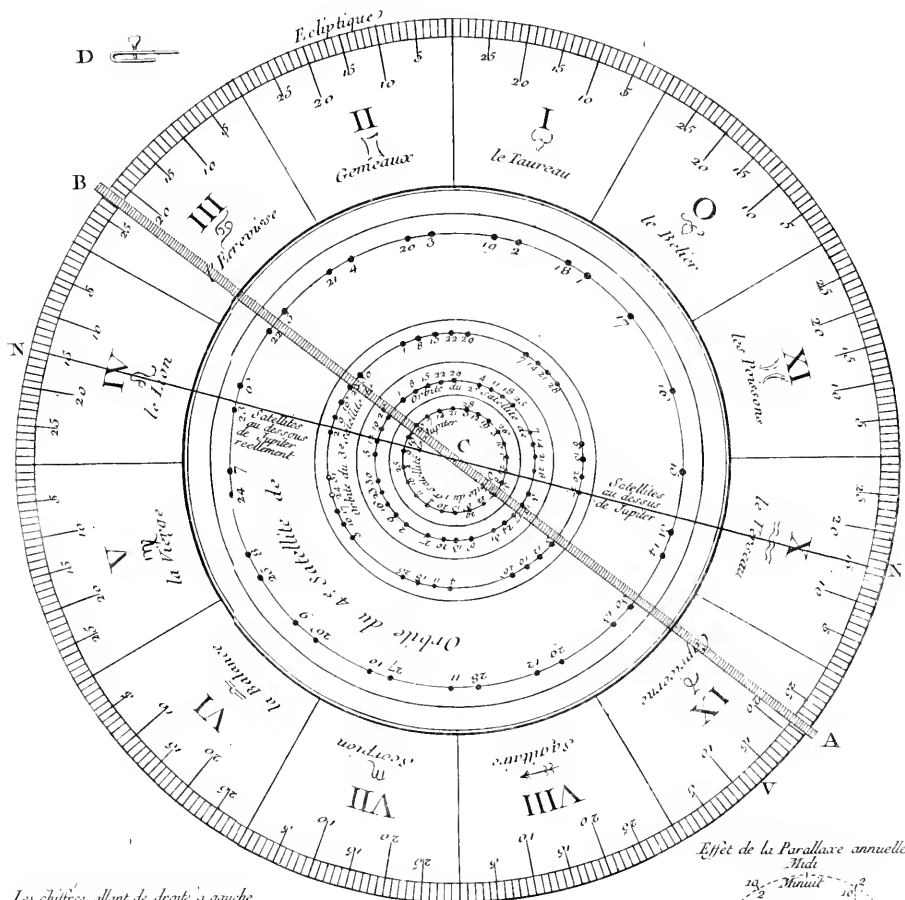
Orbite de la comète

occident

orient



F. 60 . 260 .

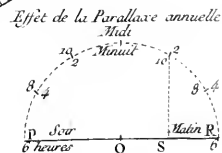


Les chiffres allant de droite à gauche  
donnent les configurations pour une  
Lunette qui redresse les objets .

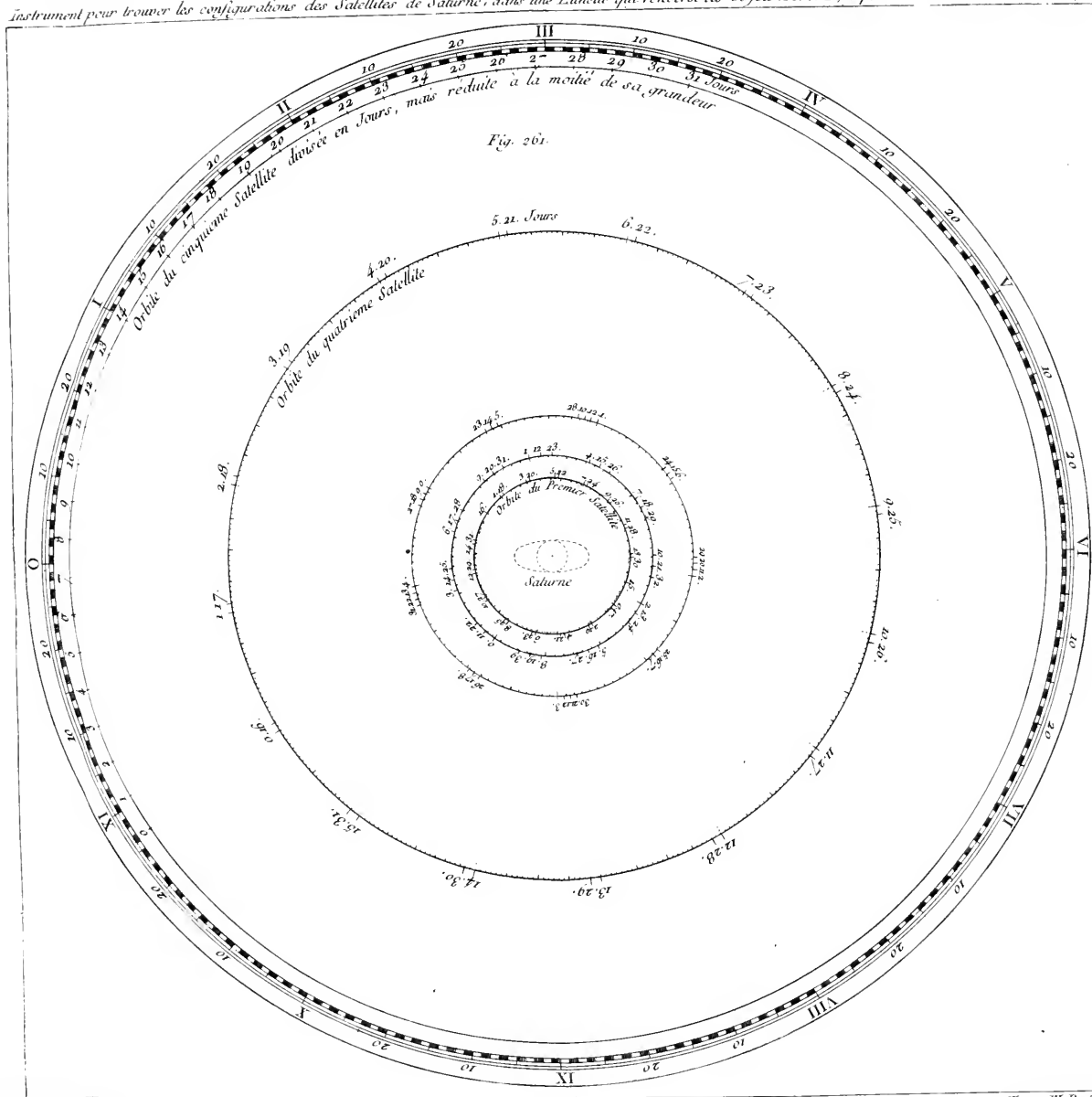
Pour une Lunette qui renverse

E . . . . . I . . . . . F

Jupiter accompagné de ses 4 satellites le 4 Mai  
1769 .









Cette longitude du nœud de l'anneau en 1655, à  $5^{\circ} 20' 30''$  (3231) ; mais M. Cassini, (*Elém. d'astron. pag. 643*) ; dit que ce nœud est à  $5^{\circ} 22'$ . Telle est, suivant ces différens auteurs, la longitude du nœud des 4 premiers satellites. On a cru reconnoître en 1744, que les nœuds de l'anneau avoient en un moment rétrograde ; il est difficile d'en juger sur un si petit intervalle de temps, cependant il est naturel de croire que les attractions des satellites sur cet anneau y produisent un semblable effet, puisqu'on s'en assurera mieux en 1773, lorsque Saturne se trouvera dans le nœud de l'anneau (3230).

Le nœud du 5<sup>e</sup> satellite fut trouvé en 1714 par M. Cassini à  $5^{\circ} 4'$  sur l'écliptique, c'est-à-dire, moins avancé de  $17'$  que le nœud des 4 autres satellites sur l'orbite de Saturne ; car M. Cassini les supposoit à  $5^{\circ} 21'$  sur l'écliptique, (*Mém. acad. 1714, pag. 374*). M. Cassini le détermina ainsi en observant le lieu de Saturne le 6 & le 7 Mai 1714 ; le 5<sup>e</sup> satellite paroïssoit alors se mouvoir en ligne droite (2962). M. le Monnier en 1755 a trouvé l'orbite fort retrécie, (*Mém. de l'acad. 1757, pag. 93*). Ce qui paroît indiquer un mouvement dans le nœud du 5<sup>e</sup> satellite.

Nœud du  
cinquième.

2999. Ce seroit ici le lieu de parler du satellite de Vénus, que M. Cassini, M. Short, & d'autres astronomes ont cru avoir apperçu, (*Hist. de l'acad. pour 1741, Phil. transf. n<sup>o</sup> 459, Encyclopédie, T. XVII, pag. 837*) ; mais les tentatives inutiles que j'ai faites pour l'appercevoir, de même que plusieurs autres astronomes, me persuadent que c'est une illusion optique formée par les verres des télescopes & des lunettes ; c'est ce que pensent le P. Hell dans l'appendix de ses éphémérides pour 1766, & le P. Boscovich dans sa 5<sup>e</sup> dissertation d'optique ; M. Short à qui j'en parlai à Londres en 1763, ne parut lui même ne pas croire l'existence d'un satellite de Vénus ; mais plutôt celle de quelque autre planète qui réfléchissant moins de lumière ne se voyoit que difficilement ; je suis tenté de croire qu'il ne faisoit cette dernière hypothèse

Satellite de  
Vénus.

que pour ne pas abandonner subitement l'affertion trop précipitée & trop formelle qu'il avoit faite dans sa jeunesse.

On peut se former une idée de ce phénomène d'optique, en considérant l'image secondaire qui paroît par une double réflexion, lorsqu'on regarde au travers d'une seule lentille de verre un objet lumineux placé sur un fond obscur, & qui ait un fort petit diamètre; pour voir alors une image secondaire semblable à l'objet principal, mais plus petite, il suffit de placer la lentille de manière que l'objet tombe hors de l'axe du verre; cette image secondaire, qu'on a prise pour un fatellite de Vénus, paroît du même côté que l'objet, ou du côté opposé, & elle est droite ou renversée, suivant les diverses situations de la lentille, de l'œil & de l'objet. Si l'on joint deux lentilles, on aura plusieurs doubles réflexions de la même espèce, du moins dans certaines positions; mais elles sont insensibles la plupart du temps, parce que leur lumière est éparse, & que leur foyer est trop près de l'œil, ou qu'elles tombent hors du champ de la lunette, (P. Boscovich, *pag.* 286).





# LIVRE DIX-NEUVIEME.

## DES COMETES.

**L**ES COMÈTES <sup>(a)</sup> sont des corps célestes qui paroissent de temps à autre avec différens mouvemens, & qui pour l'ordinaire sont accompagnés d'une lumière éparse. Leur mouvement apparent diffère beaucoup de celui des autres planètes; mais quand il est rapporté au soleil, il se trouve suivre les mêmes loix; car on verra que les comètes tournent autour du soleil dans des ellipses fort excentriques (3021, 3091), suivant les règles expliquées dans le VI<sup>e</sup>. livre.

3000. C'est le mouvement des comètes qui les distingue des étoiles nouvelles; car dans celles-ci l'on n'a jamais remarqué de mouvement propre (792); d'ailleurs la lumière des comètes est toujours foible & douce, c'est une lumière du soleil qu'elles réfléchissent vers nous, aussi-bien que les planètes; cela est prouvé spécialement par la phase observée, dans la comète de 1744, dont la partie éclairée n'étoit visible qu'à moitié (*Mém. acad.* 1744, pag. 304). Si ces phases ne s'observent pas toujours, c'est que l'atmosphère épaisse où la plupart des comètes sont noyées disperse la lumière, en sorte qu'elles nous semblent toujours d'une forme à peu près ronde. On distingue principalement les comètes par ces traînées de lumière dont elles sont souvent entourées & suivies, qu'on appelle tantôt la *chevelure*, tantôt la *queue* de la comète (3116); cependant il y a eu des comètes sans queue, sans barbe, sans chevelure; la comète de 1585 observée pendant un mois par Tycho étoit ronde, elle n'avoit aucun vestige de queue, seulement sa circonférence étoit moins lumineuse que le noyau, comme si elle

Ce qui distingue les comètes.

(a) En Grec *κμήτης*, qui vient de *κῆμη*, *Coma*, parce que les plus remarquables ont paru entourées d'une espèce de chevelure.

n'eût eu à sa circonférence que quelques fibres lumineuses, (*Tycho, progymn. pag. 752*). La comète de 1665 étoit fort claire, suivant Hévélius, & il n'y avoit presque pas de chevelure; enfin la comète de 1682, au rapport de M. Cassini, étoit aussi ronde & aussi claire que Jupiter (*Mém. acad. 1699*); ainsi l'on ne doit pas regarder les queues des comètes, comme leur caractère distinctif.

Nombre des  
comètes.

3001. RICCIOLI dans son énumération des comètes n'en compte que 154 citées par les Historiens, jusqu'à l'année 1651 où il composoit son *Almageste*, & la dernière étoit celle de 1618. Mais dans le grand ouvrage de *Lubienietz*, où les moindres passages des auteurs sont scrupuleusement rapportés toutes les fois qu'ils ont le moindre rapport aux comètes, on en voit 415 jusqu'à celle de l'année 1665, qui parut depuis le 6 jusqu'au 20 Avril, entre Pégase & les cornes du Bélier. Depuis ce temps-là on en a observé 38, en comptant celle qui paroît au mois de Janvier 1771, dans le temps même que j'écris.

Il n'y en a  
que 50 de bien  
décrites,

Mais de toutes ces apparitions de comètes, nous n'en trouvons aucune dont la route soit décrite d'une façon circonstanciée, avant l'année 837, & le nombre de celles, dont on a pu avoir assez de circonstances pour calculer leur orbite, se réduit jusqu'ici à 59, en ne comptant que pour une seule comète celles de 1456, de 1531, 1607, 1682 & 1759, qui sont bien reconnues pour n'être qu'une seule & même planète (3092); j'ai réuni de même celles de 1532 & de 1661, & celles de 1264 & de 1556, dont nous parlerons, art. 3095.

3002. Au reste nous devons être persuadés qu'il a paru de tous les temps beaucoup de comètes dont nos historiens ne parlent point; & qu'il y en a eu beaucoup plus encore qui n'ont point été apperçues; les Anciens même le savoient, car Posidonius avoit écrit (suivant Sénèque, (*Quæst. nat. l. II, c. 20*)), qu'à la faveur de l'obscurité produite par une éclipse de soleil on avoit vu une comète très-proche du soleil, c'étoit vers l'an 60 avant J. C.; ce qui donne lieu de croire que dans

de pareilles circonstances on en verroit souvent. Depuis l'année 1757 qu'on a attendu & cherché la comète de 1682, & que l'attention des observateurs s'est tournée de ce côté-là, on a observé sept autres comètes, dans l'espace de 7 ans, M. Messier en a découvert beaucoup, & quand on prendra la peine de les chercher dans le ciel, on en trouvera sans doute un grand nombre.

Il y en a une multitude d'autres.

3003. Alfediüs observe que dans les années qui précédèrent & qui suivirent 1101, date de la 223<sup>e</sup> comète, on en vit presque toutes les années (*Lubieniecii theat. cometicum*).

Il est même arrivé plus d'une fois que l'on a vu en même temps plusieurs comètes. Riccioli en rapporte des exemples, des années 729, 761, 1165, 1214, 1337, 1529 & 1618. Au mois de Mai 1748, on croit avoir vu trois comètes différentes dans une même nuit (M. Struick, *Phil. transf. t. 46*); le 11 Février 1760, on en voyoit deux (*Mém. 1760, pag. 168*).

On en a vu plusieurs à la fois.

3004. Les comètes dont l'apparition a été la plus longue, sont celles qui ont paru pendant 6 mois; la première du temps de Néron, l'an 64 de J. C. (Sen. l. 7, c. 21); la seconde vers l'an 603, au temps de Mahomet; la troisième en 1240, lors de l'irruption du grand Tamerlan. De nos jours la comète de 1729 a été observée pendant six mois, depuis le 31 Juillet 1729 jusqu'au 21 Janvier 1730; celle de 1769 pendant près de 4 mois. Riccioli, (*dans son almageste II, 24*), nous donne une table de la durée de beaucoup d'autres comètes, suivant différens Historiens; on y voit 4 comètes de 4 mois, savoir celles des années 676, 1264, 1363, 1433. Je ne parle point de celle qui menaça la ville de Jérusalem pendant un an, au rapport de Joseph, vers l'an 70, & que l'on n'a point mise au nombre des effets naturels. Cependant, il n'est pas impossible qu'une comète paroisse pendant un an entier, mais ce ne seroit pas au même lieu, comme celle dont parle Joseph.

Durée de leur apparition.

3005. Toutes les comètes paroissent tourner comme les autres astres par l'effet du mouvement diurne (art.

Vitesse de leur mouvement propre.

2); mais elles ont encore un mouvement propre, aussi bien que les planètes, par lequel elles répondent successivement à différentes étoiles fixes. Ce mouvement propre se fait tantôt vers l'orient, comme celui des autres planètes, tantôt vers l'occident, quelquefois le long de l'écliptique ou du zodiaque, quelquefois dans un sens tout différent & perpendiculairement à l'écliptique.

130 deg. par  
jour.

La comète de 1472 fit en un jour 120 degrés ayant rétrogradé depuis l'extrémité du signe de la Vierge, jusqu'au commencement du signe des Gémeaux, suivant l'observation de Regiomontanus (*Riccioli, alm. II, 8*). La comète de 1760 entre le 7 & le 8 de Janvier, changea de  $41^{\circ} \frac{1}{2}$  en longitude; on pourroit citer d'autres exemples d'une très-grande vitesse observée dans le mouvement apparent des comètes: on verra ci-après (3112), qu'elle pourroit aller bien plus loin, si une comète passoit plus près de la terre.

Mouvement  
total.

3006. Quelquefois les comètes paroissent si peu de temps que dans la durée de leur apparition leur situation ne change pas beaucoup; mais il y a des comètes dont le mouvement est fort étendu, celle de 1664 parcourut 164 degrés par un mouvement rétrograde en apparence, du 20 Décembre jusqu'au 6 Janvier 1665, & en 17 jours, elle parcourut  $113^{\circ}$ ; celle de 1769 parcourut 8 signes ou  $240^{\circ}$ , tant avant qu'après sa conjonction; celle de 1556 un demi-cercle environ, ou  $180^{\circ}$ ; celle de 1472 fit environ  $170^{\circ}$ ; celle de 1618 ne parcourut que  $107^{\circ} \frac{1}{2}$ ; mais ce fut dans l'espace de 28 jours (*Riccioli, alm. II, 28*).

Grandeur  
apparente des  
comètes,

3007. Les Anciens n'ont parlé communément de la grandeur des comètes qu'en faisant attention au spectacle de leur queue, ou de leur chevelure, nous en parlerons plus bas (3117); cependant il y a des comètes dont le diamètre apparent semble avoir été très-considérable, indépendamment de la queue. Après la mort de Demetrius; roi de Syrie, pere de Demetrius & d'Antiochus, un peu avant la guerre d'Achaïe (146 avant Jesus-Christ), il parut une comète aussi grosse que le soleil. (*Sen. VII, 15*);

Celle qui parut à la naissance de Mithridate, répandoit, suivant Justin, plus de lumière que le soleil.

La comète de 1006 ( rapportée par erreur à l'an 1200 dans quelques livres ), & qui fut observée par Haly Ben-Rodoan, ( *Cardan. Astron. l. 2. c. 9. text. 54* ), étoit quatre fois plus grosse que Vénus, & jettoit autant de lumière que le quart de la lune pourroit faire ; cette comète paroît être la même que celles de 1682 & 1759 ( 3092 ).

Diamètre  
apparent.

Cardan dit la même chose de celles de 1521 & 1556 ( *de Variet. l. 14* ). Nous n'avons rien de bien déterminé sur la grandeur apparente des comètes avant celle de 1577 ; son diamètre apparent, suivant Tycho, étoit de 7', c'est-à-dire, selon lui, le double du diamètre de Vénus ; mais il faut rabattre beaucoup de ces fortes de mesures ( 1390 ).

3008. La manière d'observer les comètes, est la même que pour les planètes ; mais leur peu de lumière fait que l'on est obligé pour l'ordinaire de se contenter du réticule rhomboïde ( 2513 ), ou de la méthode des hauteurs ( 2580, 3744 ).

La lumière des comètes déjà très-foible en général ; est encore affoiblie par les lunettes qui forcent beaucoup, enforte qu'on les observe souvent avec plus de facilité & plus d'exactitude dans une lunette fort courte, & qui grossit très-peu, que dans une lunette plus grande & qui force davantage.

### *Différentes opinions sur les Comètes.*

3009. APRÈS avoir parlé des principales circonstances qui ont rendu les comètes remarquables, je vais parler des différens systèmes auxquels elles ont donné lieu. Il y a eu de tout temps des Philosophes persuadés que les comètes étoient des planètes dont le mouvement devoit être perpétuel & les révolutions constantes ; on a attribué peut-être mal à propos ce sentiment aux anciens Caldéens, ce fut réellement celui des Pythagori-

Sentiment  
des Pythagori-  
ciens.

### 312 ASTRONOMIE, LIV. XIX.

ciens & de plusieurs autres, tels que Apollonius le Myndien, Hippocrates de Chio, Æschyle, Diogènes, Phavorinus, Artemidore & Démocrite, qui au jugement de Cicéron (*Tuicul. l. 5*) & de Sénèque (*Quæst. nat. lib. 7*), fut le plus subtil de tous les anciens Philosophes. On peut voir au sujet des systèmes anciens, Pline, *l. II. c. 25*. Arist. *Meteor. l. 6*. Plutarque *de Plac. Phil. 3. 2*. Aulu-Gelle *14. 1*. Sen. *l. VII. c. 13*. Riccioli, *Alm. II. 35*, & ce que j'ai dit moi-même dans les *Mém.* de 1759, *pag. 1*, & suiv.

*Idée sublime  
de Sénèque,*

3010. Mais on doit, sur-tout à Sénèque, ce témoignage qu'aucun auteur n'a parlé des comètes d'une manière aussi sublime que lui dans le VII<sup>e</sup>. livre de ses questions naturelles. Un astronome auroit peine à s'exprimer aujourd'hui d'une manière plus philosophique. « On a cru, » dit-il, que les comètes n'étoient point des astres, parce » qu'elles n'ont pas la rondéur des autres corps célestes ; » mais ce n'est que la lumière qu'elles répandent qui produit cette figure allongée ; le corps de la comète est » arrondi. Je suppose encore qu'elles aient une autre » figure que les planètes : s'ensuit-il qu'elles soient d'une » nature différente ; la nature n'a pas tout fait sur un monde unique, & c'est ignorer son étendue & sa puissance » que de vouloir rapporter tout à la forme ordinaire ; la » diversité de ses ouvrages annonce sa grandeur. On ne » peut point encore connoître leur cours, & savoir si » elles ont des retours réglés, parce que leurs apparitions » sont trop rares ; mais leur marche, non plus que celle des » planètes, n'est point vague & sans ordre, comme celle » des météores qui seroient agités par le vent. On observe » des comètes de formes très-différentes ; mais leur nature » est semblable, & ce sont en général des astres qu'on n'a » pas coutume de voir, & qui sont accompagnés d'une lumière inégale ; les comètes paroissent en tout temps & » dans toutes les parties du ciel, mais sur-tout vers le » nord. Elles sont comme tous les corps célestes des ouvrages éternels de la nature ; la foudre & les étoiles vaporeuses & tous les feux de l'atmosphère sont passagers &

*Sentiment  
de Sénèque,*

» ne

» ne paroissent que dans leur chute ; les comètes ont leur  
» route qu'elles parcourent , elles s'éloignent , mais ne cessent point d'exister. Vous prétendez que si c'étoient des  
» planètes elles se trouveroient dans le zodiaque ; & qui  
» donc a fixé dans le zodiaque les mouvemens des corps  
» célestes , qui peut assigner ainsi des limites aux ouvrages  
» divins , le ciel n'est-il pas libre de tous côtés ? N'est-il  
» pas plus convenable à la grandeur de l'univers d'y admettre  
» plusieurs mouvemens dans des routes différentes , que  
» de réduire tout à une seule région du ciel ? Dans cet  
» ouvrage magnifique de la nature nous voyons briller une  
» multitude d'étoiles qui embéllissent la nuit , elles nous apprennent  
» que le ciel de toutes parts est rempli de corps  
» célestes , pourquoi faut-il qu'il n'y en ait que cinq à qui  
» il soit donné de se mouvoir , & pourquoi tous les autres  
» astres doivent-ils être immobiles ? On me demandera  
» peut-être pourquoi donc il n'y en a que cinq dont on ait  
» observé le cours ; je répondrai qu'il y a beaucoup de  
» choses dont nous connoissons l'existence , sans savoir de  
» quelle manière elles sont ; nous avons un esprit qui agit  
» & nous dirige , nous ne savons ni ce que c'est , ni comment il agit ;  
» ne nous étonnons pas que l'on ignore encore la loi du mouvement  
» des comètes dont le spectacle est si rare , qu'on ne connoisse ni le commencement  
» ni la fin de ces astres qui descendent d'une énorme distance ; il  
» n'y a pas encore 1500 ans que la Grece a compté les  
» étoiles & leur a donné des noms : il y a encore bien des  
» nations qui n'ont que la simple vue & le spectacle du  
» ciel , sans savoir seulement pourquoi ils voient la lune  
» s'éclipser ; il n'y a pas bien long-temps que nous le savons  
» d'une manière certaine ; le jour viendra , que par une  
» étude de plusieurs siècles les choses qui sont cachées  
» actuellement paroîtront avec évidence. Ce seroit peu  
» d'un siècle pour découvrir tant de choses , quand même  
» on y donneroit tout son temps ; & nous partageons le peu  
» de momens qui nous sont accordés , en donnant aux vices  
» la plus grande partie. . . On étudie quand on manque de  
» spectacles ou quand la pluie empêche les promenades ;

Prédiction  
de Sénèque.

» on conserve les noms des Comédiens , mais on oublie  
 » ceux des Philosophes. Un jour viendra où la postérité  
 » s'étonnera que des choses si claires nous aient échappé....  
 » On démontrera dans quelles régions vont errer les co-  
 » mètes, pourquoi elles s'éloignent tant des autres astres ;  
 » quel est leur nombre & leur grandeur. Ceux qui nous  
 » suivront trouveront des vérités nouvelles, contentons-  
 » nous de celles qu'on a découvertes. *Nec miremur tam*  
*tardè erui quæ tam altè jacent* ». J'abrege à regret la tra-  
 duction de cet ouvrage de Sénèque , rempli de la plus  
 belle morale & de la plus saine philosophie.

Sentimens  
opposés.

3011. Malgré des idées aussi lumineuses sur la nature  
 des comètes il s'est trouvé parmi les anciens & parmi les  
 modernes jusqu'au commencement de ce siècle, des au-  
 teurs qui ont cru que les comètes étoient des corps nou-  
 vellement formés & d'une existence passagère. Tels furent  
 Aristote, Ptolomée, Bacon, Galilée, Hévélius, Longo-  
 montanus, Tycho, Képler, Riccioli, M. de la Hire ;  
 (*Mém. acad.* 1702, pag. 112). Plusieurs d'entr'eux les  
 regardèrent comme des corps sublunaires ou des météores  
 de l'atmosphère ; M. Cassini lui-même avoit cru que les  
 comètes étoient formées par les exhalaisons des autres  
 astres. (*Abrégé des observations sur la comète de 1680*,  
 pag. xxxi).

3012. Ce fut-là, sur-tout, le sentiment d'Aristote, &  
 par conséquent celui qui domina dans les écoles jusqu'au  
 dernier siècle ; les astronomes regardant jusqu'alors les  
 comètes comme des amas de vapeurs ne daignoient pas  
 les observer ; voilà pourquoi nous n'en avons que 59 dont  
 la route soit déterminée (3089) ; il n'y eut même que les  
 comètes qui firent spectacle, dont les astronomes s'occu-  
 pèrent ; telle fut la comète de 1472 qui parut d'une ma-  
 nière si frappante qu'elle attira tous les regards ; c'est la  
 première qui ait été observée avec soin ; car les sept qui  
 la précèdent dans ma table n'ont été calculées que sur des  
 descriptions assez imparfaites.

Atouvement  
des comètes  
suiv. Tycho.

3013. On n'avoit point recherché ni calculé la vraie  
 figure de la route des comètes, avant Tycho-Brahé ;



Regiomontanus avoit jugé qu'elles décrivoient des cercles; mais c'étoit moins par observation que par le préjugé général qu'on avoit pour les formes circulaires. Tycho ayant observé long-temps & avec soin la comète de 1577, composa un ouvrage considérable à cette occasion; il trouva qu'on pouvoit assez bien représenter ses apparences, en supposant qu'elle avoit décrit autour du soleil une portion de cercle inclinée à l'écliptique de  $29^{\circ}$ , qui renfermoit les orbites de Mercure & de Vénus, de manière que sa plus grande digression vue de la terre auroit pu être de  $60^{\circ}$  (tandis que celle de Vénus n'est que de  $45^{\circ}$ ); mais Tycho étoit obligé de rendre le mouvement de la comète un peu plus lent dans la partie inférieure de son cercle. (*De Com. anni 1577, pag. 194*).

3014. Tycho faisant voir dans cet ouvrage que les comètes étoient des corps fort élevés au-dessus de la moyenne région, renversoit le système ancien des cieux solides; comme Newton se servit ensuite des comètes pour détruire le plein de Descartes, & l'hypothèse ingénieuse des tourbillons.

Il renverse les cieux solides.

3015. Képler ayant trouvé que les observations de la comète de 1618, s'accordoient mieux avec une ligne droite qu'avec un cercle, crut que les comètes avoient un mouvement purement rectiligne. (*De cometis, Lib. III. 1619, 138 pages*); ce système lui eût semblé bien difficile à admettre s'il avoit vu la comète de 1763: elle étoit le 28 Septembre à  $5^{\circ}$  au midi de l'équateur, elle s'éleva en 3 semaines jusqu'à  $18^{\circ}$  de déclinaison boréale, & le 18 Novembre elle étoit revenue à  $3^{\circ}$  de l'équateur; dans cet intervalle de temps elle n'avoit pas changé son ascension droite de plus de  $20^{\circ}$ ; ce qui marque une courbure prodigieuse.

Sentiment de Képler.

3016. M. Cassini dans son traité sur la comète de 1664, fit voir que le mouvement apparent & inégal de cette comète pouvoit se réduire à l'égalité par le moyen d'un cercle décrit excentriquement autour de la terre; mais dont il n'y avoit d'observable qu'une très-petite partie. Le même système paroît dans son traité sur la comète de

De M. Cassini.

### 316 ASTRONOMIE, Liv. XIX.

1680, dans lequel il s'efforce de prouver que la comète qu'on avoit vue à la fin de Novembre le matin est différente de celle qui parut à la fin de Décembre le soir & à l'orient du soleil ; il croyoit que celle-ci étoit la même qu'on avoit vue en 1577, tournant en 29 mois & demi autour de la terre. M. Cassini étoit encore persuadé de cette hypothèse en 1699. (*Mém. acad.* 1699, pag. 39). Il essayoit par ce moyen d'expliquer les retours de quelques comètes qui avoient paru suivre à peu-près les mêmes traces ; il s'y prenoit d'une manière ingénieuse, & il eût réussi à prédire leur retour, s'il avoit eu l'idée de calculer leurs mouvemens vus du soleil, au lieu d'en faire des satellites de la terre.

Hévélius  
trouve que les  
orbites des  
planètes sont  
des paraboles.

3017. HÉVÉLIUS me paroît être celui qui dans cette théorie fit d'abord le plus grand pas, puisqu'il jugea le premier, non-seulement que la route des comètes étoit courbée vers le soleil ; mais encore que cette courbure étoit parabolique. Weidler écrit que l'ouvrage de *Doërfeld*, imprimé à Plawen en 1681, étoit le premier livre où l'on eût démontré que la parabole pouvoit représenter le mouvement des comètes ; Doërfeld appliqua en effet cette méthode à la comète de 1680 ; mais il en avoit pris l'idée dans la *Cométographie* d'Hévélius, imprimée dès l'an 1668, & il l'annonce dans le titre même de son ouvrage. Hévélius paroïssoit d'abord très-porté pour le mouvement rectiligne : *Cometæ nullo alio motu quàm rectilineo concitantur.* (*Hevel. comet.* pag. 569). *Motum propemodum rectum*, pag. 561). *Propemodum recta trajiciuntur.... gaudent hocce unico motu ferè recto*, (p. 568). *Cometa non nihil à rectæ lineæ perfectione exorbitare videtur*, (pag. 641). *Pausillum tantùm à linea recta incurvatur*, (pag. 684), &c. D'ailleurs il s'en falloit de beaucoup qu'il ne mît le soleil au foyer de la parabole ; Doërfeld est le premier qui en ait eu l'idée, Hévélius ne mettoit pas même le soleil dans le plan de cette courbe. Aussi Gregori (*L. V. Sect. I. prop. 2*) met Hévélius au nombre de ceux qui ont soutenu le mouvement rectiligne des comètes, & M. Pingré trouve qu'il a raison ; voici cependant ce qu'on lit dans la

suite du même ouvrage. Hévélius observe d'abord que tous les projectiles décrivent des paraboles, *omne projectum & explosum motu parabolico progreditur*, (pag. 660). Il décompose ensuite cette parabole pour faire voir qu'elle est le résultat d'une double impression : *motus parabolicus ex duobus motibus contrariis oritur* (p. 661). La ressemblance entre les projectiles que nous voyons sur la terre, & les comètes, lui paroît évidente, il voit de part & d'autre une gravité, une tendance vers un centre commun, qui est le centre du soleil pour les planètes, & celui de la terre pour les corps terrestres ; de part & d'autre un mouvement d'explosion, de projection en ligne droite, qui se combine avec la gravité pour former une parabole, en sorte que la comète abandonneroit la parabole pour suivre une tangente, si la gravité cessoit d'agir sur elle, comme elle retomberoit vers le soleil si la force de projection ne l'en éloignoit pas : *Cometæ in nulla alia quam parabolica moventur linea..... nam cum iis omnibus ita comparatum est in æthere, (suo tamen modo) quam cum projectis commotisque in aere..... cometam videlicet æternis causis necessitate manantibus, pariter ac globus è tormento explosus, vel aliquid aliud virtute seu motu extrinseco propulsus, in lineâ parabolicâ omnino commoveri ac trajici..... alter autem (motus) pariter naturalis & intrinsecus est ; non quidem ex eo quod cometis æque ac terrestribus gravitatem attribuemus ; sed alia huic non prorsus dissimilis appetentia eis competat..... sub quâ directione se deinceps conservant : quando nempe cometæ atmospharâ liberi exeunt, vel ex eâ in ætherem expelluntur, ejiciuntur, sui que juris fiunt, cuius videlicet universi ætheris sol centrum est*, (pag. 666).

Idées qu'il  
avoit de l'at-  
traction uni-  
verselle.

3018. Hévélius ajoute même que la vitesse des comètes est la plus grande au point de leur orbite où le rayon est perpendiculaire à la courbe, c'est-à-dire, au sommet de la parabole : il est vrai qu'ensuite il soupçonne que le mouvement des comètes n'est pas égal à distances égales du périhélie, & que la plus grande vitesse ne concourt pas toujours exactement avec le périhélie (pag. 677). D'ailleurs on trouve dans cet ouvrage des hypothèses

## 318 ASTRONOMIE, Liv. XIX.

destituées de fondement pour expliquer la formation des comètes dans l'atmosphère de Saturne ou de quelque autre planète, & le mouvement de projection qu'elles y reçoivent ; mais quand à la partie astronomique, il ne restoit plus rien à faire que d'appliquer aux comètes la loi de Képler, des aires proportionnelles aux temps.

Comète de  
1680.

3019. Enfin, parut la comète prodigieuse de 1680, qui étonna & les savans & les peuples, elle produisit, les *pensées* ingénieuses de Bayle, le traité de M. Cassini, celui de Jacques Bernoulli qui crut pouvoir prédire son retour, enfin elle fit éclore les sublimes recherches de Newton qui fut faire des comètes une branche de son système général.

Newton  
calcule leurs  
orbites.

3020. La découverte de l'attraction ( 3381 ) ouvrit, pour ainsi dire, aux Philosophes, un nouveau ciel ; Newton, en voyant toutes les planètes soumises à la force centrale du soleil, pensa que les comètes devoient être du nombre de ces planètes, & suivre les mêmes loix dans leur mouvement autour du soleil : il falloit pour cela que leurs orbites fussent fort excentriques, c'est-à-dire, très-allongées, afin d'expliquer une très-longue disparition.

3021. Pour voir si cela s'accorderoit avec les observations, Newton examina l'orbite de la comète de 1680, il trouva qu'une portion d'ellipse très-allongée, ou ce qui revient au même, une portion de parabole ( 3251 ), convenoit parfaitement avec toutes les observations, pourvu qu'on supposât les aires proportionnelles aux temps, comme dans les mouvemens planétaires ( 1226 ) ; dès lors il ne douta plus que les comètes ne fussent des planètes aussi périodiques & aussi anciennes que les autres.

Calculs de  
M. Halley.

3022. M. Halley se forma des procédés de calcul pour les orbites paraboliques ; il les appliqua successivement à différentes comètes ( 3044 ), en choisissant celles qui avoient été les mieux observées ; peu-à-peu il étendit ses calculs à 24 comètes, & en 1705 il publia les élémens de ces 24 paraboles ( *Phil. transf. n<sup>o</sup>. 297* ) ; M. le Monnier a fait réimprimer à Paris en 1743, la théorie de M.

Halley, & je l'ai publiée de nouveau en François, lorsque je donnai une nouvelle édition des tables de Halley, en 1759 ; on y trouve des additions considérables qui forment une *Théorie* du mouvement des comètes , à laquelle je renverrai plusieurs fois.

3023. Depuis ce temps-là le nombre des comètes observées & calculées s'est augmenté jusqu'à 59 (3089) ; plusieurs de ces comètes ont été observées pendant des mois entiers, sur une très-grande portion de la circonférence du ciel (3006) avec des inégalités apparentes extrêmement considérables, & cependant quand on les réduit à une parabole décrite autour du soleil, on trouve un accord si parfait entre toutes les observations, qu'il n'y a aucune autre hypothèse, ni aucune autre loi qui pût approcher de cette exactitude ; on ne peut donc regarder que comme une absurdité les systèmes qui s'éloignent de celui-là ; ainsi nous allons expliquer le mouvement des comètes, dans une orbite parabolique dont les dimensions sont données ; & nous chercherons ensuite la manière de trouver ces dimensions, ou l'orbite d'une comète qui paroît pour la première fois (3044).

59 Comètes  
calculées.

## DU MOUVEMENT DES COMETES DANS UNE ORBITE PARABOLIQUE.

3024. Le calcul parabolique dont nous allons nous servir, à l'exemple de Newton & de Halley, n'est qu'une approximation, que l'on adopte à cause de la facilité des calculs, & du peu de différence qu'il y a entre une parabole & une ellipse fort allongée (3091, 3104). L'avantage consiste en ce que toutes les paraboles sont des courbes semblables ; elles donnent une même proportion entre les rayons vecteurs semblablement placés, & il suffit de connoître les distances périhélie de différentes comètes pour les calculer toutes par une seule & même table (3037). On verra ci-après cette table générale où l'anomalie vraie est marquée pour chaque jour, & qui sert pour toutes les comètes, au lieu que les

Utilité de la  
parabole.

## 320 ASTRONOMIE, LIV. XIX.

ellipses exigent chacune une table particulière (3101).  
*Pl. XXXVI.* 3025. La table générale suppose une comète dont  
*Fig. 262.* l'orbite soit la parabole  $PCOD$  (fig. 262), le soleil  $S$  occupe le foyer;  $P$  est le périhélie de la comète ou le sommet de la parabole,  $SP$  est la distance périhélie; que l'on suppose égale à la distance moyenne de la terre au soleil, qu'on prend toujours pour échelle de toutes les distances célestes.

Comète de  
109 jours.

Cette comète dont la distance périhélie  $SP$  est égale à la distance moyenne du soleil à la terre emploie 109 jours à aller de  $P$  en  $O$ , ou du périhélie jusques à l'extrémité de l'ordonnée  $SO$  perpendiculaire à  $SP$  (3031). Je l'appellerai, pour abrégé, comète de 109 jours, & je ferai voir comment on peut y rapporter toutes les autres comètes, en changeant seulement les temps : je suppose la nature & les propriétés de la parabole qui seront expliquées ci-après (3251), & qui se trouvent aussi démontrées dans ma *théorie des comètes* (*Tables astr. de Halley, pag. 70 & suiv.*).

3026. La première chose que nous avons à faire pour calculer le mouvement des comètes consiste à déterminer la vitesse qui doit avoir lieu dans des paraboles de différentes grandeurs; car une comète dont la parabole est plus grande, emploie plus de temps à parcourir un angle de  $90^\circ$ , tel que l'angle  $PSO$ , c'est-à-dire, à aller de  $P$  en  $O$ , tout ainsi que Saturne emploie 30 fois plus de temps à décrire un degré de son orbite que la terre n'en emploie à décrire un degré de la sienne; voici un théorème fondamental que je démontre d'une manière très-simple.

3027. LE RAPPORT des vitesses dans la parabole & dans le cercle est celui de  $\sqrt{2}$  à 1.

DÉM. Supposons une comète en  $P$ , qui décrive la parabole  $PO$  à la distance  $SP$  du soleil, & la terre en  $T$  décrivant un cercle  $TLM$ , dont le rayon  $FT$  soit égal à  $SP$ : la force centrale, ou l'attraction du soleil pour retenir la comète, & la terre, chacune dans son orbite, est égale, puisque la distance est la même, & que le soleil ne peut pas avoir plus de force sur la comète que sur la

la terre à la même distance. Je suppose un petit arc  $PC$  de la parabole, & un petit arc  $TL$  de l'orbite de la terre, tels que l'abscisse  $PB$  de la parabole & l'abscisse  $TI$  du cercle soient égales; ou que l'écart de la tangente par rapport à la courbe soit le même dans la parabole & dans le cercle, ces abscisses ou les écarts de ces tangentes expriment la force centrale du soleil; puisqu'elles sont la quantité dont la planète obéit à l'action du soleil en se détournant de la ligne droite (3389); elles sont donc égales dans les même temps, quand la force est la même; donc si les abscisses sont égales les arcs  $PC$  &  $TL$  sont décrits en temps égaux, & expriment les vitesses de la comète & de la terre. Je vais partir de cette supposition que les deux inflexions sont égales pour trouver les arcs eux-mêmes.

3028. Les arcs ne peuvent pas être égaux, puisque deux arcs égaux pris sur des courbes très-différentes ne sauroient avoir des inflexions égales, & que quand les inflexions sont égales les arcs ne sont pas égaux; j'en conclurai le rapport des arcs, ce sera celui des vitesses, puisque le temps est le même de part & d'autre. Par la propriété du cercle l'on a  $TI = \frac{IL^2}{2FT}$  (3353); mais par la propriété de la parabole on a le carré de l'ordonnée  $BC$  égal au produit de l'abscisse  $PB$  par le paramètre, qui est quadruple de  $SP$ ; donc  $PB = \frac{BC^2}{4SP} = \frac{BC^2}{4FT}$ ; or  $PB = TI$  (3027), donc  $\frac{IL^2}{2FT} = \frac{BC^2}{4FT}$ ; ou  $2IL^2 = BC^2$ ; donc  $IL\sqrt{2} = BC$ , ce qui donne cette proportion;  $BC : IL :: \sqrt{2} : 1$ ; or  $IL$  est égal à l'arc  $TL$ , ou du moins il n'en diffère que d'un infiniment petit du troisième ordre (3317); ainsi  $IL$  est la vitesse de la terre; de même  $BC$  est la vitesse de la comète; donc la vitesse de la comète est à celle de la terre à même distance du soleil, comme  $\sqrt{2}$  est à 1.

3029. Delà il suit que la vitesse de la comète en  $P$  sur la parabole  $PO$ , fera les  $\frac{7}{5}$  de la vitesse de la terre; car  $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$  environ; donc l'aire décrite en une seconde

Fig. 262.

## 322 ASTRONOMIE, Liv. XIX.

Fig. 262.

de temps par la comète, fera  $\frac{7}{7}$  de l'aire décrite par la terre; mais les aires sont toujours égales en temps égaux; (1233), ainsi à quelque distance que la comète parvienne par rapport au soleil dans sa parabole  $PO$ , l'aire décrite en une seconde de temps, fera toujours  $\frac{7}{7}$  de l'aire décrite par la terre, & l'aire décrite par la terre sera égale à l'aire de la comète divisée par  $\frac{7}{7}$  ou  $\sqrt{2}$ . Je vais me servir de cette proposition pour démontrer que la comète doit employer 109 jours à aller de  $P$  en  $O$ , ou à parcourir  $90^\circ$  d'anomalie.

3030. Soit la distance périhélie  $SP$  ou  $FT=1$ ; la circonférence du cercle  $TM$  ou le nombre 6,283 (3322)  $=c$ , l'aire de ce cercle fera  $\frac{c}{2}$ , l'aire parabolique  $PSO$ , qui est les deux tiers du produit de  $SP$  par  $SO$  (3327), fera  $\frac{4}{3}$ , cette aire de la comète, divisée par  $\sqrt{2}$ , donnera  $\frac{4}{3\sqrt{2}}$  pour l'aire que la terre décrit, dans le même temps que la comète va de  $P$  en  $O$ ; mais si l'on appelle  $A$  la longueur ou la durée de l'année, on aura cette proportion: L'aire totale  $\frac{c}{2}$  de l'orbite terrestre est au temps  $A$ , comme l'aire  $\frac{4}{3\sqrt{2}}$  est au temps qui lui répond, & qui fera  $\frac{8A}{3c\sqrt{2}}$ ; c'est la valeur du temps que la comète emploie à décrire l'arc parabolique  $PO$  ou les  $90^\circ$  d'anomalie vraie.

Temps pour  
90°.

3031. La durée de l'année sydéral est  $365^h 6^m 9^s 10''$ , ou  $11''$  (888), c'est-à-dire, 365,256379, dont le logarithme est 2,5625977; si l'on en ôte le logarithme de  $\sqrt{2}$ , avec celui de trois fois la circonférence; & qu'on y ajoute le logarithme de 8, on aura celui de 109,6154, ou  $109^h 14^m 46^s 20''$  pour le temps qui répond à  $PO$ . Son logarithme est 2,0398716.

Il ne suffit pas d'avoir trouvé le temps employé à décrire ces  $90^\circ$  d'anomalie, il faut, pour calculer le lieu d'une comète en tout temps, connoître le nombre de jours qui répond à chaque portion de la parabole, comme



*PD*, ou à chaque angle d'anomalie vraie compté depuis le périhélie, en supposant toujours les aires proportionnelles au temps, c'est la matière du problème suivant. Fig. 262.

3032. CONNOISSANT l'anomalie vraie dans une parabole, trouver le temps écoulé depuis le périhélie. Je suppose que la parabole *PCOD* est donnée, c'est-à-dire, qu'on connoît sa distance périhélie *SP*, & le temps employé à parcourir l'arc *PO*; on demande le temps employé à parcourir un autre arc *PD*, ou un autre angle *PSD* d'anomalie vraie; on tirera la ligne *DP*, & ayant pris *ST* & *SR* égales au rayon vecteur *DS*, l'on tirera *DR* & *DT*, dont l'une fera la normale, & l'autre la tangente (3252).

3033. Si nous prenons la sous-normale *RQ* pour unité, nous aurons le paramètre égal à 2 (3252), &  $PQ = \frac{DQ^2}{2}$ ; le segment parabolique *DOPQ* qui est les deux tiers du produit des co-ordonnées (3327), ou  $\frac{2}{3} DQ \cdot PQ$ , fera  $\frac{1}{3} DQ^3$ ; le triangle *DPQ* est égal à  $\frac{1}{2} DQ \cdot PQ = \frac{1}{4} DQ^3$ , donc en le retranchant du segment *DOPQ*, il restera le segment  $DOPD = \frac{1}{12} DQ^3$ ; on y ajoutera la surface du triangle  $PDS = \frac{PS \cdot DQ}{2} = \frac{DQ}{4}$ , & l'on aura  $\frac{1}{12} DQ^3 + \frac{1}{4} DQ$  pour l'aire *PSDOP*.

3034. La ligne *RQ* étant prise pour l'unité, *DQ* est la tangente de l'angle  $DRQ = \frac{1}{2} DST$ , c'est-à-dire, la tangente de la moitié de l'anomalie vraie. Si nous appellons cette tangente *t*, nous aurons l'aire parabolique *PSDOP*, égale à  $\frac{t^3}{12} + \frac{t}{4}$ ; l'aire de 90° *PSO* sera alors  $= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$ . Mais il faut prendre l'aire *PSO* pour unité, & pour lors l'aire *PSDOP* devient  $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$ , car  $\frac{t^3}{12} + \frac{t}{4}$  est à  $\frac{1}{3}$ , comme  $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$  est à 1; ainsi l'aire de 90° étant connue, & la tangente d'une demi-anomalie vraie étant *t*, l'on multipliera l'aire de 90° par  $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$ , Expression  
du temps. & l'on aura l'aire décrite par la comète depuis son pas-

Sij

*Fig. 262.* sage par le périhélie ; mais les aires sont proportionnelles aux temps ; ainsi l'on aura de même le temps qui répond à PD, en multipliant les 109 jours, ou en général le temps de 90° par le quart de  $t^3 + 3t$ .

3035. EXEMPLE. La comète qui emploie 109 jours à parcourir 90° d'anomalie, ayant 47° d'anomalie vraie ; l'on demande combien de jours il s'est écoulé depuis le périhélie. La tangente  $t$  de 23°  $\frac{1}{2}$  est 0, 4348124, donc  $t^3 = 0,0829$ , & le quart de  $t^3 + 3t = 0, 3467$  ; il faut donc multiplier par 0, 3467 les 109 jours, ou le temps pour 90° (3031), l'on trouvera 38 jours ; ainsi la comète de 109 jours se trouvera à 47° de son périhélie au bout de 38 jours, comme on le voit dans la table générale dont nous allons parler.

3036. C'est ainsi que l'on trouveroit pour chaque degré d'anomalie vraie les jours correspondans ; ordinairement on a quelques fractions décimales de plus, parce qu'il est très-rare qu'à un degré précis d'anomalie on ait un nombre complet de jours ; mais avec des parties proportionnelles on trouve facilement les anomalies vraies qui répondent à chaque jour complet ; c'est ainsi qu'on a calculé la table générale qui se trouvera ci-après ; on y voit l'anomalie vraie qui répond à chaque jour de distance au périhélie pour la comète de 109 jours. On pourroit faire ce même calcul par une méthode directe, en résolvant l'équation  $t^3 + 3t = a$  ( $a$  exprime le quadruple du temps par  $PO$ ), pour trouver l'inconnue  $t$  ; mais il est plus facile de trouver le temps par le moyen de l'anomalie vraie, & il est superflu de chercher une autre méthode pour construire la table.

Elle sert à toutes les comètes.  
3037. Cette table s'applique facilement à toutes les comètes ; en effet, si l'on considère différentes comètes dans d'autres paraboles, à un même degré d'anomalie vraie, les temps écoulés depuis le passage au périhélie, seront entre eux comme les temps employés à aller du périhélie jusqu'à 90°, par exemple, quand  $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t$  sera égal à  $\frac{1}{2}$ , le temps sera la moitié du temps pour 90°, dans toutes les paraboles possibles ; delà il suit que pour une comète

quelconque si je connois le temps des  $90^\circ$ , j'aurai (avec une simple règle de trois) le temps pour tout autre angle d'anomalie vraie en me servant de la table calculée pour la comète de 109 jours. Il ne reste donc plus qu'à chercher le temps des  $90^\circ$  pour des paraboles plus ou moins grandes, ou le nombre de jours qu'exigera l'arc  $PO$ , quand la distance périhélie  $SP$  ne sera plus égale à la moyenne distance de la terre au soleil ; c'est ce que je vais faire par le moyen du théorème suivant.

3038. LES CARRÉS DES TEMPS qui répondent à une même anomalie vraie dans différentes paraboles, sont comme les cubes des distances périhéliees. Cette loi analogue à celle du mouvement des planètes (1224), est tout de même une suite nécessaire des forces centrales (3396) ; en effet, nous avons démontré que sur le rayon de l'orbite terrestre décrit en 365 $\frac{1}{2}$ , on avoit un quart de parabole de 109 jours ; ainsi le temps de la parabole est environ  $\frac{1}{10}$  de celui du cercle ; mais si l'on considère différens cercles ou différentes planètes, à d'autres distances du soleil, on aura différentes révolutions dont les carrés des temps seront comme les cubes des distances (1224, 3396) ; donc les temps des paraboles qui en sont toujours les  $\frac{1}{10}$  seront aussi dans la même proportion ; donc les temps qui répondent à  $PO$ , sont comme les racines carrées des cubes des distances périhéliees  $SP$ .

Les carrés  
des temps  
sont comme  
les cubes  
des distances.

3039. UNE SEULE TABLE servira donc pour trouver l'anomalie vraie dans toutes les paraboles pourvu que l'on augmente les temps en raison de la racine carrée du cube de la distance périhélie ; en effet, pour un même degré d'anomalie vraie, les carrés des temps de différentes paraboles doivent augmenter comme les cubes des distances périhéliees, ou les temps comme les racines carrées des cubes des distances périhéliees ; ainsi à  $90^\circ$  d'anomalie vraie répondent 109 jours quand la distance périhélie est 10 (3031), & 126 jours quand la distance périhélie est 11, parce que la racine carrée du cube de 11 est plus grande dans le même rapport ; il

# 326 ASTRONOMIE, LIV. XIX.

faut donc augmenter aussi à proportion les autres nombres de jours, quand on cherchera, dans la table générale, les anomalies pour la comète de 126 jours.

J'ai mis dans la table ci-jointe, à côté de chaque distance périhélie, le nombre par lequel il faut multiplier les jours de la table générale, pour avoir les jours qui dans d'autres comètes répondent à une même anomalie; je suppose la distance du soleil à la terre divisée en dix parties, & j'ai calculé le nombre des jours pour l'arc *PO* dans onze paraboles différentes.

Dist. périhel. en dixièmes de celle du Soleil.	Nomb. par lequel on mul- tiplie les jours de la table.	Jours pour 90°.
1	0,035	3,5
2	0,089	9,8
3	0,164	18,0
4	0,253	27,7
5	0,353	38,8
6	0,465	50,9
7	0,585	64,2
8	0,715	78,4
9	0,854	93,6
10	1,000	109,6
11	1,152	126,3

3040. On voit par cette table que quand la distance périhélie d'une comète, est  $\frac{4}{10}$  de celle de la terre au soleil, il faut, au lieu des jours de la table générale, en prendre d'autres qui ne soient que 0,25 ou le quart; voilà pourquoi cette comète n'emploie que 28 jours à parcourir les 90° d'anomalie, & nous pouvons l'appeller la comète de 28 jours, comme nous avons appelé comète de 109 jours (pour abréger), celle qui emploieroit environ 109 jours à aller du périhélie jusqu'à 90° d'anomalie.

Donc pour chaque degré d'anomalie, au logarithme des jours de la table, il faudra ajouter une fois & demie le logarithme de la distance périhélie d'une comète donnée, pour avoir le nombre de jours qui répond à cette comète donnée, pour le même degré d'anomalie; au contraire quand le nombre de jours écoulés depuis le périhélie d'une comète quelconque sera donné, il faudra ôter les  $\frac{1}{2}$  du logarithme de la distance périhélie, du logarithme des jours donnés, qui conviennent à une certaine comète, & l'on aura le logarithme des jours qu'il faut chercher dans la table générale.

3041. EXEMPLE, on a trouvé par observation que la célèbre comète de 1759, décrivait une parabole dont

Règle  
générale.

Trouver l'a-  
nomalie vraie.

la distance périhélie étoit 0,5849, & qu'elle avoit passé par son périhélie, le 12 Mars à  $13^h 59' 24''$  de temps moyen au méridien de Paris; on demande l'anomalie vraie de la comète & sa distance au soleil, le 1 Mai à  $8^h 54' 40''$ , c'est-à-dire, 49<sup>j</sup>  $18^h 55' 16''$  après le passage au périhélie. On réduit pour plus de facilité les heures en décimales de jours, par le moyen de la petite table qu'on trouvera ci-après avant la table générale, parce que les parties proportionnelles sont plus aisées à faire avec des décimales, & les logarithmes plus aisés à chercher; on a donc 49<sup>j</sup>, 7884; du logarithme de ce nombre j'ôte une fois & demie celui de la distance périhélie, il me reste 2,0465058 auquel répond dans les tables 1111, 3282; avec ce nombre de jours qui convient à la comète de 109<sup>j</sup>, je cherche l'anomalie dans la table générale, & je trouve  $90^{\circ} 35' 26''$ , c'est l'anomalie vraie cherchée pour le 1 Mai 1759. On en verra le calcul à la suite de la table générale.

3042. Le rayon vecteur de la comète ou sa distance au soleil est égal à la distance périhélie  $SP$ , divisée par le carré du cosinus de la moitié de l'anomalie vraie (3253). Cette distance étoit donc dans notre exemple

Trouver la distance.

$\frac{0,5849}{(\cos. \frac{1}{2} \text{anom.})^2}$ ; ainsi je prends le double du log. cof. de  $45^{\circ} 17' 43''$ , qui est 9,6944705 que je retranche du log. de la dist. périhélie, il reste 0,0726111, log. de 1,18198; c'est la distance de la comète. Si l'on veut éviter les fractions décimales, & les logarithmes de fractions, on peut supposer la distance du soleil égale, non à l'unité, mais à 100000, comme dans nos tables du soleil & des planètes, on n'aura pour lors que des nombres ordinaires dans le calcul; la distance périhélie sera 58490, & la distance trouvée 118198 de ces mêmes parties.

3043. Quand on connoît deux rayons vecteurs d'une parabole, avec l'angle compris, on peut trouver la distance périhélie & les deux anomalies qui répondent aux rayons vecteurs. Soient  $b$  &  $c$  les deux rayons vecteurs d'une parabole, dont 1 est la distance périhélie,  $a$  le quart de la somme des deux anomalies vraies,  $x$  le quart

de la différence de ces deux anomalies, on aura cette proportion :  $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} :: \cotang. a : \tan g. x$ .

DÉM. Le carré du cosinus de la moitié d'une anomalie vraie est au carré du rayon, comme 1 est au rayon vecteur (3253) ; mais la plus grande des deux anomalies est  $2a + 2x$ , la plus petite  $2a - 2x$  ; ainsi  $\sqrt{b} : \sqrt{c} :: \cos. (a - x) : \cos. (a + x)$  ; or  $\cos. (a - x) = \cos. a \cos. x + \sin. a \sin. x$ , &  $\cos. (a + x) = \cos. a \cos. x - \sin. a \sin. x$  (3618, 3620) ; donc  $\sqrt{b} \cos. a \cos. x - \sqrt{c} \cos. a \cos. x = \sqrt{b} \sin. a \sin. x + \sqrt{c} \sin. a \sin. x$  ; donc  $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} :: \cos. a \cos. x : \sin. a \sin. x :: \frac{\cos. a}{\sin. a} : \frac{\sin. x}{\cos. x} :: \cot. a : \tan g. x$ , c'est-à-dire, que la somme des racines des rayons vecteurs est à leur différence, comme la cotangente de la demi-somme des demi-anomalies vraies est à la tangente de leur demi-différence (M. Niccolic, *Mém. de l'acad.* 1746, pag. 302. M. de la Caille, *ib.* pag. 429). Nous ferons usage de cette règle dans la recherche des orbites cométaires (3058, 3074).

Lorsqu'on a deux quantités inégales, & qu'on fait cette proportion la plus grande est à la plus petite comme le rayon est à la tangente d'un angle ; ôtant  $45^\circ$  de l'angle trouvé, on peut toujours dire, le rayon est à la tangente du reste comme la somme des deux quantités données est à leur différence (3643) ; on dira donc aussi dans le cas dont nous parlons ;  $1^\circ$ , la racine du plus petit des deux rayons vecteurs est à la racine du plus grand comme le rayon est à la tangente d'un angle, dont on ôtera  $45^\circ$  ;  $2^\circ$ , le rayon est à la tangente du reste comme la cotangente du quart de la somme des deux anomalies est à la tangente du quart de leur différence ; ou comme la cot. du quart de la différence est à la tang. du quart de la somme ; ce qui est très-commode dans cette opération, c'est qu'elle sert également pour trouver la somme ; ou pour trouver la différence des anomalies, en sorte qu'on n'a pas besoin de savoir si les deux rayons vecteurs sont du même côté du périhélie.

*Calculer l'orbite d'une Comète par trois observations.*

3044. JUSQU'ICI j'ai expliqué la manière de distribuer le mouvement d'une comète déjà connue, sur les différens points de la parabole qu'elle décrit, parce qu'en effet, il fallut connoître les loix de ce mouvement, comme Newton les donna dans son livre des principes, ou comme je viens de les expliquer, avant de reconnoître que ces loix s'observoient dans le ciel : nous sommes en état de chercher actuellement quelle est la parabole qu'une comète décrit autour du soleil, pourvu que nous ayons trois observations de son lieu apparent dans le ciel ; car une parabole dont le foyer est donné peut se déterminer par trois points, aussi bien qu'une ellipse (1293), mais la difficulté devient beaucoup plus grande pour les comètes, parce que les trois longitudes données, ne sont pas des longitudes vues du soleil. Ce problème que Newton se proposoit même dans la première édition de ses principes (en 1687), seroit extrêmement difficile, si l'on n'y employoit pas une opération graphique, ou des approximations & des méthodes indirectes. Par exemple, Newton (*Princip. mathem.* L. III. pr. 41. *Arithmet. universalis*) résout d'abord ce problème : *l'orbite d'une comète supposée rectiligne & uniformément parcourue, déterminer cette ligne par le moyen de quatre longitudes observées* : ce problème sert à trouver ensuite avec assez de facilité l'orbite entière d'une comète ; mais il faut prendre d'abord des observations peu éloignées entre elles, & assez éloignées du périhélie pour que la vitesse soit sensiblement uniforme, & la direction rectiligne. Cette solution se réduit à trouver une ligne droite qui soit coupée par quatre lignes droites dans la raison donnée, qui est celle des temps. Le problème est à la vérité presque toujours déterminé ; mais le P. Boscovich observe dans une dissertation sur les comètes imprimée en 1744, que ce problème est indéterminé lorsqu'on suppose les 4 lignes tirées de 4 lieux de la terre situés de même en ligne droite ; &

il l'a montré d'une autre manière dans un mémoire inséré à la fin de l'édition de l'arithmétique universelle, donnée en Hollande par M. Castillon.

Le P. Boscovich, dans le même endroit, fait voir qu'il y a un semblable défaut dans la méthode que M. Bouguer a donnée pour déterminer l'orbite d'une comète par trois observations très-voisines, en supposant une portion d'hyperbole sensiblement rectiligne, (*Mém. de l'acad.* 1733). Enfin, le P. Boscovich a donné dans cette dissertation une méthode, qu'il m'a envoyée depuis ce temps-là dans une forme plus élégante & plus simple, pour déterminer l'orbite par trois observations peu éloignées l'une de l'autre, en supposant toujours que le mouvement est à peu-près rectiligne, mais en y ajoutant la considération de la vitesse absolue de la comète qui dépend de sa distance au soleil. M. Euler suppose aussi trois lieux observés à de petits intervalles proportionnels au temps, & la distance de la comète au soleil à peu-près connue dans l'observation moyenne; ayant fait ainsi plusieurs suppositions, il examine laquelle représente le mieux une 4<sup>e</sup> observation fort éloignée des trois autres, & il en déduit les véritables élémens. (*Euleri Theoria motuum Planetarum & Cometarum*, in-4<sup>o</sup> à Berlin 1744, pag. 57 & 139). Voyez aussi les mémoires de M. Fontaine, l'ouvrage de M. Lambert: *Insigniores orbitæ Cometarum proprietates*, *Augustæ Vindelic.* 1761, in-8<sup>o</sup>. Un mémoire du P. Charles Walmesley, &c. mais la méthode que je vais expliquer me paroît la plus commode & la plus courte.

Paraboles  
divisées en  
jours.

Fig. 267.

3045. Je suppose pour guider le calcul qu'on ait formé avec du carton 10 paraboles, sur les distances périhélicies 1, 2, 3, &c. & qu'elles soient divisées en jours, comme dans la figure 267; le cercle *ABC* représente l'orbite de la terre, le soleil étant en *S*, la parabole *CD* est celle de la comète de 109 jours dont la distance périhélie *SC* est égale à celle de la terre au soleil; cette parabole est divisée en jours, pour servir d'exemple à ceux qui voudroient faire usage de cette méthode, & la division s'étend jusqu'à une distance 5 fois & demi plus grande



que celle du soleil à la terre; c'est beaucoup plus que l'éloignement dans lequel les comètes disparaissent ordinairement à nos yeux; on voit qu'au point *D* la comète se trouveroit à 440 jours de son périhélie, l'abscisse *SE* mesurée sur l'axe de la parabole seroit alors de 3 fois & demi la distance du soleil à la terre, & l'ordonnée *ED*  $= 4\frac{1}{4}$ . Je suppose qu'on ait calculé de même les ordonnées, les distances au soleil, les anomalies & les jours correspondans pour différentes abscisses, telles que *SE*, ou pour différens jours, dans onze paraboles (3039); on pourra aisément former des paraboles de carton sur une échelle triple de celle de la figure 267; on les divisera en jours; ces courbes étant découpées, on s'en servira comme je vais l'expliquer, pour trouver celle qui convient à trois observations d'une comète inconnue. Au reste, les astronomes qui ont de l'habitude dans le calcul, se passeront aisément de ces préliminaires, & commenceront par le calcul d'une hypothèse (3055).

3046. Je prendrai pour exemple la comète que j'observai au mois de Mai 1763: soit *S* le soleil (fig. 263), *ABC* l'orbite de la terre qui étoit en *A* le 17 Mai 1763, en *B* le 30 Mai, & en *C* le 24 Juin; la différence entre la longitude de la comète observée, & la longitude du soleil calculée par les tables, c'est-à-dire, l'angle d'élongation de la comète réduit au plan de l'écliptique le 17 Mai fut observé de  $11^{\circ}\frac{1}{3}$ , dont la comète étoit à l'orient dans la première observation: je fais donc l'angle *SAD* de  $11^{\circ}\frac{1}{3}$ ; je fais de même les angles *SBE* de  $25^{\circ}50'$ , & *SCF* de  $35^{\circ}20'$ ; ce sont les élongations observées le 30 Mai & le 24 Juin: par ce moyen j'ai les trois lignes *AD*, *BE*, *CF*, au-dessus desquelles répondoit perpendiculairement la comète dans les trois observations. Il faut ensuite tendre au-dessus de ces trois lignes des fils qui fassent avec elles aux points *A*, *B*, *C*, des angles de  $44^{\circ}10'$ ,  $38^{\circ}15'$  &  $18^{\circ}56'$ ; ce sont les latitudes de la comète vues de la terre dans les trois observations; ces fils représenteront les rayons visuels dirigés de la terre à la comète dans ces trois observations.

Fig. 263.

Opération  
graphique.

Je suppose que le demi-cercle  $ABCL$  soit évidé d'un côté, afin que le centre  $S$  soit libre, & qu'on puisse y présenter les paraboles de la fig. 267.

3047. On prendra la parabole de 18 jours, c'est-à-dire, celle dont la distance périhélie est trois dixièmes de celle du soleil (3039), & plaçant le foyer de cette parabole en  $S$  on présentera sa circonférence contre les fils tendus des points  $A, B, C$ , au-dessus des lignes  $AD, BE, CF$ ; alors on verra que cette parabole est trop petite pour pouvoir s'ajuster contre ces fils dans leur partie inférieure près des points  $A, B, C$ , & qu'elle est trop oblique, c'est-à-dire, trop longue & trop étroite pour pouvoir y convenir dans des parties plus éloignées, du côté des points  $D, E, F$ .

On prendra donc des paraboles plus larges; l'on trouvera bientôt que celle de 109 jours est la plus convenable, la plus approchante des fils, celle qui s'y ajuste le mieux; on tournera cette parabole en différens sens, pour faire en sorte que les nombres de jours qui seront interceptés entre les fils soient égaux aux intervalles des observations, qui dans l'exemple proposé sont de 13 & de 25 jours. On verra facilement qu'en mettant le périhélie ou le sommet de cette parabole sur le fil du milieu qui répond au-dessus de  $BE$ , le fil de la droite touche la parabole en  $G$ , 13 jours avant le périhélie, & le fil de la gauche la touche en  $K$ , 25 jours plus loin que le périhélie; cela fait voir que la comète passoit par le périhélie lorsqu'elle paroissoit en  $H$ , aux environs du 30 Mai, & que sa distance au soleil étoit 10, c'est-à-dire, égale à celle du soleil; on verra même à peu-près les distances réduites à l'écliptique dans les trois observations, c'est à dire, les lignes  $SG, SH, SK$ , & l'on sera en état de former une hypothèse fort approchante des observations, avec laquelle on commencera les calculs (3055).

3048. De toutes ces paraboles que je suppose divisées en jours, & que l'on présente successivement sous les fils, il n'y en a qu'une qui puisse être assujettie à ces trois conditions, d'avoir son foyer au centre  $S$  du soleil, de toucher

les trois lignes menées de la terre à la comète dans les trois observations, & d'avoir entre les trois points de contact des intervalles de temps, égaux à ceux qu'on a observés.

3049. Ainsi l'on est sûr de trouver, par l'opération pratique dont je viens de donner une idée, la parabole unique, propre à satisfaire aux trois longitudes & aux trois latitudes vues de la terre. Non-seulement on a la grandeur de cette parabole, c'est-à-dire, sa distance périhélie; mais on en a encore sa situation, c'est-à-dire, le lieu de son périhélie, & celui de son nœud; car on peut voir à quel point du cercle *ABCL* répond la section des deux plans ou le diamètre qui forme la ligne commune du cercle & de la parabole, & c'est le lieu du nœud.

3050. La situation de l'orbite sera d'autant mieux déterminée que les intervalles des temps seront plus longs, les longitudes & les latitudes observées plus éloignées l'une de l'autre, le mouvement plus inégal, & les anomalies de la comète plus différentes (3084); mais la méthode que je vais bientôt expliquer est générale, & ne suppose aucune condition dans les observations qu'on emploie.

Choix des  
observations.

3051. Quand on connoît à peu-près par une opération graphique les élémens d'une comète, on doit employer le calcul pour les trouver exactement. Pour cela nous ne pouvons rien faire de plus commode & de plus simple que d'employer des méthodes indirectes, comme nous l'avons fait pour déterminer les orbites des planètes par trois observations (1293); nous supposerons donc connu ce qu'il s'agit de trouver, & avec un petit nombre de fausses positions nous parviendrons bientôt à trouver exactement ce que nous cherchons. Ce fut probablement la route de M. Halley; M. Bradley perfectionna ensuite cette méthode, (*M. le Monnier, théorie des comètes, 1743. Institut. astron. 1746, pag. 349*). M. l'Abbé de la Caille la rendit encore plus commode (*Mém. acad. 1746. Leçons d'astron. 1761*). Enfin, je crois l'avoir moi-même rendue plus simple dans ma *théorie des comètes*

# 334 ASTRONOMIE, Liv. XIX.

à la suite des tables de M. Halley, que je publiai en 1759, & sur-tout dans l'explication suivante.

Idee générale du problème.

ON CHOISIT d'abord deux longitudes & deux latitudes observées; on cherche les paraboles qui peuvent satisfaire à ces deux observations corrigées; quand on a deux ou trois paraboles, c'est-à-dire, deux ou trois hypothèses qui s'accordent également bien avec les deux observations, on calcule dans chacune de ces trois hypothèses le lieu de la comète au temps de la troisième observation; celle des hypothèses qui s'accorde le mieux avec le calcul de cette troisième observation est la meilleure, & une simple règle de proportion suffit quelquefois pour trouver une autre hypothèse qui satisfait exactement à toutes trois.

3052. La TABLE générale du mouvement des comètes dans un orbe parabolique, dont j'ai ci-devant expliqué la construction & l'usage (3034 & suiv.), étant absolument nécessaire dans tous les calculs suivans, je vais la placer ici de même que la table préliminaire pour qu'on les trouve jointes aux préceptes du calcul.

TABLE pour réduire les Heures, Minutes & Secondes en fractions décimales de jours (3041).

Heures.	Décimal. de jour.	Heures.	Décimal. de jour.	Minutes.	Décimal. de jour.	Minutes.	Décimal. de jour.	Minutes.	Décimal. de jour.	Minutes.	Décimal. de jour.	Secondes.	Décimales de jour.
1	0,041666	13	0,541666	1	0,006944	13	0,090277	25	0,173611	37	0,256944	49	0,340277
2	0,083333	14	0,583333	2	0,013888	14	0,097222	26	0,180555	38	0,263888	50	0,347222
3	0,125000	15	0,625000	3	0,020833	15	0,104166	27	0,187500	39	0,270833	51	0,354166
4	0,166666	16	0,666666	4	0,027777	16	0,111111	28	0,194444	40	0,277777	52	0,361111
5	0,208333	17	0,708333	5	0,034722	17	0,118055	29	0,201388	41	0,284722	53	0,368055
6	0,250000	18	0,750000	6	0,041666	18	0,125000	30	0,208333	42	0,291666	54	0,375000
7	0,291666	19	0,791666	7	0,048611	19	0,131944	31	0,215277	43	0,298611	55	0,381944
8	0,333333	20	0,833333	8	0,055555	20	0,138888	32	0,222222	44	0,305555	56	0,388888
9	0,375000	21	0,875000	9	0,062500	21	0,145833	33	0,229166	45	0,312500	57	0,395833
10	0,416666	22	0,916666	10	0,069444	22	0,152777	34	0,236111	46	0,319444	58	0,402777
11	0,458333	23	0,958333	11	0,076388	23	0,159722	35	0,243055	47	0,326388	59	0,409722
12	0,500000	24	1,000000	12	0,083333	24	0,166666	36	0,250000	48	0,333333	60	0,416666

Les nombres terminés par deux points se continuent à l'infini en répétant le dernier chiffre. La virgule qui précède les décimales, suppose qu'il y ait un zéro auparavant.

## TABLE GÉNÉRALE DU MOUVEMENT DES COMETES,

Ou Anomalie vraie de la Comète de 109 jours (3036).

N.B. Le Logarithme des jours de cette Table ajouté avec les  $\frac{1}{2}$  du log. de la dif. périh. de toute autre Comète, donne le log. des jours qui lui conviendront (3039).

Jours & centièmes de jours.	Anomalie vraie.	Diffr.	Jours & centièmes de jours.	Anomalie vraie.	Diffr.	Jours & centièmes de jours.	Anomalie vraie.	Diffr.	Jours & centièmes de jours.	Anomalie vraie.	Diffr.	Jours & centièmes de jours.	Anomalie vraie.	Diffr.
D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.		D. M. S.	M. S.	
0 00	0 0 0	20 54	12 50	17 9 45	19 58	25 00	32 55 27	17 30	37 50	46 30 21	14 52	0 25	0 20 54	20 54
0 50	0 41 48	20 55	12 55	17 29 43	19 56	25 25	33 13 6	17 36	37 75	46 45 13	14 49	1 00	1 1 2 43	20 55
0 75	1 2 43	20 54	13 00	17 49 30	19 53	25 50	33 30 42	17 33	38 00	47 0 2	14 45	1 00	1 23 37	20 54
1 00	1 23 37	20 54	13 05	18 9 32	19 52	26 00	34 5 45	17 30	38 50	47 29 29	14 39	1 25	1 44 31	20 54
1 25	1 44 31	20 54	13 10	18 49 14	19 47	26 25	34 23 11	17 23	39 00	47 44 8	14 36	1 50	2 5 25	20 53
1 50	2 5 25	20 53	14 00	19 9 1	19 45	26 50	34 40 34	17 20	39 50	47 58 44	14 32	1 75	2 26 18	20 53
1 75	2 26 18	20 53	14 25	19 28 46	19 43	26 75	34 57 54	17 17	39 25	48 13 16	14 29	2 00	2 47 12	20 52
2 00	2 47 12	20 52	14 50	19 48 29	19 40	27 00	35 15 11	17 14	39 50	48 27 45	14 26	2 25	3 8 5	20 52
2 25	3 8 5	20 52	14 75	20 8 9	19 38	27 25	35 32 25	17 10	39 75	48 42 11	14 23	2 50	3 28 57	20 52
2 50	3 28 57	20 52	15 00	20 27 47	19 35	27 50	35 49 35	17 7	40 25	48 56 34	14 20	3 25	3 49 49	20 51
3 25	4 10 40	20 51	15 25	20 47 22	19 33	27 75	36 6 42	17 3	40 50	49 10 54	14 16	3 50	4 31 31	20 50
3 50	4 31 31	20 50	15 50	21 6 55	19 30	28 00	36 23 45	17 0	40 75	49 25 10	14 13	4 25	5 13 11	20 50
4 25	5 13 11	20 49	16 00	21 26 25	19 28	28 25	36 40 45	16 57	41 00	49 39 23	14 9	4 50	5 34 0	20 49
4 50	5 34 0	20 48	16 25	21 45 53	19 25	28 50	36 57 42	16 53	41 25	49 53 32	14 6	5 25	6 15 35	20 48
5 25	6 15 35	20 48	16 50	22 24 41	19 23	29 00	37 31 25	16 50	41 50	50 21 41	14 3	5 50	6 36 22	20 47
5 50	6 36 22	20 47	17 00	22 44 1	19 20	29 25	37 48 11	16 46	42 00	50 35 41	14 0	6 25	7 17 53	20 46
6 25	7 17 53	20 46	17 25	23 3 19	19 18	29 50	38 4 54	16 43	42 25	50 49 38	13 57	6 50	7 38 37	20 45
6 50	7 38 37	20 45	17 50	23 22 34	19 15	29 75	38 21 34	16 40	42 50	51 3 31	13 53	7 25	8 0 20	20 44
7 25	8 0 20	20 44	18 00	23 41 46	19 12	30 00	38 38 11	16 37	43 00	51 17 21	13 50	7 50	8 20 2	20 43
7 50	8 20 2	20 43	18 25	24 0 56	19 10	30 25	38 54 44	16 33	43 25	51 31 8	13 47	8 25	8 40 43	20 42
8 25	8 40 43	20 42	18 50	24 20 3	19 7	30 50	39 11 14	16 30	43 50	51 44 52	13 44	8 50	9 1 23	20 41
8 50	9 1 23	20 41	19 00	24 39 8	19 4	31 00	39 27 41	16 27	44 00	51 58 33	13 41	9 25	9 22 1	20 40
9 25	9 22 1	20 40	19 25	24 58 7	18 59	31 25	39 44 4	16 23	44 25	52 12 10	13 37	9 50	9 42 38	20 39
9 50	9 42 38	20 39	19 50	25 17 7	18 56	31 50	40 0 24	16 20	44 50	52 25 44	13 34	10 25	10 3 14	20 38
10 25	10 3 14	20 38	20 00	25 36 3	18 53	32 00	40 16 40	16 16	45 00	52 39 19	13 31	10 50	10 23 49	20 37
10 50	10 23 49	20 37	20 25	25 54 56	18 50	32 25	40 32 53	16 13	45 25	52 52 43	13 28	11 25	10 44 22	20 36
11 25	10 44 22	20 36	20 50	26 13 46	18 47	32 50	40 49 39	16 10	45 50	53 6 8	13 25	11 50	11 4 54	20 35
11 50	11 4 54	20 35	21 00	26 32 33	18 44	33 00	41 5 10	16 7	46 00	53 19 29	13 21	12 25	11 25 24	20 34
12 25	11 25 24	20 34	21 25	26 51 17	18 41	33 25	41 21 13	16 0	46 25	53 32 48	13 18	12 50	11 45 53	20 33
12 50	11 45 53	20 33	21 50	27 9 59	18 38	33 50	41 37 13	15 56	46 50	53 46 3	13 15	1 00	12 6 20	20 32
1 00	12 6 20	20 32	22 00	27 28 37	18 35	34 00	41 53 9	15 53	47 00	53 59 16	13 13	1 25	12 26 46	20 31
1 25	12 26 46	20 31	22 25	27 47 13	18 32	34 25	42 9 2	15 50	47 25	54 12 25	13 9	1 50	12 47 10	20 30
1 50	12 47 10	20 30	22 50	28 5 45	18 30	34 50	42 24 51	15 47	47 50	54 25 31	13 6	2 25	13 7 33	20 29
2 25	13 7 33	20 29	23 00	28 24 15	18 26	35 00	42 40 37	15 44	48 00	54 38 34	13 3	2 50	13 27 54	20 28
2 50	13 27 54	20 28	23 25	28 42 41	18 24	35 25	42 56 19	15 42	48 25	54 51 35	13 1	3 25	13 48 14	20 27
3 25	13 48 14	20 27	23 50	29 1 5	18 21	35 50	43 11 58	15 39	48 50	55 4 32	12 57	3 50	14 8 32	20 26
3 50	14 8 32	20 26	24 00	29 19 25	18 20	36 00	43 27 34	15 36	49 00	55 17 26	12 54	4 25	14 28 48	20 25
4 25	14 28 48	20 25	24 25	29 37 42	18 17	36 25	43 43 6	15 33	49 25	55 30 17	12 51	4 50	14 49 2	20 24
4 50	14 49 2	20 24	24 50	29 55 57	18 15	36 50	43 58 35	15 29	49 50	55 43 5	12 48	5 25	15 9 14	20 23
5 25	15 9 14	20 23	25 00	30 14 8	18 11	37 00	44 14 1	15 26	50 00	55 56 49	12 44	5 50	15 29 24	20 22
5 50	15 29 24	20 22	25 25	30 32 16	18 8	37 25	44 29 23	15 23	50 25	56 8 11	12 42	6 25	15 49 33	20 21
6 25	15 49 33	20 21	25 50	30 50 21	18 5	37 50	44 44 42	15 20	50 50	56 21 10	12 39	6 50	16 9 39	20 20
6 50	16 9 39	20 20	26 00	31 8 23	17 58	38 00	44 59 58	15 16	51 00	56 33 43	12 35	7 25	16 29 43	20 19
7 25	16 29 43	20 19	26 25	31 26 21	17 55	38 25	45 15 13	15 13	51 25	56 46 18	12 33	7 50	16 49 45	20 18
7 50	16 49 45	20 18	26 50	31 44 17	17 52	38 50	45 30 19	15 9	51 50	56 58 48	12 30	8 25	17 9 45	20 17
8 25	17 9 45	20 17	27 00	32 2 9	17 49	39 00	45 45 25	15 6	52 00	57 11 15	12 27	8 50		20 16
8 50		20 16	27 25	32 19 58	17 46	39 25	46 0 27	15 3	52 25	57 23 39	12 24	9 25		20 15
9 25		20 15	27 50	32 37 44	17 43	39 50	46 15 26	14 59	52 50	57 36 0	12 21	9 50		20 14
9 50		20 14	28 00	32 55 27	17 40	40 00	46 30 21	14 56	53 00	57 48 18	12 18	10 25		20 13

Jours & centièmes de j.	Anomalie vraie. D. M. S.	Diffé.	Jours & centièmes de j.	Anomalie vraie. D. M. S.	Diffé.	Jours & centièmes de j.	Anomalie vraie. D. M. S.	Diffé.	Jours & centièmes de j.	Anomalie vraie. D. M. S.	Diffé.	Jours & centièmes de j.	Anomalie vraie. D. M. S.	Diffé.
50,00	57 43 18	12 15	65,00	68 44 34	9 41	80,00	77 25 23	7 44	95,00	84 24 38	6 17	100,00	84 24 38	6 17
50 25	58 0 33	12 15	65 25	68 54 15	9 39	80 25	77 33 7	7 43	95 25	84 30 55	6 16	100 25	84 30 55	6 16
50 50	58 12 45	12 10	65 50	69 3 54	9 37	80 50	77 40 31	7 41	95 50	84 37 11	6 15	100 50	84 37 11	6 15
50 75	58 24 55	12 7	65 75	69 13 31	9 34	81 00	77 48 31	7 39	95 75	84 43 26	6 13	100 75	84 43 26	6 13
51 00	58 37 2	12 4	66 00	69 23 5	9 32	81 25	77 56 10	7 37	96 00	84 49 39	6 12	101 00	84 49 39	6 12
51 25	58 49 6	12 1	66 25	69 32 37	9 30	81 50	78 3 47	7 35	96 25	84 55 51	6 11	101 25	84 55 51	6 11
51 50	59 1 7	11 58	66 50	69 42 7	9 28	82 00	78 11 23	7 34	96 50	85 2 2	6 10	101 50	85 2 2	6 10
51 75	59 13 5	11 56	66 75	69 51 35	9 26	82 25	78 18 57	7 33	97 00	85 8 12	6 9	102 00	85 8 12	6 9
52 00	59 25 1	11 53	67 00	70 1 1	9 24	82 50	78 26 30	7 31	97 25	85 14 20	6 7	102 25	85 14 20	6 7
52 25	59 36 54	11 50	67 25	70 10 25	9 21	83 00	78 34 1	7 30	97 50	85 20 27	6 6	102 50	85 20 27	6 6
52 50	59 48 44	11 47	67 50	70 19 46	9 19	83 25	78 41 31	7 28	98 00	85 26 33	6 5	103 00	85 26 33	6 5
52 75	60 0 31	11 44	67 75	70 29 5	9 17	83 50	78 48 59	7 26	98 25	85 32 38	6 4	103 25	85 32 38	6 4
53 00	60 12 15	11 41	68 00	70 38 22	9 15	84 00	78 56 25	7 25	98 50	85 38 42	6 3	103 50	85 38 42	6 3
53 25	60 23 56	11 39	68 25	70 47 37	9 13	84 25	79 3 50	7 23	99 00	85 44 45	6 1	104 00	85 44 45	6 1
53 50	60 35 35	11 36	68 50	70 56 50	9 10	84 50	79 11 13	7 22	99 25	85 50 46	6 0	104 25	85 50 46	6 0
53 75	60 47 11	11 33	69 00	71 6 0	9 9	85 00	79 18 35	7 20	99 50	85 56 46	5 59	104 50	85 56 46	5 59
54 00	60 58 44	11 31	69 25	71 15 9	9 7	85 25	79 25 55	7 18	100 00	86 2 45	5 58	105 00	86 2 45	5 58
54 25	61 10 15	11 28	69 50	71 24 16	9 6	85 50	79 33 13	7 17	100 25	86 8 43	5 56	105 25	86 8 43	5 56
54 50	61 21 43	11 25	70 00	71 33 20	9 4	86 00	79 40 30	7 15	100 50	86 14 39	5 55	105 50	86 14 39	5 55
54 75	61 33 8	11 22	70 25	71 42 23	9 3	86 25	79 47 49	7 14	101 00	86 20 34	5 54	106 00	86 20 34	5 54
55 00	61 44 30	11 20	70 50	71 51 23	8 58	86 50	79 54 31	7 12	101 25	86 26 28	5 53	106 25	86 26 28	5 53
55 25	61 55 50	11 17	71 00	72 0 21	8 57	87 00	80 2 11	7 10	101 50	86 32 14	5 52	106 50	86 32 14	5 52
55 50	62 7 7	11 14	71 25	72 9 18	8 54	87 25	80 9 22	7 9	102 00	86 38 55	5 51	107 00	86 38 55	5 51
55 75	62 18 24	11 11	71 50	72 18 12	8 52	87 50	80 16 31	7 7	102 25	86 44 55	5 50	107 25	86 44 55	5 50
56 00	62 29 32	11 9	72 00	72 27 4	8 50	88 00	80 23 38	7 6	102 50	86 50 45	5 49	107 50	86 50 45	5 49
56 25	62 40 41	11 6	72 25	72 35 54	8 48	88 25	80 30 44	7 5	103 00	86 56 28	5 48	108 00	86 56 28	5 48
56 50	62 51 47	11 4	72 50	72 44 23	8 47	88 50	80 37 49	7 4	103 25	87 2 12	5 47	108 25	87 2 12	5 47
56 75	63 2 51	11 1	73 00	72 53 29	8 44	89 00	80 44 53	7 3	103 50	87 8 12	5 46	108 50	87 8 12	5 46
57 00	63 13 52	10 58	73 25	73 2 13	8 42	89 25	80 51 55	7 2	104 00	87 14 12	5 45	109 00	87 14 12	5 45
57 25	63 24 50	10 56	73 50	73 10 50	8 41	89 50	80 58 55	6 59	104 25	87 20 12	5 44	109 25	87 20 12	5 44
57 50	63 35 46	10 53	74 00	73 19 50	8 38	90 00	81 5 54	6 58	104 50	87 26 12	5 43	109 50	87 26 12	5 43
57 75	63 46 39	10 51	74 25	73 28 14	8 37	90 25	81 12 55	6 56	105 00	87 32 12	5 42	110 00	87 32 12	5 42
58 00	63 57 30	10 48	74 50	73 36 51	8 34	90 50	81 19 48	6 55	105 25	87 38 12	5 41	110 25	87 38 12	5 41
58 25	64 8 18	10 46	75 00	73 45 25	8 33	91 00	81 26 43	6 53	105 50	87 44 12	5 40	110 50	87 44 12	5 40
58 50	64 19 4	10 43	75 25	73 53 58	8 31	91 25	81 33 36	6 52	106 00	87 50 12	5 39	111 00	87 50 12	5 39
58 75	64 29 47	10 41	75 50	74 2 29	8 29	91 50	81 40 28	6 50	106 25	87 56 12	5 38	111 25	87 56 12	5 38
59 00	64 40 23	10 38	76 00	74 10 58	8 27	92 00	81 47 18	6 49	106 50	88 2 12	5 37	111 50	88 2 12	5 37
59 25	64 51 6	10 35	76 25	74 19 25	8 25	92 25	81 54 7	6 47	107 00	88 8 12	5 36	112 00	88 8 12	5 36
59 50	65 1 42	10 33	76 50	74 27 50	8 23	92 50	82 0 54	6 46	107 25	88 14 12	5 35	112 25	88 14 12	5 35
59 75	65 12 15	10 30	77 00	74 36 13	8 21	93 00	82 7 40	6 45	107 50	88 20 12	5 34	112 50	88 20 12	5 34
60 00	65 22 45	10 28	77 25	74 44 34	8 19	93 25	82 14 25	6 43	108 00	88 26 12	5 33	113 00	88 26 12	5 33
60 25	65 33 13	10 26	77 50	74 52 55	8 18	93 50	82 21 31	6 42	108 25	88 32 12	5 32	113 25	88 32 12	5 32
60 50	65 43 39	10 23	78 00	75 1 11	8 15	94 00	82 28 50	6 41	108 50	88 38 12	5 31	113 50	88 38 12	5 31
60 75	65 54 2	10 21	78 25	75 9 26	8 14	94 25	82 34 31	6 39	109 00	88 44 12	5 30	114 00	88 44 12	5 30
61 00	66 4 23	10 18	78 50	75 17 40	8 12	94 50	82 41 10	6 38	109 25	88 50 12	5 29	114 25	88 50 12	5 29
61 25	66 14 41	10 16	79 00	75 25 52	8 10	95 00	82 47 43	6 36	109 50	88 56 12	5 28	114 50	88 56 12	5 28
61 50	66 24 57	10 14	79 25	75 34 2	8 9	95 25	82 54 24	6 35	110 00	89 2 12	5 27	115 00	89 2 12	5 27
61 75	66 35 11	10 11	79 50	75 42 11	8 7	95 50	83 0 59	6 34	110 25	89 8 12	5 26	115 25	89 8 12	5 26
62 00	66 45 22	10 9	80 00	75 50 18	8 5	96 00	83 7 33	6 33	110 50	89 14 12	5 25	115 50	89 14 12	5 25
62 25	66 55 31	10 6	80 25	75 58 23	8 3	96 25	83 14 6	6 31	111 00	89 20 12	5 24	116 00	89 20 12	5 24
62 50	67 5 37	10 4	80 50	76 6 26	8 2	96 50	83 20 37	6 30	111 25	89 26 12	5 23	116 25	89 26 12	5 23
62 75	67 15 41	10 2	81 00	76 14 28	8 0	97 00	83 27 8	6 28	111 50	89 32 12	5 22	116 50	89 32 12	5 22
63 00	67 25 43	10 0	81 25	76 22 28	7 58	97 25	83 33 36	6 27	112 00	89 38 12	5 21	117 00	89 38 12	5 21
63 25	67 35 43	9 57	81 50	76 30 26	7 56	97 50	83 40 20	6 26	112 25	89 44 12	5 20	117 25	89 44 12	5 20
63 50	67 45 40	9 55	82 00	76 38 22	7 54	98 00	83 46 54	6 25	112 50	89 50 12	5 19	117 50	89 50 12	5 19
63 75	67 55 35	9 52	82 25	76 46 16	7 53	98 25	83 52 54	6 23	113 00	89 56 12	5 18	118 00	89 56 12	5 18
64 00	68 5 27	9 50	82 50	76 54 9	7 51	98 50	83 59 17	6 22	113 25	90 2 12	5 17	118 25	90 2 12	5 17
64 25	68 15 17	9 48	83 00	77 2 9	7 49	99 00	84 5 34	6 21	113 50	90 8 12	5 16	118 50	90 8 12	5 16
64 50	68 25 5	9 46	83 25	77 10 37	7 46	99 25	84 12 0	6 20	114 00	90 14 12	5 15	119 00	90 14 12	5 15
64 75	68 34 51	9 43	83 50	77 17 37	7 46	99 50	84 18 20	6 18	114 25	90 20 12	5 14	119 25	90 20 12	5 14
65 00	68 44 34	9 43	84 00	77 25 23	7 46	100 00	84 24 38	6 18	114 50	90 26 12	5 13	119 50	90 26 12	5 13



Jours.	Anomalie vraie.			Différ.	Jours.	Anomalie vraie.			Différ.	Jours.	Anomalie vraie.			Différ.	Jours.	Anomalie vraie.			Différ.
	D.	M.	S.			D.	M.	S.			D.	M.	S.			D.	M.	S.	
330	123	31	27	4 11	390	127	13	10	3 15	450	130	9	6	2 38	510	132	33	15	2 11
331	123	35	38	4 10	391	127	16	25	3 15	451	130	11	44	2 37	511	132	35	26	2 11
332	123	39	48	4 8	392	127	19	40	3 14	452	130	14	21	2 37	512	132	37	37	2 10
333	123	43	56	4 8	393	127	22	54	3 13	453	130	16	58	2 37	513	132	39	48	2 10
334	123	48	4	4 6	394	127	26	7	3 13	454	130	19	35	2 37	514	132	41	58	2 10
335	123	52	10	4 6	395	127	29	20	3 13	455	130	22	11	2 36	515	132	44	8	2 9
336	123	56	16	4 6	396	127	32	32	3 12	456	130	24	46	2 35	516	132	46	17	2 9
337	124	0	20	4 4	397	127	35	43	3 11	457	130	27	21	2 35	517	132	48	26	2 9
338	124	4	23	4 3	398	127	38	53	3 10	458	130	29	55	2 34	518	132	50	35	2 8
339	124	8	25	4 2	399	127	42	3	3 10	459	130	32	29	2 34	519	132	52	43	2 8
340	124	12	26	4 1	400	127	45	12	3 9	460	130	35	3	2 34	520	132	54	51	2 8
341	124	16	26	4 0	401	127	48	20	3 8	461	130	37	36	2 33	521	132	56	59	2 7
342	124	20	25	3 59	402	127	51	27	3 7	462	130	40	8	2 32	522	132	59	6	2 7
343	124	24	23	3 58	403	127	54	34	3 6	463	130	42	40	2 31	523	133	1	13	2 6
344	124	28	19	3 56	404	127	57	40	3 6	464	130	45	11	2 31	524	133	3	19	2 6
345	124	32	15	3 56	405	128	0	46	3 6	465	130	47	42	2 31	525	133	5	25	2 6
346	124	36	10	3 55	406	128	3	51	3 5	466	130	50	13	2 31	526	133	7	31	2 5
347	124	40	4	3 54	407	128	6	55	3 4	467	130	52	43	2 30	527	133	9	36	2 5
348	124	43	57	3 53	408	128	9	58	3 4	468	130	55	13	2 30	528	133	11	41	2 5
349	124	47	48	3 51	409	128	12	1	3 3	469	130	57	41	2 28	529	133	13	46	2 4
350	124	51	39	3 50	410	128	16	3	3 2	470	131	0	10	2 28	530	133	15	50	2 4
351	124	55	29	3 48	411	128	19	5	3 1	471	131	2	38	2 28	531	133	17	54	2 4
352	124	59	17	3 48	412	128	22	6	3 0	472	131	5	6	2 27	532	133	19	58	2 4
353	125	3	5	3 47	413	128	25	6	2 59	473	131	7	33	2 27	533	133	22	1	2 3
354	125	6	52	3 46	414	128	28	5	2 59	474	131	10	0	2 26	534	133	24	4	2 3
355	125	10	38	3 45	415	128	31	4	2 59	475	131	12	26	2 26	535	133	26	7	2 3
356	125	14	23	3 44	416	128	34	2	2 58	476	131	14	52	2 26	536	133	28	9	2 2
357	125	18	7	3 43	417	128	37	0	2 58	477	131	17	18	2 25	537	133	30	11	2 2
358	125	21	50	3 43	418	128	39	57	2 57	478	131	19	43	2 24	538	133	32	13	2 1
359	125	25	32	3 42	419	128	42	53	2 56	479	131	22	7	2 24	539	133	34	14	2 1
360	125	29	13	3 41	420	128	45	45	2 56	480	131	24	31	2 24	540	133	36	15	2 1
361	125	32	54	3 39	421	128	48	44	2 55	481	131	26	55	2 23	541	133	38	16	2 0
362	125	36	33	3 38	422	128	51	38	2 54	482	131	29	18	2 22	542	133	40	16	2 0
363	125	40	11	3 38	423	128	54	32	2 53	483	131	31	40	2 23	543	133	42	16	2 0
364	125	43	49	3 37	424	128	57	25	2 53	484	131	34	3	2 22	544	133	44	16	1 59
365	125	47	26	3 35	425	129	0	18	2 52	485	131	36	25	2 21	545	133	46	15	1 59
366	125	51	1	3 35	426	129	3	10	2 51	486	131	38	46	2 21	546	133	48	14	1 59
367	125	54	36	3 34	427	129	6	1	2 51	487	131	41	7	2 20	547	133	50	13	1 58
368	125	58	10	3 34	428	129	8	52	2 50	488	131	43	27	2 20	548	133	52	11	1 58
369	126	1	44	3 32	429	129	11	42	2 50	489	131	45	47	2 20	549	133	54	9	1 58
370	126	5	16	3 31	430	129	14	32	2 50	490	131	48	7	2 19	550	133	56	7	1 58
371	126	8	47	3 31	431	129	17	21	2 49	491	131	50	26	2 19	551	133	58	5	1 57
372	126	12	18	3 30	432	129	20	9	2 48	492	131	52	45	2 19	552	134	0	2	1 57
373	126	15	48	3 29	433	129	22	57	2 48	493	131	55	4	2 18	553	134	1	59	1 56
374	126	19	17	3 28	434	129	25	45	2 46	494	131	57	22	2 17	554	134	3	55	1 56
375	126	22	45	3 27	435	129	28	31	2 46	495	131	59	32	2 17	555	134	5	51	1 56
376	126	26	12	3 28	436	129	31	17	2 46	496	132	1	56	2 17	556	134	7	47	1 56
377	126	29	38	3 26	437	129	34	3	2 45	497	132	4	13	2 17	557	134	9	42	1 56
378	126	33	4	3 25	438	129	36	48	2 44	498	132	6	30	2 16	558	134	11	38	1 56
379	126	36	29	3 24	439	129	39	32	2 44	499	132	8	46	2 15	559	134	13	33	1 54
380	126	39	53	3 23	440	129	42	16	2 44	500	132	11	1	2 15	560	134	15	27	1 55
381	126	43	16	3 23	441	129	45	0	2 43	501	132	13	16	2 15	561	134	17	22	1 54
382	126	46	39	3 21	442	129	47	43	2 42	502	132	15	31	2 15	562	134	19	16	1 53
383	126	50	0	3 21	443	129	50	25	2 42	503	132	17	46	2 14	563	134	21	9	1 54
384	126	53	21	3 20	444	129	53	7	2 41	504	132	20	0	2 13	564	134	23	3	1 53
385	126	56	41	3 19	445	129	55	48	2 41	505	132	22	13	2 13	565	134	24	56	1 53
386	127	0	0	3 19	446	129	58	29	2 40	506	132	24	26	2 13	566	134	26	49	1 53
387	127	3	19	3 18	447	130	1	9	2 39	507	132	26	30	2 12	567	134	28	42	1 52
388	127	6	37	3 17	448	130	3	48	2 39	508	132	28	51	2 12	568	134	30	34	1 51
389	127	9	54	3 16	449	130	6	27	2 39	509	132	31	3	2 12	569	134	32	26	1 51
390	127	13	10		450	130	9	6		510	132	33	15		570	134	34	17	



Jours.	Anomalie vraie.			Différ.	Jours.	Anomalie vraie.			Différ.	Jours.	Anomalie vraie.			Différ.	Jours.	Anomalie vraie.			Différ.		
	D.	M.	S.			M.	S.	D.			M.	S.	M.			S.	D.	M.		S.	M.
570	134	34	17			750	139	7	14			1300	146	42	20			1900	150	59	17
571	134	36	9	1	54	755	139	13	26	6	12	1301	146	47	56	5	36	1910	151	2	34
572	134	38	0	1	51	760	139	19	34	6	8	1302	146	53	28	5	32	1920	151	5	49
573	134	39	51	1	51	765	139	25	38	6	4	1303	146	58	57	5	29	1930	151	9	3
574	134	41	41	1	50	770	139	31	39	6	1	1304	147	4	22	5	25	1940	151	12	15
575	134	43	32	1	51	775	139	37	37	5	58	1305	147	9	45	5	23	1950	151	15	26
576	134	45	22	1	50	780	139	43	31	5	54	1306	147	15	3	5	18	1960	151	18	36
577	134	47	11	1	49	785	139	49	22	5	51	1307	147	20	18	5	15	1970	151	21	44
578	134	49	1	1	50	790	139	55	9	5	47	1308	147	25	30	5	12	1980	151	24	51
579	134	50	50	1	49	795	140	0	54	5	44	1309	147	30	39	5	9	1990	151	27	3
580	134	52	39	1	49	800	140	6	35	5	41	1400	147	35	45	5	6	2000	151	31	2
581	134	54	27	1	48	810	140	17	48	11	13	1410	147	40	48	5	3	2020	151	37	8
582	134	56	16	1	49	820	140	28	50	11	2	1420	147	45	47	4	59	2040	151	43	8
583	134	58	4	1	48	830	140	39	39	10	49	1430	147	50	44	4	57	2060	151	49	3
584	134	59	51	1	47	840	140	50	18	10	39	1440	147	55	38	4	54	2080	151	54	53
585	135	1	39	1	48	850	141	0	45	10	27	1450	148	0	28	4	50	2100	152	0	38
586	135	3	26	1	47	860	141	11	2	10	17	1460	148	5	16	4	48	2120	152	6	19
587	135	5	13	1	47	870	141	21	9	10	7	1470	148	10	4	4	46	2140	152	11	55
588	135	7	0	1	47	880	141	31	5	9	56	1480	148	14	44	4	42	2160	152	17	27
589	135	8	46	1	46	890	141	40	52	9	47	1490	148	19	24	4	40	2180	152	22	55
590	135	10	32	1	46	900	141	50	30	9	39	1500	148	24	1	4	37	2200	152	28	19
591	135	12	18	1	46	910	141	59	58	9	28	1510	148	28	35	4	34	2220	152	33	39
592	135	14	4	1	45	920	142	9	17	9	19	1520	148	33	7	4	32	2240	152	38	54
593	135	15	49	1	45	930	142	18	28	2	11	1530	148	37	37	4	27	2260	152	44	6
594	135	17	35	1	45	940	142	27	30	2	2	1540	148	42	4	4	24	2280	152	49	14
595	135	19	20	1	45	950	142	36	24	8	54	1550	148	46	28	4	24	2300	152	54	18
596	135	21	4	1	44	960	142	45	10	8	38	1560	148	50	50	4	22	2320	152	59	18
597	135	22	48	1	44	970	142	53	48	8	31	1570	148	55	10	4	20	2340	153	4	15
598	135	24	32	1	44	980	143	3	19	8	31	1580	148	59	27	4	17	2360	153	9	9
599	135	26	16	1	44	990	143	10	42	8	23	1590	149	3	42	4	15	2380	153	13	59
600	135	28	0	1	44	1000	143	18	57	8	15	1600	149	7	55	4	13	2400	153	18	45
601	135	30	34	1	8	1010	143	27	6	8	1	1610	149	12	6	4	11	2420	153	23	28
610	135	45	2	1	8	1020	143	35	7	7	55	1620	149	16	14	4	8	2440	153	28	8
615	135	53	24	1	8	1030	143	43	2	7	55	1630	149	20	20	4	6	2460	153	32	45
620	136	1	40	1	8	1040	143	50	51	7	49	1640	149	24	24	4	4	2480	153	37	18
625	136	9	50	1	8	1050	143	58	33	7	42	1650	149	28	26	4	2	2500	153	41	48
630	136	17	54	1	8	1060	144	6	8	7	35	1660	149	32	26	4	0	2520	153	46	15
635	136	25	53	1	7	1070	144	13	38	7	30	1670	149	36	24	3	58	2540	153	50	39
640	136	33	46	1	7	1080	144	21	1	7	23	1680	149	40	20	3	56	2560	153	55	1
645	136	41	34	1	7	1090	144	28	19	7	18	1690	149	44	14	3	54	2580	153	59	20
650	136	49	16	1	7	1100	144	35	31	7	12	1700	149	48	6	3	52	2600	154	3	36
655	136	56	53	1	7	1110	144	42	37	7	6	1710	149	51	56	3	50	2620	154	7	49
660	137	4	25	1	7	1120	144	49	38	7	1	1720	149	55	44	3	48	2640	154	12	0
665	137	11	53	1	7	1130	144	56	34	6	56	1730	149	59	31	3	47	2660	154	16	8
670	137	19	16	1	7	1140	145	3	24	6	50	1740	150	3	15	3	44	2680	154	20	14
675	137	26	33	1	7	1150	145	10	9	6	45	1750	150	6	18	3	43	2700	154	24	17
680	137	33	45	1	7	1160	145	16	49	6	40	1760	150	10	39	3	41	2720	154	28	17
685	137	40	53	1	7	1170	145	23	25	6	36	1770	150	14	18	3	39	2740	154	33	15
690	137	47	57	1	7	1180	145	29	51	6	30	1780	150	17	56	3	38	2760	154	36	10
695	137	54	56	1	6	1190	145	36	21	6	26	1790	150	21	31	3	35	2780	154	40	3
700	138	1	51	1	6	1200	145	42	42	6	21	1800	150	25	5	3	34	2800	154	43	54
705	138	8	42	1	6	1210	145	48	59	6	17	1810	150	28	37	3	32	2820	154	47	43
710	138	15	28	1	6	1220	145	55	11	6	12	1820	150	32	8	3	31	2840	154	51	30
715	138	22	10	1	6	1230	146	1	19	6	8	1830	150	35	37	3	29	2860	154	55	14
720	138	28	48	1	6	1240	146	7	22	6	3	1840	150	39	5	3	28	2880	154	58	56
725	138	35	22	1	6	1250	146	13	22	6	0	1850	150	42	30	3	25	2900	155	2	36
730	138	41	51	1	6	1260	146	19	17	5	55	1860	150	45	55	3	23	2920	156	6	14
735	138	48	17	1	6	1270	146	25	9	5	52	1870	150	49	18	3	21	2940	155	9	50
740	138	54	40	1	6	1280	146	30	56	5	47	1880	150	52	39	3	20	2960	155	13	23
745	139	0	59	1	6	1290	146	36	40	5	44	1890	150	55	59	3	18	2980	155	16	54
750	139	7	14	1	6	1300	146	42	20	5	40	1900	150	59	17	3	18	3000	155	20	23

Jours.	Anomalie vraie.			Diff.	Jours.	Anomalie vraie.			Diff.	Jours.	Anomalie vraie.			Diff.	Jours.	Anomalie vraie.			Diff.			
	D.	M.	S.			M.	S.	D.			M.	S.	M.			S.	D.	M.		S.	M.	S.
3000	155	20	23	8	37	4700	158	55	38	4	38	6800	161	27	15	5	35	10200	163	51	48	
3050	155	29	0	8	26	4750	159	0	16	4	38	6900	161	32	50	5	35	10300	163	55	2	3 14
3100	155	37	26	8	14	4800	159	4	50	4	39	7000	161	38	19	5	29	10400	163	58	11	3 9
3150	155	45	40	8	3	4850	159	9	19	4	24	7100	161	43	40	5	21	10500	164	1	21	3 19
3200	155	53	43	8	3	4900	159	13	45	4	26	7200	161	48	55	5	15	10600	164	4	27	3 6
3250	156	1	35	7	52	4950	159	18	7	4	19	7300	161	54	4	5	9	10700	164	7	31	3 4
3300	156	9	17	7	42	5000	159	22	26	4	15	7400	161	59	8	5	4	10800	164	10	32	3 1
3350	156	16	48	7	31	5050	159	26	41	4	11	7500	162	4	7	4	59	10900	164	13	31	2 59
3400	156	24	10	7	22	5100	159	30	53	4	12	7600	162	9	1	4	54	11000	164	16	28	2 57
3450	156	31	23	7	13	5150	159	35	1	4	8	7700	162	13	49	4	48	11100	164	19	22	2 54
3500	156	38	27	7	4	5200	159	39	6	4	5	7800	162	18	32	4	43	11200	164	22	15	2 53
3550	156	45	23	6	56	5250	159	43	8	4	2	7900	162	23	11	4	39	11300	164	25	5	2 50
3600	156	52	10	6	47	5300	159	47	8	4	0	8000	162	27	45	4	34	11400	164	27	54	2 49
3650	156	58	49	6	39	5350	159	51	5	3	57	8100	162	32	14	4	29	11500	164	30	41	2 47
3700	157	5	22	6	33	5400	159	54	59	3	54	8200	162	36	35	4	25	11600	164	33	26	2 45
3750	157	11	48	6	26	5450	159	58	51	3	52	8300	162	40	59	4	20	11700	164	36	8	2 45
3800	157	18	7	6	19	5500	160	2	39	3	48	8400	162	45	15	4	16	11800	164	38	48	2 40
3850	157	24	20	6	13	5550	160	6	24	3	45	8500	162	49	26	4	11	11900	164	41	27	2 39
3900	157	30	27	6	7	5600	160	10	6	3	42	8600	162	53	34	4	8	12000	164	44	4	2 37
3950	157	36	29	6	2	5650	160	13	45	3	39	8700	162	57	37	4	3	13000	165	8	43	24 39
4000	157	42	24	5	55	5700	160	17	22	3	37	8800	163	1	37	4	0	14000	165	16	35	21 11
4050	157	48	13	5	45	5750	160	20	56	3	34	8900	163	5	33	3	56	15000	165	51	5	20 10
4100	157	53	56	5	43	5800	160	24	28	3	32	9000	163	9	25	3	52	16000	166	9	30	18 25
4150	157	59	33	5	37	5850	160	27	57	3	29	9100	163	13	14	3	48	17000	166	26	25	16 55
4200	158	5	4	5	31	5900	160	31	24	3	27	9200	163	17	0	3	46	18000	166	42	3	15 38
4250	158	10	30	5	26	5950	160	34	48	3	24	9300	163	20	43	3	43	19000	166	56	32	14 29
4300	158	15	51	5	21	6000	160	38	10	3	22	9400	163	24	22	3	39	20000	167	10	2	13 30
4350	158	21	6	5	15	6050	160	44	47	6	37	9500	163	27	58	3	36	30000	168	48	41	98 39
4400	158	26	16	5	10	6100	160	51	15	6	28	9600	163	31	31	3	33	40000	169	50	44	61 3
4450	158	31	21	5	5	6300	160	57	34	6	19	9700	163	35	1	3	30	50000	170	34	49	34 36
4500	158	36	21	5	1	6400	161	3	46	6	12	9800	163	38	28	3	27	60000	171	8	25	43 55
4550	158	41	18	4	56	6500	161	9	49	6	3	9900	163	41	52	3	24	70000	171	35	14	26 49
4600	158	46	9	4	51	6600	161	15	45	5	56	10000	163	45	13	3	21	80000	171	57	21	22 7
4650	158	50	56	4	47	6700	161	21	33	5	48	10100	163	48	32	3	19	90000	172	16	1	18 43
4700	158	55	38	4	42	6800	161	27	15	5	42	10200	163	51	48	3	16	100000	172	32	9	16 5

*EXEMPLE pour la Table générale.*

CONNOISSANT la distance périhélie d'une Comète 0,5849, on demande l'anomalie vraie qu'elle doit avoir 49 jours 18 heures 55' 20" avant ou après son périhélie (3041); on réduit les 18 heures en décimales par la première Table, & l'on a 0,7500, les 55' font 0,9382; les 20" font 0,0002, ainsi l'on a en total 49,7884. On suppose la moyenne distance du soleil à la terre égale à l'unité (3042).

Logarithme de la distance périhélie	0,5849.....	9,7670816.
Moitié du même Logarithme.....		9,8835408.

Trois demies du Logarithme de la distance périphélie. ....	9,6506224.
Il faut les ôter du Logarithme des jours donnés 49,7284. ....	1,6971282.

Il reste la différence, ou le Log. des jours de la Table 111 jours, 3121... 2,046508.

A 111 jours répondent  $90^{\circ} : 8' 42''$  d'anomalie vraie, la différence est  $10' 15''$ ; or  $5000 : 10' 15'' :: 3282 : 6' 44''$ , donc l'anomalie vraie fera  $90^{\circ} 35' 26''$  pour le temps proposé, 49 jours &  $\frac{7284}{86400}$  ou 49<sup>j</sup> 18<sup>h</sup> 55<sup>m</sup> 20<sup>s</sup> avant & après le passage au périhélie.

Cette table construite d'abord par M. de la Caille, (*Mém. acad.* 1746), étoit plus commode & plus ample que celle de M. Halley, mais elle vient d'être encore vérifiée, corrigée & augmentée considérablement par M. DE CHALIGNY, habile calculateur que j'ai cité plusieurs fois dans cet ouvrage. Je n'ai pas mis dans cette table les logarithmes pour la distance, comme faisoit M. Halley, parce qu'avec l'anomalie vraie & la distance périhélie d'une comète il est aisé de trouver sa distance au soleil (3042).

3053. La première partie du problème des comètes consiste à trouver plusieurs paraboles qui satisfassent à deux observations (3051), c'est-à-dire, avec lesquelles ont ait les mêmes longitudes & latitudes que par observation, & l'intervalle de temps observé entre ces deux positions de la comète; mais parce que ce problème est indéterminé, & qu'il a une infinité de solutions, on suppose les distances de la comète au soleil, telles que  $SG$  &  $SH$  (*fig.* 263 & 264), données pour le temps des deux observations, & avec ces distances on trouve les dimensions d'une parabole qui satisfait aux deux observations faites quand la terre étoit en  $A$  & en  $B$ .

*Fig.* 263 & 264.

3054. Lorsqu'on suppose d'autres valeurs pour les distances  $SG$  &  $SH$  de la comète au soleil, on trouve les dimensions d'une autre parabole qui satisfait encore aux deux premières observations; & c'est entre plusieurs de ces paraboles qu'on choisit ensuite celle qui doit convenir à la troisième observation, faite quand la terre étoit en  $C$ ; alors on est sûr d'avoir trouvé la parabole qui satisfait aux trois observations, & qui représente le cours de la comète, ou du moins qui en approche beaucoup. On trouve souvent des erreurs de 3 ou 4' dans le calcul des autres observations que l'on compare avec une parabole ainsi déterminée, soit parce que la route véritable de la comète n'est une parabole qu'à peu-près (3024), soit parce que les observations des comètes ne sont exactes fort souvent qu'à 2' près.

3055. Les astronomes trouveront ici la suite de tou-

# 342 ASTRONOMIE, LIV. XIX.

Fig. 263,  
264.

tes les règles qu'il faut suivre, & de toutes les analogies qu'il faut faire pour calculer une orbite; l'exemple sera expliqué séparément (3071).

PREMIERE  
HYPOTHESE.

Je suppose une quantité quelconque (3047) pour la distance  $GS$  de la comète au soleil réduite à l'écliptique; ensorte que le point  $G$  soit la projection de la comète sur l'écliptique au temps de la première observation; l'on connoît par observation l'angle d'élongation  $SAG$  (3046); & par les tables la distance  $AS$  du soleil à la terre, on cherchera l'angle à la comète ou l'angle  $G$  de la parallaxe annuelle, par l'analogie suivante.

*La dist. supposée  $GS$  de la comète au sol. dans la 1<sup>re</sup> observ.  
Est au sinus de l'élongation observée  $GAS$ .*

*Comme la distance  $AS$  du soleil à la terre,  
Est au sinus de l'angle  $AGS$ , au centre de la comète.*

Angle à la  
comète.

Cet angle peut être pris tel qu'on le trouvera dans la table des sinus; ou bien on emploira le supplément de la quantité trouvée, si l'on veut supposer obtus l'angle  $SgA$  (3071). On ajoutera l'angle  $AGS$  avec l'angle d'élongation  $GAS$ , & le supplément de la somme sera l'angle de commutation  $GSA$ , qui ôté du lieu de la terre  $A$ ; (qui est toujours plus grand de six signes que celui du soleil), ou ajouté si la ligne  $SG$  étoit plus orientale que la ligne  $SA$ , donnera la longitude héliocentrique de la comète, sur la ligne  $SG$ .

3056. On trouvera ensuite sa latitude héliocentrique (1145).

*Le sinus de l'angle d'élongation observé  $GAS$ ,*

*Est au sinus de l'angle de commutation  $GSA$ ,*

Latitude hé-  
liocentrique.

*Comme la tang. de la latit. géocen. de la comète, observée,  
Est à la tang. de la latitude hélioc. de la comète.*

Première  
supposition.

3057. Ayant fait les mêmes opérations pour la seconde observation, avec  $SH$  supposée à volonté d'une certaine quantité, & l'angle  $SBH$ , qui est la seconde élongation observée; l'on aura la longitude & la latitude héliocentrique du point  $H$ , ou de la comète dans la seconde observation. Ayant ainsi deux longitudes de la comète,

vues du soleil, on aura leur différence qui est le mouvement héliocentrique réduit à l'écliptique dans l'intervalle des deux observations; il faut en conclure le mouvement sur l'orbite. Soit *NMO* (fig. 265) l'écliptique, *NQR* l'orbite, *P* le pôle de l'écliptique, *Q* & *R* les deux positions de la comète vues du soleil, *OQ* & *MR* les deux latitudes trouvées par les calculs précédens, *OM* le mouvement de la comète sur l'écliptique vu du soleil, ou la différence des longitudes héliocentriques trouvées; il s'agit d'avoir le mouvement *RQ* sur l'orbite de la comète; on fera les deux analogies suivantes (3696), & l'on observera, si les angles sont fort petits, de mettre une très-grande précision dans le calcul.

Mouvement  
sur l'éclipti-  
que.  
Fig. 265.

*Le sinus total,*  
*Est au cosinus de l'angle P mouv. sur l'écliptique;*  
*Comme la cotang. de la plus grande latitude OQ,*  
*Est à la tangente du premier segment PX.*

On retranchera ce segment, du complément *PR* de la plus petite latitude héliocentrique calculée, & l'on aura l'autre segment *RX*. Si l'angle *P* étoit obtus, il faudroit ajouter *PX* avec *PR* pour avoir *RX*.

*Le cosinus du premier segment PX,*  
*Est au cosinus du second segment RX,*  
*Comme le sinus de la plus grande des deux latitudes QO,*  
*Est au cosin. du mouv. QR de la comète sur son orbite.*

Mouvement  
sur l'orbite.

On prendra le quart de ce mouvement.

Si l'une des deux latitudes étoit boréale & l'autre australe, on mettroit le point *R* au-dessous de *M*, le nœud *N* seroit entre deux, *PR* seroit la somme de 90° & de la latitude australe.

On remarque si la longitude héliocentrique dans la seconde observation est plus grande que dans la première; car alors la comète est *directe*; si la seconde est la plus petite, la comète est *rétrograde*.

3058. Les distances *SG SH* (fig. 263 & 264), de la comète au soleil qui sont dans le plan de l'écliptique étant divisées, chacune par le cosinus de la latitude héli-

Rayons  
vecteurs.  
Fig. 263 &  
264.

## 344 ASTRONOMIE, Liv. XIX.

centrique correspondante (3056), donnent les rayons vecteurs ou les distances de la comète au soleil en ligne droite dans le plan de son orbite (1146); on a donc deux rayons vecteurs de la parabole, avec l'angle compris, on trouve le lieu du périhélie par la règle suivante (3043). On retranche le logarithme du plus petit rayon vecteur de celui du plus grand; on prend la moitié du reste, c'est le logarithme de la tangente d'un angle, dont il faut ôter  $45^{\circ}$ ; le logarithme de la tangente du reste, moins le logarithme de la tangente du quart du mouvement (3057), donne le logarithme de la tangente d'un angle, auquel on ajoute le quart du mouvement, pour avoir la moitié de la plus grande anomalie vraie (3043), nous en ferons usage ci-après (3059); on prend aussi leur différence & l'on a la plus petite des deux demi-anomalies vraies; en doublant ces quantités, on a les deux anomalies vraies.

Anomalies  
vraies.

Distance pé-  
rihélie.

3059. Le logarithme du cosinus de la plus grande des deux moitiés d'anomalie vraie, ajouté deux fois avec celui du plus grand des deux rayons vecteurs, donnera le logarithme de la distance périhélie (3042); auquel on ajoutera sa moitié, pour avoir les  $\frac{3}{2}$  du logarithme de la distance périhélie.

Les deux anomalies vraies qu'on a trouvées ci-dessus; sont du même côté du périhélie quand leur différence est égale au mouvement héliocentrique total de la comète sur son orbite (3057); elles sont l'une avant, & l'autre après le périhélie, quand c'est leur somme qui fait le mouvement total de la comète. Dans le premier cas, si la comète est directe, & que la seconde anomalie soit plus petite que la première, c'est une preuve que la comète n'a point encore atteint son périhélie; mais si l'anomalie qui répond à la première observation étoit la plus petite des deux, ce seroit une preuve que le périhélie a précédé les deux observations. Quand la comète est rétrograde, c'est la même règle. Dans le second cas, c'est-à-dire, lorsqu'il a fallu ajouter les deux anomalies pour faire la valeur du mouvement total  $QR$  de la comète sur son orbite, on est assuré que le périhélie est arrivé dans l'intervalle qu'il y

a eu

a eu entre les deux observations; si la comète est directe, on saura que le périhélie est plus avancé que la première des deux longitudes héliocentriques trouvées, & qu'elle n'a pas encore passé par son périhélie au temps de la première observation, ce qui sera nécessaire dans la suite du calcul (3063).

3060. Avec les deux anomalies vraies trouvées, on cherchera les jours & millièmes de jours correspondans, dans la table générale, *pag.* 335; on prendra leur différence ou leur somme, suivant que les deux anomalies seront d'un seul côté ou des deux côtés du périhélie. Pour avoir le véritable intervalle de temps qui convient à l'orbite trouvée, il faut au logarithme de l'intervalle donné par la table ajouter les  $\frac{1}{2}$  du logarithme de la distance périhélie (3040), & l'on a le logarithme du temps que donne la parabole trouvée, pour l'intervalle entre les deux observations; si cet intervalle de temps est exactement celui qui a été observé, c'est une preuve que les deux distances  $SG$  &  $SH$  qu'on a supposées dans ce calcul donnent une parabole qui satisfait à ces deux observations, & la première hypothèse est finie.

Intervalle  
de temps.

3061. Mais il arrive presque toujours que ce nombre de jours n'est pas d'accord avec celui qui a été observé; alors on suppose une autre distance  $SH$  dans la seconde observation; on conserve la première distance  $SG$  avec la longitude & la latitude qu'on en a déduites (3055, 3056), & refaisant tous les calculs des articles 3057... 3060, on a une autre valeur pour l'intervalle de temps entre les deux observations. Si cet intervalle approche davantage de celui qui a été observé, on reconnoît que la seconde supposition est préférable, & l'on fait, s'il est nécessaire, en changeant un peu plus la seconde distance, une troisième supposition, dont on cherche l'erreur. Ainsi par le progrès des erreurs, ou par leur diminution, l'on verra bientôt quelle distance  $SH$  il faut supposer dans la seconde observation pour avoir une parabole qui satisfasse à ces deux observations; j'appellerai

Seconde sup-  
position de la  
première hy-  
pothèse.

cette première parabole qui satisfait aux deux observations, PREMIÈRE HYPOTHÈSE.

Pour former cette hypothèse, j'ai supposé connues les distances accourcies de la planète au soleil, & j'en ai fait varier une jusqu'à ce qu'elles aient formé une parabole assujettie aux deux observations; mais lorsqu'un des angles à la comète approche fort d'être droit la distance accourcie de la terre au soleil qui est opposée à cet angle ne peut servir à le calculer avec précision, parce que les sinus varient trop peu vers  $90^\circ$ ; on ne fait pas d'ailleurs s'il faut supposer l'angle aigu ou obtus (3071); pour remédier à cet inconvénient, on pourroit commencer par supposer connu ou l'angle au soleil, ou l'angle à la comète, c'est-à-dire, supposer le lieu héliocentrique de la comète, au lieu de le calculer d'après la distance, comme dans l'article 3055. On peut voir un procédé semblable dans ma *théorie des comètes* (pag. 116) appliqué à la comète de 1757, où cette difficulté pouvoit avoir lieu.

Il est quelquefois commode pour lors de prendre une distance réduite pour former les hypothèses, & un angle de commutation qui répond à l'autre distance pour former les différentes suppositions que renferme cette hypothèse: c'est ainsi que je l'ai pratiqué pour la comète de 1769.

Lorsque le mouvement héliocentrique trouvé (3057) a produit un intervalle de jours, trop grand; on peut juger aussi du moins en général qu'il faut diminuer ce mouvement héliocentrique, & par conséquent la seconde longitude (si la comète est directe) pour se rapprocher de l'intervalle donné, & former la seconde supposition.

Enfin il arrivera quelquefois que soit en augmentant soit en diminuant la seconde distance  $SH$ , on ne pourra parvenir à un intervalle de temps qui approche de l'observation, ce sera une preuve que la première distance  $SG$  est trop grande ou trop petite; ou qu'il y a quelque contradiction dans les suppositions.

3062. Lorsqu'on a une première hypothèse com-



plète, ou une parabole qui satisfait à deux observations, on auroit la véritable orbite cherchée, si elle satisfaisoit également à la troisième observation; mais on ne rencontre jamais cette exactitude dans une première hypothèse, & l'on est obligé d'en faire plusieurs autres (3069); cependant on éprouve d'abord si la première hypothèse convient à la 3<sup>e</sup> observation, comme nous allons le dire avant que de passer à une 2<sup>e</sup> hypothèse; (3069), parce que le sens dans lequel est l'erreur, suffit à un astronome exercé pour juger si l'on doit augmenter ou diminuer la distance  $SG$  pour former la deuxième hypothèse.

3063. LA TROISIÈME OBSERVATION calculée dans cette hypothèse ou dans cette parabole trouvée nous fera connoître si elle approche de la vérité. Pour calculer cette troisième observation, il faut d'abord trouver le temps du passage au périhélie, l'inclinaison sur l'écliptique, le lieu du nœud, & celui du périhélie sur l'orbite.

Calcul des  
éléments.

Avec l'un des deux nombres de jours qu'on a trouvés par les deux anomalies vraies (3060), par exemple, celui qui convient à la première observation, on cherchera dans la table générale le nombre des jours correspondans; le logarithme de ce nombre de jours ajouté avec les  $\frac{1}{2}$  du logarithme de la distance périhélie donnera celui du véritable intervalle de temps (3040) écoulé entre la première observation & le passage au périhélie; on ajoutera ce nombre de jours avec le temps de l'observation, si elle a été faite avant le périhélie (3059), l'on aura le temps du passage au périhélie dans chaque parabole. Il est bon de faire le même calcul par les deux nombres de jours, pour savoir si l'on trouve par chacun la même heure & la même minute pour le passage au périhélie.

Passage au  
périhélie.

3064. Le lieu du nœud  $N$  (fig. 265), & l'angle d'inclinaison  $RNM$  se trouveront par le moyen du triangle  $PQR$ , dont nous avons déjà fait usage (3057), & du triangle  $RMN$ , en faisant les analogies suivantes:

Fig. 265.

# 348 ASTRONOMIE, LIV. XIX.

I. Le sinus du segment  $RX$ ,  
 Est au sinus du segment  $PX$ ,  
 Comme la tang. de l'angle  $P$  ou du mouvement sur l'éclipte;  
 Est à la tangente de l'angle  $R$  (3693).

II. Le rayon  
 Est au sinus de la plus petite latitude  $RM$ ;  
 Comme la tangente de l'angle  $R$   
 Est à la tang. de la dist. au nœud,  $NM$  sur l'éclipt. (3667).

III. Le rayon  
 Est au sinus de l'angle  $R$ ;  
 Comme le cosinus de la plus petite latitude  $RM$   
 Est au cosinus de l'inclinaison, ou de l'angle  $N$  (3669).

Inclinaison.

IV. Le sinus de l'inclinaison  $N$   
 Est au sinus de la plus petite latitude  $RM$ ;  
 Comme le rayon  
 Est au sinus de la dist. au nœud  $NR$  sur l'orbite (3665).

3065. La distance au nœud comptée sur l'écliptique, où l'arc  $MN$  s'ajoute avec la longitude héliocentrique du point  $M$  sur l'écliptique, si la comète est directe, & que sa latitude héliocentrique soit décroissante; ou si elle est rétrograde & que sa latitude aille en croissant, il se retranche dans les autres cas, & l'on a la longitude du nœud  $N$ . Ce sera le nœud ascendant si  $RM$  est une latitude boréale croissante, ou australe décroissante; ce sera le nœud descendant si la latitude est boréale décroissante, ou australe croissante.

Si le du  
 nœud.

Si le mouvement de la comète surpassoit six signes ou  $180^\circ$ , comme cela est arrivé souvent, & spécialement en 1769, on prendroit pour l'angle  $P$  ce qui manqueroit pour aller à 12 signes, & pour faire la figure de manière à ne pas se tromper dans le calcul, on supposeroit, non pas que la comète a été de  $Q$  en  $R$  selon l'ordre des signes, l'occident étant toujours à droite; mais que la comète a été d'abord en  $R$ , & qu'ensuite ayant tourné par-dessous la figure, elle est revenue en  $Q$  pour la seconde observation. Si elle étoit rétrograde ce seroit le contraire,

Il fera bon de chercher aussi le lieu du nœud  $N$  par le moyen de la longitude du point  $O$ , afin de voir si l'on trouvera pour le nœud la même longitude. Pour cela on ajoutera  $MO$  avec  $MN$  (à moins que le point  $N$  ne soit au milieu) pour avoir  $NO$ , qu'on ajoutera avec la longitude héliocentrique du point  $O$ , ou que l'on ôtera suivant les cas que je viens de détailler.

3066. Pour avoir la longitude du périhélie, on ajoutera la longitude du nœud  $N$  avec  $NR$ , si le nœud est moins avancé que la longitude héliocentrique du point  $M$ , & l'on aura la longitude du point  $R$  sur l'orbite de la comète. On y ajoutera l'anomalie de la comète pour l'observation  $R$ , si la comète étant directe n'avoit pas encore passé son périhélie lorsqu'elle étoit en  $R$ , ou si étant rétrograde elle l'avoit déjà passé (3059); dans les autres cas on retranchera l'anomalie de la longitude du point  $R$ , & l'on aura le lieu du périhélie, qui se compte toujours sur l'orbite de la comète, ainsi que les longitudes des autres planètes (1132), chacune sur leur orbite.

Lieu du  
périhélie.

On fera bien de chercher également le lieu du périhélie par l'observation faite en  $Q$ ; si le résultat est exactement le même par les deux observations, on sera sûr de ne s'être point trompé dans les signes de toutes les opérations précédentes. On ajoutera donc la longitude du nœud  $N$  avec  $NQ$  pour avoir la longitude du point  $Q$ , & l'on y ajoutera l'anomalie de la comète dans le temps de l'observation faite en  $Q$ , où l'on retranchera suivant les cas, on aura le lieu du périhélie.

3067. Nous connoissons donc tous les élémens de la parabole, qui satisfait à deux observations, & nous sommes en état de calculer dans la même hypothèse le lieu de la comète vu de la terre pour le temps de la troisième observation, lorsque la terre étoit en  $C$ , & que la comète étoit en  $K$ ; ce qui se fera par les règles suivantes.

Calcul de la  
3<sup>e</sup> observa-  
tion.

Le logarithme de la différence entre le temps de la 3<sup>e</sup> observation & le temps du passage par le périhélie

(3063), moins les  $\frac{1}{2}$  du logarithme de la distance périhélie donnera le logarithme des jours de la table générale, vis-à-vis desquels on trouvera l'anomalie vraie de la comète au temps de la 3<sup>e</sup> observation; la somme ou la différence entre le lieu du périhélie & l'anomalie vraie de la comète, donnera la longitude vraie de la comète dans la 3<sup>e</sup> observation comptée sur son orbite; on prendra la somme, si la comète ayant un mouvement direct a déjà passé le périhélie au temps de la 3<sup>e</sup> observation; les autres cas sont faciles à appercevoir. La différence entre cette longitude & celle du nœud (3065), donnera l'argument de latitude. Connoissant l'inclinaison de l'orbite (3064), & l'argument de latitude, on trouvera la longitude héliocentrique réduite à l'écliptique (1130, ou *pag.* 104 des tables), marquée par la ligne *SK*, & la latitude héliocentrique (1129, ou *pag.* 108 des tables). Elle sera boréale si la comète étant directe à une longitude plus grande que celle de son nœud ascendant, ou plus petite que celle du nœud descendant.

Distance  
accourcie,

3068. On ajoutera le log. cos. de la latitude hélioc. avec le log. de la distance périhélie (3059), & l'on en ôtera le double du cosinus de la moitié de l'anomalie vraie (3042), on aura le log. de la distance accourcie *SK*, dans la troisième observation; si cette distance est plus petite que celle du soleil au même jour, on traitera la comète comme une planète inférieure, & l'on suivra les règles ordinaires que nous avons données dans les tables des planètes, *p.* 104, &c. ou à l'art. 1143. Au moyen de la longitude héliocentrique & de la distance au soleil, on trouvera la longitude & la latitude vues de la terre (1143); elles devroient être d'accord avec celles qu'on a observées, si l'hypothèse étoit exacte; & que la parabole trouvée fût réellement celle que la comète a décrite.

Longitude  
gécocentrique,

3069. Il n'arrive jamais que la 3<sup>e</sup> observation s'accorde assez bien avec le calcul de la première hypothèse; on passe donc nécessairement à une seconde. On suppose pour la distance *SG*, dans la première observation

une autre quantité plus ou moins grande que celle qu'on avoit supposée pour la première hypothèse (3055), & en faisant sur la seconde distance  $SH$  diverses suppositions, on trouve celle qu'il faut prendre pour avoir une seconde parabole qui représente encore les deux observations, & c'est la *seconde hypothèse*. On calcule tous les élémens de la comète dans cette seconde parabole (3063 & suiv.); on cherche aussi le lieu de la comète vu de la terre pour le temps de la 3<sup>e</sup> observation dans cette seconde hypothèse, ou dans la seconde parabole trouvée, & l'on voit quelle est l'erreur de cette hypothèse ou combien elle s'écarte de la troisième observation. Si les erreurs des deux hypothèses ne sont que de quelques minutes, on pourra par une simple règle de trois, trouver quelles étoient les distances réduites  $SG$  &  $SH$ , qu'il falloit supposer; l'on formera une *troisième hypothèse* dans laquelle on caculera tous les élémens de la comète (3063, & suiv.), & qui satisfera également à la troisième observation.

SECONDE  
HYPOTHÈSE.

TROISIÈME  
HYPOTHÈSE.

Si l'on a un plus grand nombre d'observations on pourra les calculer aussi avec ces mêmes élémens; il est absolument nécessaire de vérifier ainsi une parabole quand elle est calculée, de peur que dans une des trois observations qu'on a prises, il ne se soit glissé quelque erreur, qui produiroit une différence considérable dans les élémens qu'on a trouvés. D'ailleurs on parvient quelquefois à représenter un mois entier d'observations à une ou deux minutes près; & une observation plus éloignée différera de dix ou douze minutes du calcul; il est donc nécessaire de calculer un plus grand nombre d'observations pour s'assurer de la théorie qu'on a trouvée.

VÉRIFICATION  
essentielle.

3070. Lorsqu'on veut calculer le retour d'une comète, ou connoître ses élémens avec beaucoup de précision, il y a deux considérations à employer dans la réduction des observations, la parallaxe & l'aberration. Pour avoir la parallaxe d'une comète, il faut avoir sa distance à la terre (1146), & divisant  $9''$  par la distance de la comète (celle du soleil prise pour unité); l'on a

Parallaxe.

la parallaxe horizontale, & par conséquent la parallaxe en longitude & en latitude pour l'heure de l'observation (1666, 1667). On prendra le nonagéfime dans une table (1680), & l'on se contentera de prendre le premier terme (1668) pour la parallaxe de latitude; si elle n'est pas fort grande.

On appliquera ces parallaxes à la longitude observée, dans un sens contraire à celui que nous avons indiqué (1679), lorsqu'il s'agissoit de trouver la longitude apparente, puisqu'ici c'est la longitude vraie que nous voulons employer. Les comètes qui approchent beaucoup de la terre ont une très-grande parallaxe au point que dans certains cas on pourroit s'en servir pour déterminer avec exactitude celle du soleil; la comète de 1770 a passé 50 fois plus près de nous que le soleil, elle auroit pu servir à cet usage.

*Aberration;*

L'Aberration des comètes a été expliquée (2852); mais elle exige qu'on connoisse la distance & le mouvement diurne géocentrique par le moyen de deux longitudes observées ou calculées. Il faut ajouter l'aberration à la longitude observée, quand cette longitude va en croissant. C'est ainsi que toutes les observations, dont on veut se servir pour calculer rigoureusement une orbite, doivent être dégagées des effets qui ne dépendent pas simplement de l'orbite parabolique ou elliptique dont on veut faire le calcul, & qui varient dans le cours d'une seule apparition.

3071. EXEMPLE. Pour faire l'application de ces calculs, je choisirai la comète de 1757, ainsi que je l'avois fait dans la *Théorie* publiée en 1759; voici les trois observations dont je me servis pour déterminer son orbite; j'y négligeai l'aberration & la parallaxe (3070), comme étant ici de trop peu d'importance, sur-tout pour la première ébauche d'une orbite encore inconnue.

J'ai choisi une observation faite aux environs du nœud, & j'ai réduit la longitude au temps où la latitude auroit été nulle; c'est une attention qui simplifie les calculs; & qu'il est bon d'avoir quand cela est possible.

Temps

Temps moyen à Paris	Longit. de la comète observée.	Latitude observée.	Lieu du Soleil calculé.	Distance du Soleil à la Terre.
Sept. 15 15 <sup>h</sup> 47'	3° 10' 22"	10° 20' Bor.	5° 23' 23"	1,0042
Sept. 30 6 8	5 1 42	0 0	6 7 42	1,0000
Oct. 12 16 42	5 26 19	3 3½ Auf.	6 20 1	0,9965

L'intervalle entre les deux premières observations est de 14j 14<sup>h</sup> 21'; les 14<sup>h</sup> 21' converties en décimales de jour, par la petite table qui est à la pag. 334, nous allons essayer de trouver une parabole qui soit assujétie aux deux premières longitudes observées, & à cet intervalle de temps 14j 60.

Ayant placé le soleil en *S* (fig. 264), la terre en *A*, & formé l'angle *SAD* égal à l'élongation observée de la comète, il s'agit de chercher en quel point *G* de cette ligne doit être placé le lieu de la comète réduit au plan de l'écliptique. Mais nous ne connoissons pas, même à peu-près, les dimensions de l'orbite que nous cherchons; supposons donc au hasard que la comète, le 15 Septembre, étoit aussi éloignée du soleil que la terre dans ses distances moyennes, ou que la distance accourcie *SG* de la comète au soleil étoit 1,0000; d'après cette supposition nous allons déterminer tout le reste, & chercher d'abord par différens essais quelle doit être la distance *SH* dans la seconde observation pour que l'intervalle de 14j 60 puisse avoir lieu. Supposons, par exemple, *SH* = 0,6000 ou six dixièmes de la distance moyenne du soleil; dans le triangle *ASG*, on connoît *AS* distance de la terre au soleil, = 1,0042; *SG* distance réduite de la comète au soleil, *SAG* qui est l'élongation observée = 2° 13' 1", ou la différence entre le lieu du soleil & le lieu de la comète; on dira donc (3055) 1.0000 : sin. 73° 1' : : 1,0042 : sin. 73° 49' 23", c'est l'angle *G*, l'angle à la comète, ou la parallaxe annuelle; en l'ajoutant avec l'angle à la terre 73° 1', & prenant le supplément du reste, on

Fig. 264.

Première  
supposition.

## 354 ASTRONOMIE, LIV. XIX.

a l'angle au soleil ou l'angle de commutation  $ASG$ , de  $33^{\circ} 9' 37''$ ; qui ajouté avec la longitude de la terre  $11^{\circ} 23' 23''$  toujours opposée à celle du soleil, donne la longitude héliocentrique de la comète  $0^{\circ} 26' 32' 37''$ . Si la comète étoit plus occidentale ou moins avancée en longitude que la terre  $A$ , il faudroit retrancher la commutation de la longitude de la terre pour avoir celle de la comète.

Incertitude  
sur l'angle à  
la comète,

L'angle  $G$  ou l'angle à la comète peut être aigu, ou obtus; car au lieu du point  $G$  on pourroit prendre le point  $g$  tel que  $Sg$  fût égal à  $SG$ : les deux conditions de la distance au soleil, & de l'élongation observée ou de l'angle  $A$ , ne déterminent rien à cet égard, & toutes les fois qu'on a un triangle rectiligne  $ASG$ , dont deux côtés inégaux sont donnés, avec l'angle opposé à l'un d'eux, le côté opposé à cet angle peut toujours avoir deux valeurs égales,  $SG, Sg$ , qui rendront pour le  $3^{\text{e}}$  angle  $S$  des valeurs d'autant plus différentes que l'angle donné sera plus aigu; cela ne produira dans les calculs aucune incertitude, pourvu que l'on prenne l'angle  $G$  toujours de même espèce dans les différentes suppositions d'une même hypothèse; mais le choix que l'on fait de l'un ou de l'autre entre pour beaucoup dans le résultat; & afin de ne pas s'écarter trop des observations, il est toujours utile de faire des figures exactes, qui conduisent le calcul & montrent à peu-près le choix que l'on doit faire des hypothèses pour en diminuer le tâtonnement; on est obligé souvent de faire cet angle obtus pour avoir un mouvement assez grand, & qui puisse satisfaire à l'intervalle des jours donnés.

3072. Dans la seconde observation faite en  $H$ , l'on dira  $0,6000 : \sin. 36^{\circ} 0' :: 1,0000 : \sin. 78^{\circ} 25' 9'' (3055)$ , c'est l'angle à la comète, dans la seconde observation, c'est-à-dire  $BHS$ ; mais je supposerai cet angle obtus pour ne pas avoir un mouvement trop grand, sans quoi le point  $h$  dans lequel  $Sh = SH$ , supposeroit la comète à une trop grande distance; ajoutant donc  $101^{\circ} 34' 51''$  avec l'élongation observée  $36^{\circ} 0' 0''$ ; le supplément du reste, ou



$42^{\circ} 25' 9''$ , est l'angle de commutation, qui ajouté avec la longitude de la terre  $7^{\circ} 42' 0''$ , donne la longitude héliocentrique de la comète en  $H$ ,  $1^{\text{s}} 20^{\circ} 7' 9''$ , plus grande que la première de  $23^{\circ} 34' 32''$ .

Pour trouver la latitude héliocentrique de la comète dans la première observation, on fera cette proportion (1145) : le sinus de l'angle à la terre  $73^{\circ} 1'$ , est au sinus de l'angle au soleil  $33^{\circ} 9' 37''$ , comme la tangente de la latitude géocentrique observée  $10^{\circ} 20'$ , est à la tangente de la latitude héliocentrique  $5^{\circ} 57' 11''$ .

Pour connoître la distance de la comète au soleil dans son orbite, c'est-à-dire, le rayon vecteur, on ôtera du logarithme de la distance accourcie, que l'on a supposée 1,0000 celui du cosinus de la latitude trouvée, & l'on aura le logarithme du rayon vecteur 0,00235 pour la première observation. On feroit également ces deux opérations pour la seconde, si l'on n'avoit pu la choisir dans le nœud même, où il n'y a ni latitude, ni réduction pour la distance ; ainsi le rayon vecteur  $SH$  est la distance même, que l'on a supposée 0,6000 (3071).

3073. Pour avoir le mouvement de la comète sur son orbite dans le cas actuel, on formera un triangle  $NRM$  (fig. 265), dans lequel  $MM$  sera le mouvement de la comète, vu du soleil & réduit à l'écliptique,  $23^{\circ} 34' 32''$ , &  $MR$  la latitude héliocentrique dans la première observation,  $N$  étant le lieu de la seconde observation ; on dira  $R : \cos. NM :: \cos. MR : \cos. NR$ , & l'on aura le mouvement sur l'orbite  $24^{\circ} 16' 26''$  ; c'est aussi la différence des anomalies vraies de la comète dans ces deux observations, dont il faut prendre le quart  $6^{\circ} 4' 6'' \frac{1}{2}$ .

Fig. 265.

Si dans la seconde observation la comète avoit eu une latitude, comme  $QO$ , on se serviroit du triangle  $PQR$ , dans lequel connoissant l'angle  $P$  mesuré par  $MO$  ; égal au mouvement de la comète sur l'écliptique, avec les distances au pôle  $PR$  &  $PQ$ , on chercheroit le côté  $QR$ , c'est-à-dire, le mouvement sur l'orbite (3057).

Il y a aussi des cas où le mouvement vu du soleil est

très-petit, l'usage des cosinus exposeroit alors à de trop grandes erreurs ; on considère donc le triangle  $QRX$ , comme un triangle rectiligne dans lequel  $RX$  est égal à la différence des latitudes observées, &  $QX = P.$  lin.  $PQ$  (892), & l'on cherche l'hypothénuse  $QR$  par la trigonométrie rectiligne : c'est ce que j'ai été obligé de faire en calculant l'orbite de la comète de 1769, par les premières observations qu'on avoit faites.

3074. Pour trouver les deux anomalies vraies, l'on prendra la moitié de la différence des logarithmes des deux rayons vecteurs (3043), c'est 0,11210 qui dans les tangentes répond à  $52^{\circ} 18' 49''$  ; on en ôtera  $45^{\circ}$ , & le log. tang. du reste moins le log. tang. du quart du mouvement ou de  $6^{\circ} 4' 6'' \frac{1}{2}$ , donnera celui de la tang. de  $50^{\circ} 21' 50''$  ; on en ôtera, & l'on y ajoutera séparément le quart du mouvement, on doublera chaque résultat, & l'on aura les deux anomalies vraies  $88^{\circ} 35' 27''$ , &  $112^{\circ} 51' 53''$  ; la plus petite répond à la plus petite distance, c'est-à-dire, à la seconde observation. Il est aisé de voir que ces deux anomalies sont du même côté du périhélie, puisque c'est leur différence  $24^{\circ} 16' 26''$  qui est le mouvement de la comète ; si c'étoit leur somme il s'en suivroit que le périhélie est entre les points  $G$  &  $H$ , (3059).

On prend donc dans la table générale les jours qui répondent à ces deux anomalies, & l'on trouve 105j, 670 & 217j, 674, dont la différence est 112j, 004 ; il faut les convertir en un nombre de jours qui convienne à la comète dont il s'agit.

Le log. cosinus de la moitié d'une des anomalies vraies trouvées, par exemple, celui de  $56^{\circ} 25' 56'' \frac{1}{2}$ , étant ajouté deux fois à celui de la distance ou du rayon vecteur correspondant 0,002348, donne le log. de la distance périhélie ; les  $\frac{1}{2}$  font 9,231512 : ce log. ajouté avec celui de 112j 004 donne celui de 19j 087 ; c'est le nombre qui devroit être égal à 14j 598 intervalle observé, si la distance 0,6000 eût été prise telle qu'il convenoit à la première distance 1,0000 pour représenter l'intervalle

des deux observations. Ainsi les distances de cette comète au soleil étant supposées 1,0000 & 0,6000 avec les longitudes & les latitudes telles qu'elles ont été observées (3071); il faudroit qu'il y eût 19 jours d'intervalle, au lieu de 14, pour que la comète eût véritablement décrit une parabole, suivant les loix expliquées ci-dessus. Ce n'est donc pas 0,6000 qu'il falloit supposer pour la distance dans la seconde observation; il faut prendre une distance moins différente de la première pour que le mouvement héliocentrique soit moindre, & que l'intervalle de temps qu'on trouvera soit moins considérable.

Si en diminuant la seconde distance pour se rapprocher de l'intervalle donné, on parvient au point où il n'est plus possible de faire la proportion qui doit donner l'angle à la comète dans la seconde observation, ce sera une preuve que l'hypothèse ne peut avoir lieu, & il faudra diminuer la première distance supposée, c'est-à-dire, former une autre hypothèse; quelquefois il suffit de rendre obtus l'angle à la comète.

3075. Dans notre exemple, il faudra faire une seconde supposition pour la distance: si l'on suppose 0,6400, on trouve 15j, 2<sup>3</sup>/<sub>4</sub> intervalle qui est encore trop fort.

Troisième supposition: si la distance est 0,6600, on trouve 13j, 96 intervalle qui devient au contraire trop petit.

Quatrième supposition qui est entre les deux précédentes: si l'on prend 0,6525, on trouve 14j, 42, & cet intervalle est encore un peu trop petit.

Mais si l'on emploie enfin 0,6496, on trouve 14j, 60 qui est l'intervalle observé. Dans cette dernière supposition, on trouve l'angle à la comète  $64^{\circ} 48'$ , (je me contente d'employer ici les minutes), l'angle au soleil  $28^{\circ} 48'$ , la longitude héliocentrique dans cette seconde observation  $36^{\circ} 30'$ , dont ôtant la première longitude  $26^{\circ} 32' \frac{1}{2}$ , il vient pour le mouvement  $MM'$  sur l'écliptique  $9^{\circ} 57' \frac{1}{2}$ ; le mouvement  $NR$  sur l'orbite se trouve  $11^{\circ} 35'$ ; les anomalies  $124^{\circ} 19'$  &  $135^{\circ} 54'$ , le logar.

Dernière  
supposition.

de la distance périhélie 9, 15 141; les jours correspondans aux anomalies dans la table 341, 54 & 615, 28 l'intervalle 2731, 74; son log. ajouté avec les  $\frac{1}{2}$  du log. de la distance périhélie ou 8, 72712, donne celui de 14j, 60. Cet intervalle étant le même que dans l'observation, nous avons une première hypothèse exacte, & qui satisfait aux deux premières observations; il ne s'agit plus que de voir combien elle s'écartera de la troisième observation.

On peut remarquer 1°, que cette comète est directe; puisque la seconde longitude héliocentrique est plus grande que la première; 2°, qu'elle n'avoit point encore passé le périhélie dans le temps de ces deux observations, puisque les rayons vecteurs vont en diminuant, & qu'ils sont tous deux du même côté du périhélie (3074).

Éléments  
dans la 1<sup>re</sup>  
hypothèse.

3076. Pour calculer la 3<sup>e</sup> observation, dans cette première hypothèse, il faut avoir le nœud, l'inclinaison & le périhélie; le nœud est tout trouvé dans ce cas particulier, puisque la latitude est nulle dans la seconde observation; sa longitude est celle de la comète dans cette observation, c'est-à-dire, 36° 30'.

Fig. 265.

L'inclinaison se trouvera dans ce cas particulier, en disant: le sinus du mouvement  $NM$  sur l'écliptique 9° 57' $\frac{1}{2}$  est au rayon, comme la tangente de la latitude  $MR$  dans la première observation, 5° 57' est à la tangente de l'inclinaison  $N = 31° 5'$ ; parce que dans le triangle  $NMR$  (fig. 265), si  $NM$  est l'écliptique,  $R$  le lieu de la comète dans la première observation,  $N$  le lieu de la comète dans son nœud au temps de la seconde observation; il ne s'agit que de résoudre le triangle  $NMR$ , dans lequel  $\sin. MN : R :: T. MR : T. N$ . Mais si la comète avoit une latitude dans chacune des deux observations, il faudroit résoudre un triangle  $PQR$  (3057), & ensuite le triangle  $NMR$ , pour avoir  $MN$  & le lieu du nœud.

Pour trouver le lieu du périhélie, on ajoutera la longitude de la comète sur son orbite 36° 30' avec l'anomalie qui répond à cette observation 124° 19', & l'on aura 5° 10° 49' pour le lieu du périhélie dans cette hypothèse.

Si l'observation étoit arrivée après le périhélie, & que la comète fût également directe, il faudroit retrancher l'anomalie de la longitude, pour avoir le périhélie. Si l'une des longitudes n'étoit pas sur l'orbite même de la comète, il faudroit l'y réduire en prenant d'abord la distance au nœud comptée sur l'écliptique telle que  $NM$ , & disant  $\cos. N : R :: \text{tang. } NM : \text{tang. } NR$  (3064).

Fig. 265.

Il faut avoir encore le temps, où une comète avec ces élémens auroit passé par le périhélie dans la même hypothèse. Pour cela on choisit un des nombres de jours trouvés ci-dessus, par exemple, 615j, 28, on le convertit en jours de cette comète (3040), ce qui fait 32j, 823 ou 32j 19<sup>h</sup> 45', on ajoute ce temps avec celui de l'observation, 15 sept. 15<sup>h</sup> 47', parce qu'elle a précédé le périhélie, & l'on trouve le 18 Octobre 11<sup>h</sup> 32' passage de la comète par son périhélie.

3077. La 3<sup>e</sup> observation qu'il s'agit de calculer fut faite le 12 Octobre à 16<sup>h</sup> 42', la distance au périhélie est de 5j 18<sup>h</sup> 50' ou de 5j, 785, on les convertit en jours de la table, en ôtant de son log. les  $\frac{1}{2}$  de celui de la distance périhélie, & l'on a 108j, 440 avec lesquels on trouve dans la table générale 89° 35' d'anomalie, pour le temps de la troisième observation.

Cette anom. 28° 29° 35' doit être ôtée du lieu du périhélie, 5° 10° 48'  $\frac{1}{2}$ , puisque la comète n'étoit pas encore à son périhélie quoique son mouvement fût direct, il reste la longitude héliocentrique de la comète sur son orbite dans la 3<sup>e</sup> observation, 28° 11° 13'. Pour la réduire à l'écliptique on prend sa distance au nœud le plus proche qui étoit à 36° 30', cette distance 34° 43' est l'argument de latitude, & l'on fait ces deux proportions,  $R : \cos. 31° 5' :: \text{tang. } 34° 43' : \text{tang. } 30° 41'$  argument de latitude réduit à l'écliptique;  $R : \sin. 31° 5' :: \sin. 34° 43' : \sin. 17° 6'$  latitude héliocentrique dans la 3<sup>e</sup> observation. Puisque la distance au nœud est 30° 41', & que le nœud est à 36° 30' de longitude, il s'ensuit que la longitude réduite à l'écliptique est 28° 7° 11', celle du soleil est 68° 20° 1', on la retranchera de celle de la comète; parce qu'elle est

dans le cas des planètes inférieures, la distance réduite étant plus petite que celle de la terre au soleil, & l'on aura la commutation  $7^s 17' 10''$ . (Voyez les tables, pag. 108, à la fin).

Le log. de la distance périhélic étant ajouté avec celui du cosinus de la latitude  $17^{\circ} 6'$  moins deux fois celui de la demi-anomalie  $44^{\circ} 47' \frac{1}{2}$ , on a le log. de la distance réduite de la comète au soleil 9,43967; ce logarithme se retranche de celui de la distance du soleil à la terre ou de 0,9565, c'est-à-dire, du log. 9,99848, & il reste celui de la tang. de  $74^{\circ} 53' \frac{1}{4}$ ; on en ôte  $45^{\circ}$ , & le log. de la tang. du reste ajouté avec celui de la demi-commutation ou de son supplément  $66^{\circ} 25'$ , donne celui de  $52^{\circ} 47'$ , cette quantité ôtée de  $66^{\circ} 25'$ , donne l'élongation de la comète  $13^{\circ} 38'$ ; cette élongation ôtée de la longitude du soleil  $6^s 20' 1''$ , donne pour la longitude de la comète calculée dans cette première hypothèse  $6^s 6^{\circ} 23'$ , plus grande de  $10^{\circ} 4'$  que la longitude observée  $5^s 26^{\circ} 19'$ .

3078. Ainsi cette première hypothèse dans laquelle nous avons supposé 1,0000 pour la distance de la comète au soleil le 15 Septembre, & dans laquelle nous avons trouvé qu'il falloit supposer 0,6496 pour le 30 Septembre, afin de satisfaire aux deux premières observations, représente fort mal la troisième; il faut donc former une seconde hypothèse dans laquelle les distances soient plus petites & donnent à la comète un mouvement plus petit; par exemple, au lieu de 1,0000, nous supposerons 0,9700 seulement, pour le 15 de Septembre.

Seconde  
hypothèse.

SECONDE HYPOTHÈSE. La distance de la comète au soleil réduite à l'éclip. dans la 1<sup>re</sup> observ. étant supposée 0,9700, il faut faire comme dans la première hypothèse différentes suppositions (3075), pour la distance qui convient à la seconde observation du 15 Septembre; & par de semblables calculs, on trouvera que c'est 0,6587 qu'il faut supposer, le 15 Septembre, pour que ces deux distances donnent une parabole où l'intervalle des deux longitudes observées soit de 14j 60; dans cette seconde hypothèse, on

trouve

trouve le nœud à  $34^{\circ} 52'$ , l'inclinaison  $16^{\circ} 34'$ , le périhélie  $4^{\text{s}} 11^{\text{o}} 24'$ , le passage au périhélie pour le 20 Octobre  $20^{\text{h}} 56'$ , le log. de la distance périhélie 9,46517, la longitude pour le 12 Octobre  $5^{\text{s}} 28^{\text{o}} 40'$ , trop grande de  $2^{\circ} 21'$ . Fig. 264.

3079. Ces erreurs en longitude de  $10^{\circ} 4'$  & de  $2^{\circ} 21'$ , Erreur de  $2^{\circ} 21'$ . sont trop grandes pour qu'on puisse, par de simples parties proportionnelles, espérer d'avoir précisément deux distances exactes, c'est-à-dire, propres à former une 3<sup>e</sup> hypothèse qui satisfasse aux trois observations; si l'on fait cette proportion  $7^{\circ} 43'$  différence des deux erreurs est à 300, différence des deux distances, comme la plus petite erreur  $2^{\circ} 21'$  est à 91, & qu'on ôte cette partie proportionnelle de 0,9700, on a 0,9609 pour la distance qu'il faudroit supposer; mais ayant formé une nouvelle hypothèse sur cette distance, on trouve encore une erreur sensible dans le calcul de la 3<sup>e</sup> observation; j'ai reconnu que c'étoit 0,9643 qu'il falloit enfin adopter pour la valeur de  $SG$ ; & par différentes suppositions, j'ai trouvé que la seconde distance  $SH=0,6675$  étoit celle qui convenoit à cette 3<sup>e</sup> hypothèse, pour satisfaire aux deux premières observations.

3080. TROISIEME HYPOTHÈSE. Avec les deux distances  $SG$ ,  $SH$  0,9643 & 0,6675, on trouve par les calculs des articles 3071 & suiv. les longitudes héliocentriques  $15^{\circ} 31'$  &  $33^{\circ} 24'\frac{2}{3}$ , les anomalies  $107^{\circ} 12'\frac{2}{3}$  &  $88^{\circ} 52'$  le logarithme de la distance périhélie 9,53192, & l'intervalle qui répond à la différence des anomalies 141 600, conforme à l'observation. Les nombres de jours qui répondent dans la table générale à ces anomalies étant réduits en jours de la comète, par l'addition des  $\frac{1}{2}$  du log. de la dist. périhélie, donnent 351, 733 & 211 132; ces intervalles de temps étant ajoutés aux temps des deux observations respectivement, donnent chacun séparément le passage au périhélie pour le 21 Octobre  $9^{\text{h}} 20'$ . La seconde longitude  $33^{\circ} 24'\frac{2}{3}$ , qui est aussi le lieu du nœud descendant, étant comptée sur l'orbite de la comète, on l'ajoute avec l'anomalie correspondante  $88^{\circ} 52'$ , & l'on a

## 362 ASTRONOMIE, LIV. XIX.

le lieu du périhélie qui se compte toujours sur l'orbite  $4^s 2^o 16' \frac{1}{4}$ . On la peut trouver également par la première observation, car le mouvement sur l'orbite qui est de  $18^o 20' \frac{2}{3}$ , étant ôté de la seconde longitude sur l'orbite, on a la première longitude comptée sur l'orbite de la comète  $15^o 4'$ , & en y ajoutant la première anomalie, on trouve  $122^o 16' \frac{1}{4}$  pour le lieu du périhélie.

L'inclinaison se trouve, en disant, le sinus de l'arc  $NR = 17^o 53' \frac{2}{3}$ , parcouru sur l'orbite depuis la première observation jusqu'à la seconde qui a été faite dans le nœud, est à la tangente de la latitude  $MR = 4^o 6' \frac{1}{2}$ , dans la première observation, comme le rayon est à la tangente de  $13^o 9' \frac{1}{3}$ , c'est l'inclinaison de l'orbite.

3081. La 3<sup>e</sup> observation est éloignée du périhélie de 81 693, qui réduits en jours de la table, font 431, 781, & répondent à  $52^o 27' 25''$  d'anomalie, ainsi la longitude sur l'orbite au temps de la 3<sup>e</sup> observation est  $2^s 9^o 49' \frac{1}{3}$ , & le nœud étant  $1^s 3^o 24' \frac{2}{3}$ , l'argument de latitude sera  $36^o 24' \frac{2}{3}$ , on le réduira à l'écliptique, comme dans l'art. (3077), & l'on aura  $35^o 41'$ , qui ajoutés avec le lieu du nœud, donneront la longitude réduite  $2^s 9^o 6'$ , & la comutation  $7^s 19^o 5'$ .

Le rayon est au sinus de l'inclinaison, comme le sinus de l'argument de latitude  $36^o 24' 40''$  est au sinus de la latitude héliocentrique  $7^o 46'$ ; le log. de son cosinus étant ajouté à celui de la distance périhélie, on en ôtera le double du log. cos. de  $26^o 13' \frac{2}{3}$ , qui est la demi-anomalie, & l'on aura pour logar. de la distance au soleil réduite à l'écliptique 9,62230; enfin, on trouvera l'élongation de la comète  $23^o 41'$ , & sa longitude géocentrique  $5^s 26^o 20'$ ; elle ne diffère que d'une minute de la longitude observée, ce qui me dispensera d'étendre cet exemple plus loin.

3082. M. Pingré ayant rassemblé & combiné 42 observations de cette comète faites en différens lieux, a établi les élémens d'une manière peu différente du résultat auquel je suis parvenu dans les calculs précédens, on le trouvera dans la table des élémens, page 367.

3083. Nous n'avons employé jusqu'ici pour faire



nos hypothèses que les mouvemens ou les erreurs en longitude ; mais il y a des cas où le changement en latitude étant plus rapide, il seroit plus utile de l'employer ; telle est, par exemple, la comète de 1264, qui fit plus de  $40^{\circ}$  en latitude, sans changer sa longitude de trois degrés, ou les comètes de 1593, 1672, 1683, 1707, dont les orbites sont presque perpendiculaires à l'écliptique ; le calcul qu'il faudra faire dans ces cas-là, ne sera pas fort différent de celui dont nous avons donné l'exemple.

Ayant supposé une distance dans la première observation (3071), & cherché la distance dans la seconde observation, telle que l'intervalle de temps qui en résulte soit d'accord avec celui qui a été observé ; & ayant formé deux hypothèses qui représentent chacune exactement cet intervalle, comme on l'a vu ci-devant, on calculera dans chacune de ces deux hypothèses, la latitude au temps de la troisième observation, au lieu de calculer la longitude (3077) ; on les corrigera par le progrès des erreurs, en faisant des parties proportionnelles, jusqu'à ce qu'on ait une hypothèse qui représente exactement cette latitude, & celle-ci donnera les véritables élémens.

3084. Si l'on observe une comète fort éloignée de la terre, si pendant le temps de son apparition il y a peu de changement dans la longitude ou dans la distance au soleil, le lieu du périhélie & la distance périhélie ne sauroient guère se conclure avec exactitude (3050), telle est la comète de 1729, sur laquelle M. Maraldi & M. Kies différencèrent beaucoup (3090) pour le périhélie, quoiqu'elle eût été observée pendant six mois.

3085. De même il est clair que si les latitudes géocentriques ont été petites ou peu inégales, l'inclinaison ou le lieu du nœud en seront d'autant moins sûrs ; telle fut la grande comète de 1744, dont la latitude géocentrique n'alla pas à  $20^{\circ}$ , quoique l'inclinaison qui en résulte soit de  $47^{\circ}$ . Dans la comète de 1769, que je calculai le premier, à Bourg-en-Bresse, la latitude observée n'avoit pas excédé  $10^{\circ} 37'$ , & l'inclinaison de l'orbite

## 364 ASTRONOMIE, LIV. XIX.

étoit de  $41^{\circ}$  ; en pareil cas le lieu du nœud est déterminé avec beaucoup plus de précision que l'inclinaison de l'orbite.

Catalogue  
de 59 comètes.

3086. C'est par des essais à peu-près semblables , mais bien plus longs , sans doute , que Halley déterminâ par les anciennes observations 24 paraboles ou orbites cométaires , y compris celle de 1698 , M. Bradley , M. Maraldi , M. de la Caille , M. Struick , M. Pingré & moi , en avons calculé plusieurs autres ; en sorte que le nombre s'est accru jusqu'à 59 , y compris celle de 1771 qui paroît encore actuellement ( Janvier 1771 ). Mais je ne compte que pour une seule toutes les apparitions de celles dont les périodes sont connues ( 3093 ).

Éléments  
d'une orbite.

3087. LES ÉLÉMENTS d'une comète sont les six articles qui déterminent la situation & la grandeur de l'orbite qu'elle a décrite , & qui établissent sa théorie : le lieu du nœud vu du soleil , l'inclinaison , le lieu du périhélie , la distance dans le périhélie , & le temps moyen du passage , qui tient lieu d'époque. Enfin la direction de son mouvement qui peut être direct ou rétrograde. Nous y ajouterions l'excentricité si elle n'étoit inconnue dans la plupart des comètes. Tels sont les points principaux de la table suivante , qui contient en abrégé le résultat de toutes les observations faites jusqu'ici sur les comètes.

3088. Les distances périhéliques marquées dans la 6<sup>e</sup> colonne , supposent que la distance moyenne du soleil à la terre est l'unité ; si l'on veut la supposer de 100000 , comme dans les tables du soleil & des planètes , il n'y a qu'à prendre cinq chiffres après la virgule qui sépare les décimales , en ajoutant s'il le faut un ou plusieurs zéros. Par exemple , on aura 41081 pour la distance périhélique de la comète de 1264 , 45000 pour 1301.

De la table  
des élémens.

3089. Les comètes de 837 , 1231 , 1299 , 1301 & 1337 , ont été calculées par M. Pingré , sur des observations faites à la Chine ; auxquelles il a joint aussi pour celles de 1299 & 1301 quelques observations Européennes. Pour celle de 1264 , j'ai rectifié une faute dans la

table de M. de la Caille; il faut voir les transactions philosophiques de 1751, & les mémoires de l'acad. de 1760. Celle de 1337, avoit été déjà calculée par M. Halley, mais elle a été rectifiée par M. Pingré, sur des observations Chinoises plus exactes que celles de Grégoras, dont M. Halley avoit fait usage. Celle de 1533, avoit été calculée par M. Halley, comme on le peut voir dans ses tables, pag. 91, édition de 1759, & ensuite par M. Pingré, sur des observations d'Appian, qu'il a reconnues pour défectueuses, & je n'ai rapporté que le calcul fait par M. Douwes, qui travailloit en Hollande avec M. Struick; on mettoit auparavant 10° de plus à l'inclinaison, & 11° de plus pour le périhélie. J'ai rapporté de deux manières différentes les élémens de la comète de 1580, M. Pingré les a calculés plus exactement que M. Halley, qui n'avoit pas connoissance des observations de Tycho (481).

Au sujet de la comète de 1593, on peut voir les *mémoires de l'acad.* 1743, pag. 16, 1747, pag. 562, & 1763, pag. 16, où l'on observe l'erreur qui s'étoit glissée dans la dernière édition des leçons d'astronomie de M. de la Caille. La comète de 1596, avoit été calculée par Halley, sur des observations de Mæstlin, M. Pingré y a employé les observations manuscrites de Tycho-Brahé.

Pour la comète de 1672, M. Struick (T. I. pag. 270) marque le périhélie dans le Cancer, mais il doit être dans le Taureau : c'est une faute d'impression, elle est indiquée à la fin du second volume du même auteur qui a paru quelques années après. Ce livre renferme de très-bonnes recherches sur les comètes, & sur d'autres parties de l'astronomie.

Les chiffres Arabes qui se trouvent dans la première colonne, parmi les chiffres Romains, indiquent la ressemblance des comètes avec d'autres; ainsi le chiffre 49 qui est vis-à-vis de 1456 annonce que cette comète est la même que la XLIX<sup>e</sup> qui est celle de 1759.

## É L É M E N S

Des LIX Comètes qui ont été observées assez exactement  
pour pouvoir être calculées.

Ordre des Comètes.	Années de l'appar.	Longitude du Nœud ascendant.			Inclinaison l'Orbite.			Lieu du Périhélie.			Distance périhélie celle du Soleil étant 1.	Passage au Périhélie Temps moyen à Paris.		Mouvement.	Noms des Auteurs qui ont calculé ces Orbi- tes ; avec la note des articles de ce Livre, ou il en est parlé.
		S. D. M. S.	D. M. S.	D. M. S.	S. D. M. S.	D. M. S.	S. D. M. S.	Jours.	H. M. S.						
I.	837	6 26 33	10 01 29	9 19 3	0,58	1 Mars.....	Rétrograde.	Pingré, ( 3089 ).							
II.	1231	0 13 30	6 5	4 14 48	0,9478	30 Janv..... 7 22 0	Dircte.	Pingré ( 3089 ).							
III.	1264	5 19 0	36 30	9 21 0	0,445	6 Juillier.... 8 0 0	Dircte.	Dunthor ( 3089 ).							
		5 28 45	30 35	9 5 45	0,41081	17 Juillier.... 6 10 0	Dircte.	Pingré ( 3089 ).							
IV.	1299	3 17 8	68 57	0 3 20	0,3179	31 Mars.... 7 38 0	Rétrograde.	Pingré ( 3089 ).							
V.	1301	0 15 envier.	70 envier.	9 01 108	0,45	22 Octob. environ.	Rétrograde.	Pingré ( 3089 ).							
VI.	1337	2 24 21	32 11	1 7 59	0,40666	2 Juin. .... 6 34 0	Rétrograde.	Halley, à peu p. (3089)							
		2 6 22	32 11	0 20	0,6445	1 Juin..... 0 40 0		Pingré, ( 3089 ).							
49	1456	1 18 30	17 56	10 1 0	0,5855	8 Juin..... 22 10 0	Rétrograde.	Pingré, à peu p. (3093)							
VII.	1472	9 11 46 20	5 20	1 15 33 30	0,54273	28 Févlier.... 22 32 0	Rétrograde.	Halley, à peu p. (3012)							
49	1531	1 19 25	17 56	10 1 39	0,56700	24 Août..... 21 27 0	Rétrograde.	Halley, à peu p. (3093)							
19	1532	2 20 27	32 36	3 21 7	0,50910	19 Octobre.... 22 21 0	Dircte.	Halley, à peu p. (3095)							
VIII.	1533	4 5 44	35 49	4 27 16	0,2028	16 Juin..... 19 39 0	Dircte.	Dowaves, à peu p. (3099)							
3	1556	5 25 42	32 6 30	9 8 50	0,46390	21 Avril..... 20 12 0	Dircte.	Il, à peu p. (3112, 3095)							
IX.	1577	0 25 52	74 32 45	4 9 22	0,18342	26 Octob. .... 18 54 0	Rétrograde.	Halley, v. art. 3013.							
X.	1580	0 18 57 20	64 40 0	3 19 5 50	0,59268	28 Novemb. 15 9 0	Dircte.	Halley, à peu p. (3089)							
		0 19 7 37	64 51 50	3 19 11 55	0,59553	28 Novemb. 13 54 0		Pingré, exactement.							
XI. 49	1582	7 21 7 20	61 27 50	8 5 23 10	0,32557	6 Mai..... 16 9 0	Rétrograde.	Pingré, à peu p. (3110)							
XII.	1585	1 7 42 30	6 4	0 8 51	1,09358	7 Oct. N. S. 19 29 0	Dircte.	Halley ( 3000 ).							
XIII.	1590	5 15 30 40	29 40 40	7 6 54 30	0,57661	8 Fév. N. S. 3 54 0	Rétrograde.	Halley.							
XIV.	1593	5 14 15 0	87 58	5 26 19	0,08911	18 Juil. N. S. 13 48 0	Dircte.	La Caille, à p. p. (3089)							
XV.	1596	10 15 36 50	52 9 45	7 28 30 50	0,549415	8 Août..... 15 43 0	Rétrograde.	Pingré ( 3089, 3110 ).							
		10 12 12 30	55 12	7 18 16	0,51293	10 Août..... 20 4 0	Rétrograde.	Halley.							
49	1607	1 20 21	17 2	10 2 16 0	0,58680	26 Octob. .... 3 59 0	Rétrograde.	Halley 3093.							
XVI.	1613	9 23 25	21 28	10 18 20 0	0,51288	17 Août..... 3 12 0	Dircte.	Pingré, à peu près.							
XVII.	1618	2 16 1	37 34	0 2 14 0	0,37975	8 Novemb. 12 32 0	Dircte.	Halley.							
XVIII.	1621	2 28 10	79 23 0	0 28 13 40	0,84750	12 Novemb. 15 49 0	Dircte.	Halley.							
XIX.	1661	2 22 30 30	32 35 50	3 25 58 40	0,44351	26 Janvier.... 23 50 0	Dircte.	Halley.							
XX.	1664	2 21 14	21 18 30	4 10 41 25	1,025755	4 Décembre 12 1 0	Rétrograde.	Halley ( 3016 ).							
XXI.	1665	7 18 2	76 5 0	2 11 54 30	0,10649	24 Avril..... 5 24 0	Rétrograde.	Halley.							
XXII.	1672	9 27 30 30	33 22 10	3 16 59 30	0,69739	1 Mars..... 8 46 0	Dircte.	Halley.							
XXIII.	1677	7 26 49 10	79 3 15	4 17 37 5	0,28059	6 Mai..... 0 46 0	Rétrograde.	Halley.							
XXIV.	1678	5 11 40 0	3 4 20	10 27 46 0	1,23801	26 Août..... 14 12 0	Dircte.	Sruick, à peu près.							
XXV.	1680	9 2 2	60 56 0	0 22 39 30	0,006125	13 Décembre. 0 15 0	Dircte.	Halley ( 3019 ).							
49	1682	1 21 16 30	17 56 0	10 2 52 45	0,58328	14 Septemb. 7 48 0	Rétrograde.	Halley. C'est celle de 1759							
XXVI.	1683	5 23 23 0	83 11 0	2 25 29 30	2,56020	13 Juillier.... 2 59 0	Rétrograde.	Halley.							
XXVII.	1684	8 28 15 0	65 48 40	7 28 52 0	0,96015	8 Juin..... 10 25 0	Dircte.	Halley.							
XXVIII.	1686	11 20 34 40	31 21 40	2 17 0 30	0,32500	16 Septemb. 14 42 0	Dircte.	Halley.							
XXIX.	1689	10 23 45 20	69 17 0	8 23 44 45	0,016889	1 Décembre.. 15 5 0	Rétrograde.	Pingré, à peu près.							
XXX.	1698	8 27 44 15	11 46 0	9 0 51 15	0,69129	18 Octob. .... 17 6 0	Rétrograde.	Halley.							
XXXI. 30	1699	10 21 45 35	69 20 0	7 2 31 6	0,74400	13 Janvier.... 8 32 0	Rétrograde.	La Caille, à peu près.							
XXXII.	1702	6 9 25 15	4 30 0	4 18 41 3	0,64500	13 Mars..... 14 22 0	Dircte.	La Caille, à peu près.							

# É L É M E N S

Des LIX Comètes qui ont été observées assez exactement pour pouvoir être calculées.

Ordre des Comètes.	Années de l'apari.	Longitude du Nœud ascendant.		Inclinaison de l'Orbite.		Lieu de Périhélie.		Distance périhélie celle du Soleil étant 1.	Passage au Périhélie Temps moyen à Paris.		Mouvement.	Noms des Auteurs qui ont calculé ces Orbites ; avec la note des articles de ce Livre, ou il en est parlé.
		S.	D. M. S.	D.	M. S.	S.	D. M. S.		Jours.	H. M. S.		
XXXIII.	1706	0 13 11	40	55 14	10	2 12 29	10	0,42581	30 Janv.....	4 32	0	La Caille.
XXXIV.	1707	0 13 11	23	55 14	5	2 12 36	25	0,426865	30 Janv.....	5 5	0	Straick.
		1 22 46	35	88 36	0	2 19 54	56	0,85974	11 Décemb..	23 39	0	La Caille.
		1 22 50	29	88 37	40	2 19 58	9	0,85904	11 Décemb..	23 52 47	0	Straick.
XXXV.	1718	4 8 43	0	30 20	0	4 1 30	0	1,02655	14 Janvier...	23 48	0	La Caille.
XXXVI.	1723	4 7 55	20	31 12	53	4 1 26	36	1,02565	15 Janvier...	1 24 36	0	Straick.
		0 14 16	0	49 59	0	1 12 52	20	0,99865	27 Septemb.	16 20	0	Bradley.
XXXVII.	1729	10 10 32	37	76 58	4	10 22 40	0	4,26140	25 Juin.....	11 16	0	La Caille (3090, 3112)
XXXVIII.	1737	10 10 35	15	77 1 58	10	22 16 53	4,0698	23 Juin.....	6 45 22	0	0	Dowdes.
		7 16 22	0	18 20 45	10	25 55	0	0,22182	30 Janvier...	8 30	0	Bradley.
		6 27 25	14	55 42 44	3	12 38 40	0,67358	17 Juin.....	10 9	0	0	La Caille.
XL.	1742	6 5 38	29	66 59 14	7	7 35 13	0,76568	8 Février...	4 48	0	0	La Caille.
		6 5 34	45	67 4 11	7	7 33 14	0,765555	8 Février...	4 30 30	0	0	Straick.
		2 18 21	15	2 19 33	3	2 41 45	0,83501	10 Janvier...	20 35	0	0	La Caille, à peu près.
XLI.	1743	2 8 10	48	2 15 50	3	2 58 4	0,838115	10 Janvier...	21 24 57	0	0	Straick.
		0 5 16	25	45 48 20	8	6 33 52	0,52057	20 Septemb.	21 26	0	0	Klinkenberg.
		1 15 46	11	47 5 18	6	17 10	0,22250	1 Mars.....	8 13	0	0	La Caille.
XLII.	1744	1 15 45	20	47 8 36	6	17 12 55	0,22206	1 Mars.....	8 26 20	0	0	Bliss, très-exacte.
XLIV.	1747	4 27 18	50	79 6 20	9	7 2	2,19851	3 Mars.....	7 20	0	0	La Caille.
		4 26 58	27	77 56 55	9	10 5	2,29388	28 Février...	11 54 19	0	0	Chefauv.
		7 22 52	16	85 26 57	7	5 0	0,84066	28 Avril.....	19 34 45	0	0	Maraldi.
XLVI.	1748	1 4 39	43	56 59 3	9	6 9 24	0,65525	18 Juin.....	1 33	0	0	Straick, à peu près.
XLVII.	1757	7 4 5	50	12 39 6	4	2 39	0,33907	21 Octobre...	9 42	0	0	La Caille.
XLVIII.	1758	7 20 50	9	68 19 0	8	27 37 45	0,21535	11 Juin.....	3 27	0	0	Pingré.
XLIX.	1759	1 23 49	0	17 39 0	10	3 16	0,58349	12 Mars.....	13 41	0	0	La Caille (3093).
		1 23 45	35	17 40 14	10	3 8	0,58490	12 Mars.....	13 59 24	0	0	De la Lande.
		1 23 49	21	17 35 20	10	3 16 20	0,5836	12 Mars.....	12 57 36	0	0	Maraldi, Mém. 1759.
L.	1760	4 19 39	24	78 59 22	1	23 24 20	0,79851	27 Nov. 1759.	2 28 20	0	0	La Caille (3090).
LI.	1760	2 19 50	45	4 51 32	4	18 24 35	0,96599	16 Déc. 1759.	21 13	0	0	La Caille (3090).
		2 19 20	24	4 42 10	4	19 3 52	0,9618	16 Déc. 1759.	12 58 12	0	0	Chappe.
		11 19 20	0	84 45 0	3	15 15 0	1,0124	28 Mai.....	15 27 0	0	0	De la Lande.
LII.	1762	11 18 35	23	85 40 10	3	13 42 38	1,00686	28 Mai.....	2 2	0	0	Klinkenberg.
		11 19 2 22	85	3 2	3	14 29 46	1,009856	28 Mai.....	7 0 49	0	0	Straick.
		11 18 55	31	85 22 21	3	15 22 23	1,01415	29 Mai.....	0 27 48	0	0	Maraldi.
LIII.	1763	11 26 29	29	73 39 29	2	25 0 48	0,49342	1 Novemb..	21 6 29	0	0	P. Mém. ac. 1764 (3015)
LIV.	1764	3 19 20	6	53 54 19	0	16 11 48	0,56418	12 Février...	10 29	0	0	P. Mém. Ac. 1764.
LV.	1766	8 4 10	50	40 50 20	4	23 15 25	0,50533	17 Février...	8 50	0	0	P. Mém. 1766. p. 424
LVI.	1766	1 17 5	0	8 20 0	6	25 15 0	0,6386	16 Avril.....	17 30	0	0	Pingré (3090).
LVII.	1769	5 25 0	43	40 37 33	4	24 5 54	0,12376	7 Octobre...	12 30	0	0	De la Lande.
		5 25 6	32	40 48 49	4	24 11 7	0,12272	7 Octobre...	1 58 40	0	0	W'argent. Mém. A. 1769
		4 19 39	5	1 44 30	11	25 27 16	0,636878	9 Août.....	0 16 54	0	0	Pingré.
LIX.	1771	3 18 42	10	31 25 55	6	28 22 44	0,12324	22 Nov. 1770.	22 5 48	0	0	Pingré (3050).

## 368 ASTRONOMIE, LIV. XIX.

3090. J'ai rapporté de deux manières différentes les élémens de la comète de 1729, parce que cette comète ayant une très-grande distance périhélie, & ayant fait très-peu de chemin pendant cinq mois qu'elle fut observée, le calcul en est très-délicat, comme l'observe M. de la Caille (*Mém.* 1746, pag. 413), & l'on trouve une très-grande différence entre les résultats des calculs; par exemple, elle avoit passé par son périhélie le 22 Mai 1729, suivant M. Kies (*Mém. de Berlin*, 1745, pag. 46); elle y passa deux mois plus tard, vers le 22 ou le 23 Juillet, selon M. Maraldi, (*Mém.* 1743, pag. 196; le 25 Juin, selon M. de l'Isle, cité par M. de la Caille (*Mém.* 1746, pag. 406), & suivant les leçons d'astronomie de M. de la Caille. M. Struick a donné des élémens qu'il a appliqués aux 44 observations de M. Cassini, rapportées dans les mémoires de 1730; la différence entre l'observation & le calcul n'a jamais été au-delà de  $3\frac{1}{2}'$ . tandis qu'avec les élémens de M. de la Caille, la différence alloit à  $31'$  en longitude, &  $75'$  en latitude (*Mém.* 1763, pag. 18); mais le lieu du périhélie  $10^{\circ} 13' 14'' 48''$  qu'on y trouve est compté sur l'écliptique, je l'ai mis dans la table précédente sur l'orbite, ainsi que dans toutes les autres comètes.

Les deux comètes de 1760, sont appellées comètes de 1759 par quelques astronomes, parce que leur périhélie tombe en effet en 1759; mais j'ai laissé dans la seconde colonne de ma table la date de l'apparition, il en est de même de la dernière, qui a été apperçue le 9 Janvier 1771, & qui peut être rapportée à 1770.

Pour la comète de 1762, j'ai corrigé six signes dans le lieu du nœud ascendant qui se trouve dans les *Mémoires* de 1763, pag. 15. On peut voir au sujet de cette comète les mémoires de 1762, pag. 561, 566, 568, & ceux de 1763, pag. 15.

La seconde comète de 1766, a été observée par M. Messier, M. Cassini, le P. Helfenzriede, à Dillengen, M. de la Nux, à l'Isle de Bourbon; elle a été calculée par M. Pingré; cependant il n'en est pas fait mention dans

dans les mémoires de l'académie, ni dans aucun autre ouvrage que je connoisse.

Les calculs de M. Struick, se trouvent dans l'ouvrage qu'il a publié en Hollandois, en 2 vol. in-4°. Ceux de M. Pingré, le feront avec les détails convenables, dans l'ouvrage qu'il se propose de donner ( 3119 ).

Quoique dans cette table il y ait des secondes à chaque colonne, il n'y a aucune orbite de comète où l'on puisse répondre des secondes, non plus que du 5<sup>e</sup> chiffre sur les décimales de la distance périhélie ; mais j'ai rapporté les résultats tels que les astronomes les ont donnés,

### Du retour des Comètes.

3091. LORSQUE Newton eut reconnu que la comète de 1680 avoit décrit sensiblement une parabole pendant le temps de son apparition, avec des aires proportionnelles au temps ( 3021 ), il fut persuadé que cette comète étoit une véritable planète, & que l'orbite qui paroissoit une parabole n'étoit réellement que la partie inférieure d'une ellipse très-grande & très-allongée : *Diximus cometas esse genus planetarum, in orbibus valde excentricis circa solem revolvantium*, ( *Princip. pag. 508, édir. de 1687* ). Il savoit que ces ellipses très-excentriques ressembloient à très-peu-près à des paraboles ( 3104 ); & en approchant d'autant plus que la distance périhélie est plus petite par rapport au grand axe de l'ellipse, *hinc si cometæ in orbem redeunt, orbes erunt ellipses*. ( *Princ. L. III. prop. 40* ).

3092. Ce fut Halley qui en 1705 eut la gloire de vérifier, par le calcul des anciennes observations, ce que Newton avoit présumé d'après les loix de sa physique ; Halley démontra la ressemblance ou plutôt l'identité de la comète de 1607, & de celle de 1682, & il annonça son retour pour 1759 ; prédiction qui s'est vérifiée sous nos yeux. J'ai donné dans ma théorie des comètes, à la suite de celle de Halley, l'histoire du retour de cette comète fameuse ; on peut voir aussi ce que j'en ai

Prédiction  
de M. Halley

dit dans les *Mémoires* de 1759, pag. 1. Il me suffira de retracer ici en peu de mots la marche des inventeurs.

3093. Lorsque M. Halley eut calculé par observations (3086) les paraboles de 24 comètes, il s'en trouva trois qui se ressembloient beaucoup, celles de 1531, de 1607 & de 1682; les trois paraboles étoient situées de même, les distances périhéliques étoient égales, & les intervalles de temps étoient de 75 à 76 ans; il pensa dès lors que ce pouvoit être la même comète; cependant la différence des inclinaisons & des périodes lui paroissoit un peu trop grande, & il n'osoit prononcer sur l'identité; mais lorsqu'après les recherches qu'il fit des anciennes comètes il en eut trouvé trois autres, dont il est parlé dans les historiens sous les années 1305, 1380, 1456, à des intervalles de temps toujours à peu-près égaux, il ne douta plus que le retour ne fût certain, & il rejeta sur les attractions mutuelles des corps célestes les différences qu'il trouva entre les diverses périodes de cette comète.

3094. Tel fut donc le progrès de nos connoissances en ce genre, d'anciens philosophes regardèrent les comètes comme des corps célestes & périodiques (3010). Newton en conclut qu'elles pouvoient décrire des ellipses très-excentriques, & reparoître à chaque révolution; Halley vérifia cette belle idée en calculant plusieurs comètes, parmi lesquelles il s'en trouva trois qui avoient décrit exactement la même orbite; ce qui annonçoit trois apparitions, & cela s'est trouvé pleinement confirmé quand cette comète a reparu en 1759 dans la même orbite & après le même espace de temps.

Deux autres  
comètes con-  
nues.

3095. Il y a encore deux comètes dont la période paroît connue, & dont on espère le retour; celle de 1532 & de 1661 qu'on attend pour 1789 ou 1790, celle de 1264 & de 1556 pour 1848; au sujet de cette dernière, on peut voir les *Mémoires de l'acad.* 1760, pag. 192. La grande comète de 1680 suiv. M. Halley devoit reparoître l'an 2254, il croit que c'est celle qui parut du temps de César; dans ce cas-là ce seroit aussi celle dont parle Homère, (*Iliad.* IV. 75), & elle auroit paru 519 ans avant J. C.



si cette comète de 1680 achève 7 révolut. en 4028 ans, elle a dû passer près de nous 2349 ans avant J. C. & peut servir à ceux qui veulent expliquer physiquement le déluge, comme M. Whiston, (*New theory of the earth*, pag. 186). Mais il y a des doutes sur celle-ci; voyez à ce sujet ma théorie des comètes, pag. 92. Quoi qu'il en soit de cette dernière, il est évident par le retour de la comète de 1682, que les comètes sont périodiques, & que leurs orbites sont elliptiques, de même que celles des planètes (1220).

3096. Puisque les comètes sont périodiques, aussi bien que les planètes, le problème de Képler dont nous avons donné la solution (1237) a lieu également lorsqu'il s'agit des comètes; quand la durée de la révolution d'une comète est donnée, on a le grand axe de son ellipse, & par conséquent son excentricité, & le temps où elle a passé dans son périhélie; il s'agit alors de trouver pour un instant donné son anomalie vraie; mais ce problème exige une longue approximation.

Nous emploierons pour trouver le vrai lieu d'une comète dans son ellipse trois méthodes différentes; 1<sup>o</sup>, la méthode indirecte (1238) que nous appliquerons aux comètes; 2<sup>o</sup>, la méthode de Halley, qui a donné une table générale des segments d'ellipse pour chaque degré d'anomalie excentrique; 3<sup>o</sup>, celle qui consiste à réduire l'ellipse à une parabole.

Trois méthodes pour trouver l'anomalie vraie.

3097. Dans tous les corps qui tournent autour du soleil, les carrés des temps sont comme les cubes des distances (1224), & l'on verra que c'est une suite nécessaire des loix du mouvement planétaire (3396); ainsi, connaissant la durée de la révolution sydérale d'une planète en jours, on doublera son logarithme, on en ôtera le double du logarithme de la révolution sydérale de la terre (1161) ou de 365, 25638, c'est-à-dire, le log. 5,1251955; le tiers du reste sera le logarithme de la distance de la comète. Je suppose que la période soit de 28070 jours pour la comète de 1759, on trouvera 18,07575 pour la distance moyenne ou le demi axe de l'ellipse qui doit

Trouver la grandeur de l'orbite.

# 372 ASTRONOMIE, Liv. XIX.

être décrite en 28070 jours. Si l'on en ôte la distance périhélie 0,58350, on aura l'excentricité de la comète 17, 49225 ; le log. du demi-petit axe se trouvera aussi en prenant la demi-somme des logar. de la distance aphélie & de la distance périhélie (1246) ; ce log. est 0,6585501, & les deux logarithmes constans (1243) font 0,8925092 & 5,3001714.

Trouver  
l'anomalie  
moyenne.

3098. Connoissant la durée de la révolution, l'on trouve aisément l'anomalie moyenne pour un nombre de jours, en disant 28070 font à 360° ou 1296000'', comme le nombre de jours, compté depuis le périhélie, est à la quantité de l'anomalie moyenne en secondes & en décimales, (car on ne doit pas négliger ici les centièmes de secondes) ; ainsi pour 16<sup>i</sup> 4<sup>h</sup> 44' ou 161, 19722, on trouveroit 12' 27'' 83 d'anomalie moyenne.

3099. *CONNOISSANT l'anomalie moyenne dans une ellipse très-excentrique, trouver l'anomalie vraie.* Le nombre des jours écoulés depuis le périhélie, fera trouver d'abord l'anomalie vraie dans la parabole (3041) ; on se servira de cette anomalie vraie qui est à peu-près exacte, & on la convertira en anomalie moyenne (1244) : si cette anomalie moyenne n'est pas exactement celle qui est donnée par l'intervalle de temps écoulé depuis le périhélie (3098), on augmentera ou l'on diminuera l'anomalie vraie supposée ; on la convertira de nouveau en anomalie moyenne, & l'on trouvera par-là quelle est celle qui produit exactement l'anomalie moyenne donnée.

3100. *EXEMPLE.* Le 30 Août 1682, la comète étant éloignée de son périhélie de 16<sup>i</sup> 4<sup>h</sup> 44' ou 161,19722, & son anomalie moyenne 12' 27'' 83, on demande son anomalie vraie. Je suppose sa distance périhélie 0,5835 ; si du logar. du nombre de jours 16, 19722, on ôte les  $\frac{1}{2}$  du logarithme de la distance périhélie, ou 9,6490613, on aura le logar. d'un nombre de jours, avec lequel on cherchera dans la table générale, & l'on trouvera l'anomalie vraie dans la parabole 45° 20' environ. Cette anomalie vraie ne peut pas différer beaucoup de celle que nous cherchons dans l'ellipse ; supposons-la donc de 45° juste, à compter

du périhélie, ou  $135^\circ$ , en comptant de l'aphélie; nous suivrons la même règle que pour les planètes (1244), & nous trouverons pour l'anomalie moyenne qui répond à  $45^\circ$  dans l'ellipse  $12' 25'' 60$ , trop petite de  $2'' 23$ . Pour savoir combien ces  $2''$  d'anomalie moyenne valent d'anomalie vraie, on peut se servir encore de la table générale; premièrement, on les réduira en fractions de jours, en ajoutant le log. de la révolution 280701 moins celui de  $360^\circ$ , & en ôtant les  $\frac{1}{2}$  du log. de la distance périhélie, on aura le log. de 011084 qui dans la table générale, à proportion des différences qu'il y a vers  $45^\circ$ , donneront  $6' 33''$ ; c'est une preuve qu'il faut employer l'anomalie vraie  $45^\circ 6' 33''$ , pour trouver l'anomalie moyenne  $12' 27'' 83$  qui étoit donnée. En effet, convertissant de même l'anomalie vraie  $45^\circ 6' 33''$  de l'ellipse en anomalie moyenne, je trouve l'anomalie moyenne  $12' 27'' 83$ , ou un centième de seconde de moins, ce dont on ne sauroit répondre dans ces calculs.

On pourroit trouver d'une autre manière combien les  $2'' 23$  font de différence sur l'anomalie vraie, en répétant la même opération, avec une anomalie vraie de  $46^\circ$ , on trouveroit environ  $20''$  de moins; d'où il seroit aisé de conclure, par une règle de trois, que l'anomalie vraie doit varier de  $6' 33''$  pour  $2'' 23$  d'anomalie moyenne. C'est ainsi qu'on trouve  $45^\circ 6' 33''$  ou  $134^\circ 53' 27''$  pour l'anomalie vraie cherchée, comptée de l'aphélie, qui répond à  $12' 27'' 83$  d'anomalie moyenne, ou à  $161^h 44'$  de distance au périhélie. On trouve aussi le rayon vecteur dans l'ellipse par la règle ordinaire (1246), il est dans notre exemple de 0,68222.

3101. Lorsqu'on a beaucoup d'observations à calculer dans une orbite fort excentrique, on peut faire par cette méthode, ou par celle que nous allons expliquer, une table de l'anomalie vraie, de l'anomalie moyenne & de la distance au soleil pour chaque degré d'anomalie excentrique dans l'ellipse; M. Halley en fit une pour les comètes de 1680 & de 1682; (*Tables de Halley*, 1759). Le choix de l'anomalie excentrique donne une

Anomalie  
vraie.

Seconde  
méthode.

# 374 ASTRONOMIE, LIV. XIX.

échelle ou mesure moyenne qui diminue la grande inégalité qu'on trouveroit en prenant pour argument de la table, ou les jours, ou l'anomalie moyenne; d'ailleurs il en résulte une plus grande facilité pour construire cette table des anomalies vraies. Soit le centre  $C$  d'une ellipse (fig. 266);  $S$  le foyer,  $P$  le périhélie,  $PAV$  le cercle circonscrit,  $PA$  l'anomalie excentrique (1234) au moment où la comète est en  $V$ . L'aire  $PSVEP$  égale à l'anomalie moyenne (1235, 1239), est composée du segment de cercle  $PEVP$ , & du triangle rectiligne  $PSV$ ; le segment est aisé à calculer (3321) pour l'anomalie excentrique  $PA$ ; & M. Halley en a donné une table; le triangle  $PSV$  est égal à  $\frac{1}{2} PS \cdot SV$ , ou la moitié du produit de la distance périhélie & du sinus de l'anomalie excentrique; on calculera séparément ces deux parties, dont la somme formera la surface entière  $PSVEP$ , qui est égale au secteur circulaire de l'anomalie moyenne (1239); ainsi pour chaque degré d'anomalie excentrique on aura l'anomalie moyenne (*Théorie des comètes* 1759, pag. 43).

Rayon  
vecteur.

3102. Le rayon vecteur  $SM$  est égal à  $PS + \frac{CS \cdot PD}{CP}$  (3273); mais  $CP$  est à  $PD$ , comme le rayon est au sinus versé de l'arc  $PA$ , donc  $\frac{PD}{CP}$  est le sinus versé de l'anomalie excentrique, & l'on aura le rayon vecteur en ajoutant à la distance périhélie le produit de l'excentricité par le sinus versé de l'anomalie excentrique.

3103. Le sinus de l'anomalie vraie  $MSC$  est égal à  $\frac{MD}{MS}$  (3613), or  $MD = AD \frac{CH}{CP}$  (3256); c'est-à-dire, que  $MD$  est égal au sinus de l'anomalie excentrique multiplié par le rapport des axes. Cette quantité divisée par le rayon vecteur (3102) donnera le sinus de l'anomalie vraie. Ainsi par le moyen des segments de cercle dont M. Halley a donné une table pour chaque degré d'anomalie excentrique, l'on peut calculer les anomalies vraies d'une comète quelconque, dans son ellipse.

3104. La troisième méthode que l'on peut employer pour trouver l'anomalie vraie d'une comète à chaque degré

d'anomalie moyenne est fondée sur le peu de différence qu'il y a entre la parabole & une ellipse fort allongée : si la distance périhélie est la même dans les deux courbes le paramètre de l'ellipse est à celui de la parabole, comme la distance aphélie est au grand axe ; & les vitesses périhélies sont comme les racines des paramètres. ( Voy. *ma théorie des comètes*, pag. 95 ). Il est aisé de calculer dans plusieurs points la petite différence entre la parabole & l'ellipse, pour les réduire l'une à l'autre ; c'est la méthode que j'ai employée dans le calcul de la comète de 1759. ( *Ib.* pag. 115 ). Il suffit pour cela de calculer l'anomalie vraie & le rayon vecteur soit dans la parabole ( 3042 ), soit dans l'ellipse ( 3102 ), pour en avoir la différence à chaque degré d'anomalie moyenne ; quand on a un certain nombre de ces différences, on est en état de former une table des anomalies vraies dans l'ellipse, par le moyen des anomalies paraboliques. Afin qu'on le pût faire avec plus de facilité, M. Simpson a donné des formules & une table avec lesquelles on peut réduire la parabole à l'ellipse ( *Miscellaneous Tracts*, 1757, pag. 58 ). M. de la Caille s'en est servi dans ses leçons d'astronomie ( pag. 268 & 292 ); mais cette formule n'étant exacte qu'à une minute près, je me dispenserai d'en faire usage, & je supposerai qu'on suive la route ordinaire.

Différence  
entre la para-  
bole & l'el-  
lipse.

3105. EXEMPLE. Pour l'orbite de la comète de 1759, je suppose 28070 jours pour la durée de la révolution, & 0,5835 pour la distance périhélie ; le point qui est à  $100^{\circ}$  d'anomalie vraie dans la parabole est à  $144^{\circ} 36' 14''$  de distance au périhélie, dans la table générale & à  $64^{\circ} 34'$  du périhélie dans la parabole donnée ; ce nombre de jours fait  $49^{\circ} 30' 80''$  d'anomalie moyenne dans une ellipse de 28070 jours ; or  $100^{\circ} 23' 14''$  d'anomalie vraie dans cette ellipse convertis en anomalie moyenne donnent aussi  $49^{\circ} 30' 80''$ , donc pour le même nombre de jours l'anomalie vraie de l'ellipse est plus grande de  $23' 14''$  que celle de la parabole. M. Bailly a donné une table

# 376 ASTRONOMIE, LIV. XIX.

de ces différences depuis 90 jusqu'à 105° d'anomalie ( *Mémoires présentés* , &c. *Tom. V, p. 14* ).

Ces anomalies sont égales à 78° 26' 30" d'anomalie vraie ou 28' 7" 48 d'anomalie moyenne; mais les rayons vecteurs sont fort différens, celui de la parabole est 0,96169, celui de l'ellipse est 0,97220; la différence est de plus d'un centième de la distance totale. Si l'on change la durée de la révolution, le point où les deux anomalies sont égales devient fort différent : dans une ellipse de 27700 jours, c'est à 77° 56' que les anomalies sont les mêmes.

3106. On peut encore faire un usage plus commode des différences qu'il y a entre la parabole & l'ellipse, & calculer la longitude géocentrique de la comète pour chaque jour, soit dans la parabole, soit dans l'ellipse; par exemple, je trouvai que le premier Mai 1759 il falloit ajouter 3° 25' 14" à la longitude de la comète calculée dans une ellipse de 28070 jours, pour avoir la longitude qu'on auroit observée si la comète eût tourné dans une vraie parabole décrite sur la même distance périhélie, & dans le même plan; l'on réduit ainsi les observations à l'état où elles doivent être pour qu'on puisse déterminer les vrais élémens de l'orbite, par trois observations, sans supposer autre chose que l'orbite parabolique avec les règles précédentes ( 3058 ). *Théorie des comètes* , pag. 115.

Quoique l'on voie ici une fort grande différence entre la parabole & l'ellipse, en supposant la même distance périhélie, cependant il suffiroit de changer un peu cette distance périhélie pour former une parabole qui approcheroit beaucoup de cette ellipse de 28070 jours, & qui se confondroit avec elle sur un assez long espace; de manière qu'on auroit peine à les distinguer, par les observations d'une comète faites dans une seule appa-

riation.  
Trouver la  
période par  
une seule ap-  
parition.

3107. Cependant, il seroit possible, si l'on avoit vu une comète long temps, & qu'on l'eût observée avec une







une grande précision, d'avoir une idée de la durée de sa révolution, ou de déterminer son ellipse par des méthodes indirectes semblables à celles que j'ai employées dans la parabole ; mais le calcul en seroit si long, & le résultat si peu susceptible de précision, que je ne pense pas devoir entrer dans ce détail. J'observerai seulement qu'en pareil cas la méthode la plus commode sera peut-être celle-ci. On déterminera d'abord dans l'hypothèse parabolique la distance périhélie, & le temps du passage au périhélie par des observations qui n'en soient pas fort éloignées, afin que cette distance périhélie convienne également, & à l'ellipse & à la parabole, & soit indépendante de l'hypothèse ; on calculera ensuite la différence entre la parabole & l'ellipse pour les observations les plus éloignées, dans différentes hypothèses de révolutions elliptiques ; les différences calculées étant comparées avec l'erreur observée, c'est-à-dire, avec la différence qu'il y a entre l'observation & le résultat de l'hypothèse parabolique ; on jugera laquelle des différentes ellipses supposées convient à ces observations éloignées. Mais comme de semblables calculs exigeroient une fort grande précision, il ne faudroit pas se contenter pour la parabole de la table que nous avons donnée, *pag.* 335. Il seroit bon de calculer en décimales, & pour des nombres de jours moins distans, les anomalies dont on auroit besoin.

3108. J'ai reconnu par un calcul fait seulement à peu-près pour la comète de 1759, que si l'on eût déterminé le périhélie par trois observations faites le 12 Mars, le 1 Avril & le 1 Mai, on auroit trouvé le 31 Mai 2' d'erreur pour 3 ans de différence sur la révolution ; ce qui prouve qu'il n'est pas impossible de trouver la période d'une comète à 3 années près, par une seule apparition de 3 mois.

*Diverses remarques sur les Comètes.*

3109. ON PEUT représenter l'inégalité du mouvement des comètes dans des ellipses fort excentriques, Instrument  
cométaire.  
Tome III, Bbb

par le moyen d'une machine assez simple, que M. Desaguliers a donnée sous le nom d'*Instrument cométaire* ; il a été aussi décrit par M. Fergufon, (*Astronomy explained*, 1764, pag. 288). Il confifte en deux poulies elliptiques, mobiles chacune autour de leur foyer, l'une conduit l'autre par le moyen d'une corde qui les embrasse toutes deux en se croifant entre elles; les poulies fe touchent continuellement, d'où il réfulte que fi la première tourne uniformément, la feconde tournera plus vite quand fon périhélie touchera l'aphélie de la première, que quand fon aphélie touchera le périhélie de la première. Si la feconde ellipse qui tourne inégalement, porte une alidade au-dehors de la boîte, & que cette alidade enfile un petit globe retenu dans une couliffe elliptique, il repréfentera très-bien la viteffe du périhélie & la lenteur de l'aphélie; les aires feront même proportionnelles aux temps.

Effet de la  
parallaxe an-  
nuelle.

3110. ON AVOIT reconnu long-temps avant Tycho, que le mouvement apparent des comètes observé pendant la durée de leur apparition, n'étoit pas uniforme; cependant Tycho n'étoit pas assez frappé de ces inégalités pour y reconnoître l'effet de la parallaxe annuelle & du mouvement de la terre; j'en ai fait la remarque (1096), & j'ai annoncé qu'on trouveroit ici de quoi fe convaincre du fait que Tycho révoquoit en doute.

La comète de 1556, après avoir eu un mouvement rétrograde, prit enfuite un mouvement direct fuivant l'ordre des lignes. Celles de 1596<sup>(a)</sup> & de 1582 furent d'abord directes, & enfuite rétrogrades. Ce que nous avons dit des stations & des rétrogradations des planètes (1181), fuffit pour faire comprendre que ces inégalités apparentes étoient une fuite du mouvement de la terre, qui en nous faifant changer de place, nous fait voir sous une forme irrégulière & bizarre, des mouvemens qui font en eux-mêmes très-réguliers.

3111. Képler reconnut très-bien dans les comètes l'effet de la parallaxe annuelle; & dans fon traité des comètes il dit qu'ayant fuppofé le mouvement de celle de

(<sup>a</sup>) Riccioli dit 1569, en citant Képler; mais il y a 1596 dans Képler.

1618 dans une ligne droite , avec une diminution uniforme , on reconnoissoit l'effet du mouvement de la terre , soit sur la longitude , soit sur la latitude de la comète , ( *pag. 91* ) , & que le mouvement qui parut tortueux , ne pouvoit le paroître qu'à raison de celui de la terre ( *p. 97* ) ; il termine même son premier livre en disant : Autant qu'il y a des comètes dans le ciel , autant il y a de preuves du mouvement de la terre autour du soleil , indépendamment de celui que l'on tire du mouvement des planètes.

Il faut pourtant avouer que Tycho auroit pu nous faire une réponse à laquelle il ne paroît pas avoir songé ; c'est que si les comètes tournoient autour du soleil , & étoient emportées avec lui autour de la terre par un mouvement annuel , comme les planètes , on expliqueroit les mêmes apparences , tout ainsi qu'avec le mouvement de la terre. Mais quoique cela soit vrai astronomiquement , il y a toujours une absurdité physique , à laquelle on ne sauroit se prêter , de faire tourner le soleil , accompagné d'un si grand nombre d'astres , autour d'un atôme comme la terre.

3112. La comète de 1729 , que M. Cassini observa pendant plusieurs mois , après avoir fait plus de  $15^{\circ}$  vers l'occident , depuis la tête du petit Cheval jusques sur la constellation de l'Aigle , se courba subitement pour retourner vers l'orient , ce qui monroit d'une manière frappante l'effet de la parallaxe annuelle. Celle qui fut apperçue le 8 Janvier 1760 près de  $\kappa$  d'Orion , fit autant de chemin du 8 au 9 en un seul jour , qu'elle en fit dans les trois jours suivans du 9 au 12 , suivant les observations que nous fîmes tous à Paris ; une semblable inégalité marque bien sensiblement l'effet de la parallaxe annuelle. Il pourroit arriver des cas où cet effet seroit bien plus grand : si une comète rétrograde dont la distance à la terre seroit égale à la distance moyenne de la lune , se trouvoit périhélie & en opposition , elle auroit  $140^{\circ}$  de mouvement par heure ; il pourroit arriver par-là qu'on vît une comète aller depuis l'horizon jusqu'au zénit en moins de trois quart-d'heure , & employer ensuite plus de quatre heures à gagner l'horizon occidental , ( *Mém. acad. 1760 , pag. 108* ).

Effet singulier de cette parallaxe annuelle.

3113. LES INÉGALITÉS dont je viens de parler, sont purement apparentes, mais je dois dire un mot d'une autre irrégularité qu'on a reconnue en 1759, & qui affecte le mouvement réel & intrinsèque de toutes les comètes dans leurs ellipses, c'est l'attraction des autres corps célestes; celle de Jupiter & de Saturne est la plus remarquable; mais il y a grande apparence que les attractions des autres planètes & des autres comètes peut y influencer sensiblement.

Effets de  
l'attraction sur  
les comètes.

3114. La loi générale de l'attraction s'est manifestée de la manière la plus frappante dans le retour de la comète de 1682, observé en 1759. Sa période entre le passage par le périhélie du 26 Octobre 1607, & celui du 14 Sept. 1682, a été plus petite de 585 jours que la période suivante qui s'est terminée au 13 Mars 1759. On devoit bien s'y attendre à en juger par les inégalités de Saturne; car une comète qui s'éloigne du soleil une fois autant que Saturne, & dont la vitesse & la tendance vers le soleil deviennent beaucoup plus petites dans la partie supérieure de son orbe, se trouve bien plus susceptible des modifications & de l'impression des autres forces, c'est-à-dire, des attractions qu'exercent sur elle toutes les planètes qu'elle rencontre.

3115. Lorsqu'on commençoit à parler en 1757 du retour de cette comète prédite par M. Halley, on s'aperçut que l'inégalité de ses périodes précédentes nous laissoit près d'une année d'incertitude sur le temps de son apparition; M. Halley avoit remarqué que cette comète en 1681 passant fort près de Jupiter en avoit dû être fortement attirée, & que cela pourroit retarder l'apparition suivante jusqu'au commencement de 1759. Mais cette considération étoit trop vague pour qu'on dût y compter, & M. Halley n'y comptoit pas lui-même; je proposai à M. Clairaut d'y appliquer sa théorie de l'attraction, ou du problème des trois corps, en lui offrant tous les calculs astronomiques dont il avoit besoin; je lui donnai les situations de la comète, & les forces que Jupiter & Saturne avoient exercées sur elle pendant l'espace de 150 ans, ou de deux révolutions, soit dans la direction des rayons vecteurs, soit

perpendiculairement aux rayons (3441), avec les ordonnées & les surfaces de toutes les courbes qui représentoient les intégrales des équations du problème (3500, 3508). Par ce moyen M. Clairaut trouva que la révolution de la comète devoit être de 611 jours plus grande que celle de 1607 à 1682, dont 100 jours pour l'action de Saturne, & 511 pour celle de Jupiter. Suivant ces premiers calculs la comète devoit passer dans son périhélie au milieu d'Avril, (Voyez ma *Théorie des comètes* 1759, pag. 110); elle y passa le 13 Mars, & malgré l'immensité des calculs que nous fîmes à cette occasion, M. Clairaut & moi, les quantités négligées produisirent environ un mois d'erreur dans la prédiction; mais M. Clairaut l'avoit prévu, & il a fait voir ensuite, que l'erreur se réduisoit à 22 jours, & qu'il y auroit des moyens de pousser l'approximation assez loin pour rendre l'erreur encore moindre. Les recherches de M. Clairaut sur cette matière se trouvent en abrégé dans une pièce qui a remporté le prix de l'académie de Pétersbourg en 1762, & plus en détail dans sa *Théorie du mouvement des Comètes*, in-8° 1760 241 pages, à Paris, chez Lambert. On trouvera aussi de très-belles recherches de M. d'Alembert sur le même sujet, dans le second volume de ses *Opuscules mathématiques*, pag. 97 & suiv. & dans la pièce de M. Albert Euler, qui a remporté en 1762 le prix proposé par l'académie de Pétersbourg, concurremment avec M. Clairaut.

Auteurs qui  
ont écrit là-  
dessus.

3116. Toutes les comètes que j'ai vues étoient d'une lumière si foible, si pâle, si éteinte, qu'il y a lieu de croire que leur substance a peu de densité, & qu'elles ont très-peu de masse; ainsi les dérangemens que peuvent causer leur attraction sont peu considérables; de toutes les comètes que nous connoissons, il n'y en a aucune qui puisse approcher assez de la terre pour y produire d'effet sensible; celle de 1533 est la seule qui puisse en approcher de 300 mille lieues. Mais parmi le grand nombre de celles que nous ne connoissons pas, il pourroit y en avoir qui fussent capables d'y causer des révolutions. On peut voir à ce sujet les hypothèses les plus savantes &

les plus ingénieuses, dans M. de Buffon, *Hist. nat. tom. 1*. Whiston attribue aussi le déluge à la queue d'une comète (3095). La comète de 1680, n'étant éloignée du soleil dans son périhélie que de la 6<sup>e</sup> partie du diamètre solaire, il pourroit arriver par la résistance de l'atmosphère du soleil, & l'attraction des autres comètes dans son aphélie, qu'elle retomât dans le soleil; c'est ainsi, dit Newton que la belle étoile de 1572 a pu paroître tout d'un coup, étant ranimée & augmentée par une abondance de matière nouvelle.

Des queues  
& des chevelures  
des comètes.

3117. LES ANCIENS ont tiré le nom des comètes de cette lumière inégale dont elles paroissent communément environnées (3000), & ils les ont distinguées par ce moyen en plusieurs espèces, Pline (II. 25); Hévélius, *in cometographia*. Cependant il a paru quelquefois des comètes sans queue ni chevelure (3000); mais celles dont les queues ont paru les plus longues, sont les suivantes.

Comètes  
dont les  
queues furent  
très-grandes.

Celle dont parle Aristote, qui vers l'an 371 avant J. C. occupoit le tiers de l'hémisphère, ou environ 60°. Celle dont parle Justin (Liv. 37), & qui parut à la naissance de Mithridate, 130 ans avant J. C. étoit si terrible qu'elle sembloit embraser tout le ciel, elle occupoit 45°. Une autre comète, au rapport de Sénèque (VII. 15), couvroit toute la voie lactée, vers l'an 135. La comète de 1456 occupoit 2 signes ou 60° (Pontanus, *in centiloquio*); & celle de 1460 en occupoit environ 50, suivant le même auteur. La comète de 1618 avoit une queue au moins de 70°, suivant Képler, & même de 104°, suivant Longomontanus, le 10 Décembre 1618. On peut voir les mesures d'un grand nombre d'autres queues de comètes dans le P. Riccioli, (*Alm. II. 25*); mais depuis ce temps-là on a vu la comète de 1680, l'une des plus étonnantes qui eût jamais paru, par l'étendue de sa queue, (Voyez le traité de M. Cassini sur la comète de 1680 & 1681). La comète de 1744 s'est montrée de nos jours avec une lumière en éventail ou une queue divisée en plusieurs branches, qui étoit très-remarquable, & qui s'étendit le 19 Fév. jusqu'à 30°. Voy. le *Traité de la comète de 1744*, par M. de Chéseaux;

à Lausanne & à Genève, in-8°. 1744, pag. 155. Dans les pays méridionaux où l'on jouit d'un ciel pur & serein, les queues de comètes se distinguent mieux & paroissent plus longues; la comète de 1680 avoit une queue de 62° à Paris, suivant M. Cassini, & de 90° à Constantinople; celle de 1759 parut à Paris presque sans queue, on avoit beaucoup de peine à en distinguer une légère trace d'un ou de deux degrés; tandis qu'à Montpellier, suivant M. de Ratte, la queue avoit 25° le 29 Avril, la partie la plus lumineuse étant de 10°. M. de la Nux, correspondant de l'académie, à l'Isle de Bourbon, la vit même beaucoup plus grande. Enfin la queue de la comète de 1769 paroissoit d'environ 10° à Paris, de 40° à Marseille, de 70° à Bologne, de 90° à M. l'ingré qui étoit sur Mer, entre Ténériffe & Cadix (*Mém. acad.* 1769, pag. 54); mais elle étoit très-foible; c'est ainsi que dans la Zone torride la lumière zodiacale paroît constamment, & de plus de 100 degrés de longueur.

3118. Sénèque savoit que les queues des comètes sont transparentes, & qu'on voit les étoiles au travers, (*liv. VII. c. 18*). Newton fait voir qu'elles sont d'une substance infiniment plus tenue & plus rare qu'on ne sauroit l'imaginer.

Appian fut le premier qui prouva que les queues des comètes étoient toujours à peu-près opposées au soleil (*Astronomicum Casareum*, 1540); cette règle fut confirmée alors par Gemma Frisius, Cornelius Gemma, Fracastor, Cardan; cependant Tycho-Brâhé ne croyoit pas qu'elle fût bien générale ni bien démontrée, (*de com. anni* 1577, pag. 180); mais cette loi est actuellement reconnue. On apperçoit seulement une courbure qui est une suite de la position de la terre hors du plan de l'orbite de la comète, & du mouvement de celle-ci (*Hévélius, in cometog.* Cassini, sur la comète de 1680, pag. x. Newton, *l. III.*).

Direction  
des queues des  
comètes.

3119. LA QUEUE des comètes, suivant Newton, vient de l'atmosphère propre de chaque comète, (*Princ. mat. liv. III. prop. 41*). Les fumées & les vapeurs peu-

Cause de la  
queue des co-  
mètes.

vent s'en éloigner, dit-il, ou par l'impulsion des rayons solaires, comme le pensoit Képler, ou plutôt par la raréfaction que la chaleur produit dans ces atmosphères.

Il confirme ce sentiment par la comète de 1680, qui au mois de Décembre après avoir passé fort près du soleil, répandoit une lumière beaucoup plus longue & plus brillante qu'elle n'avoit fait au mois de Novembre avant son périhélie; cette règle est même générale, & lui paroît suffisante pour prouver que la queue des comètes n'est qu'une vapeur très-légère, élevée du noyau de la comète par la force de la chaleur. M. Euler y ajoute l'impulsion de la lumière (*Mém. de Berlin*, année 1716, pag. 121). On n'a guère vu de queue plus grande que celle de la comète de 1680, parce qu'on n'a guère vu de comète passer si près du soleil; le 18 Décembre 1680 elle en étoit 166 fois plus près que la terre. Cette comète recevoit une chaleur 28000 fois plus grande que celle que nous éprouvons au solstice d'été; la chaleur de l'eau bouillante est trois fois plus grande que celle qu'une terre sèche reçoit alors du soleil, & la chaleur d'un fer rouge trois ou quatre fois plus grande que celle de l'eau bouillante, suivant l'estimation de Newton; ainsi la comète de 1680 dut être échauffée environ deux mille fois plus qu'un fer rouge, & un globe de fer de même diamètre auroit conservé sa chaleur plus de 50000 ans, (*Newton, Tom. III, pag. 640 édit. de 1742; Phil. transf. n° 270*). M. de Buffon estime que ce calcul de Newton doit être réformé dans plusieurs points, & il se propose de publier des expériences très-curieuses sur la chaleur & le refroidissement des métaux.

Chaleur de  
la comète de  
1680.

Explication  
de M. Mairan.

L'atmosphère du soleil a été employée par M. de Mairan, pour expliquer la formation des queues des comètes dans son traité sur les aurores boréales (849). Il faut voir aussi l'explication du P. Boscovich, dans la dissertation imprimée à Rome en 1746.

Cométogra-  
phie de M.  
Pingré.

Je finis cet article des comètes, en annonçant un traité sur la même matière où M. Pingré nous promet l'histoire, les observations & les théories des comètes dans le plus grand détail,



# LIVRE VINGTIEME.

## DE LA ROTATION DES PLANETES,

### & de leurs Taches.

**N**ous savons que la terre tourne chaque jour sur son axe par un mouvement de rotation (1072) : nous sommes assurés que le soleil, la Lune, Jupiter, Mars & Vénus tournent aussi sur leur axe ; ce sont ces différentes rotations qui feront l'objet de ce vingtième livre.

**3120.** LA ROTATION des planètes est absolument indépendante de leur révolution ; une planète peut suivre son orbite par un mouvement de translation d'occident en orient, sans tourner sur son axe ; & elle peut tourner sur un axe quelconque, en sens contraire, & avec une vitesse quelconque ; une toupie tourne sur une table, ou sur son pivot, quoiqu'on l'ait jetée en l'air à une assez grande distance, & quoiqu'on transporte la table d'un côté ou d'un autre ; ainsi le mouvement de rotation est absolument indépendant du mouvement de révolution que nous avons considéré dans le VI<sup>e</sup> livre ; ce n'est que par les observations qu'on peut le déterminer, & c'est ce que nous allons entreprendre.

La rotation est indépendante de la révolution.

**3121.** Jean Bernoulli dans un mémoire de Dynamique, où il considère les centres spontanés de rotation, fait voir qu'une force de projection appliquée, non pas au centre de la terre, mais un peu plus loin du soleil, & cela de  $\frac{1}{15}$  du rayon, donneroit à la terre, supposée ronde & homogène, deux mouvemens assez conformes à ceux que l'on observe ; pour Mars il trouve  $\frac{1}{4+8}$  ; pour Jupiter  $\frac{7}{19}$ , (Bern. *Op. T. IV, pag. 283*) ; pour la lune on trouve  $\frac{1}{15}$  (3184). Si l'impulsion primitive eût été appliquée à de plus grandes distances de chaque centre, le mouvement de rotation seroit plus rapide.

Impulsion capable de la produire.

**3122.** Nous ne voyons aucune liaison nécessaire en-  
Tome III.

Ccc

tre les durées des rotations, & celles des révolutions; cependant M. le Chevalier de Goimpy dans le journal des Savans (Janv. 1769) a donné des rapports qui pourroient tenir à une loi générale, & M. de Mairan s'en étoit déjà occupé, (*Mém. acad.* 1729).

3123. La rotation du soleil est la première qui ait été découverte, & c'est aussi la plus sensible; les taches qui paroissent de temps en temps sur le soleil ont fait découvrir ce mouvement, & nous servent encore à l'observer. La première découverte des taches du soleil est contenue dans un grand ouvrage intitulé: *ROSA* <sup>(\*)</sup> *URSINA, sive Sol ex admirando facularum & macularum suarum phænomeno varius*, à Christophoro SCHEINER, Germano Suevo, è Societate Jesu, 1630, in-folio 774 pages; l'impression de cet ouvrage fut commencée en 1726, à Bracciano en Italie, & finie au mois de Juin 1630.

Découverte  
des taches du  
Soleil,

3124. Le P. Scheiner étoit Professeur de Mathématiques à Ingolstadt au mois de Mars 1611, lorsqu'en regardant un jour le soleil avec une lunette d'approche, au travers de quelques nuages, il apperçut pour la première fois les taches du soleil, & les fit voir au P. Cyfati & à plusieurs de ses Disciples; le bruit s'en répandit bientôt: on sollicita le P. Scheiner de publier cette découverte; mais comme ce phénomène paroissoit fort contraire aux principes de la Philosophie de ce temps-là, ses supérieurs craignirent qu'il ne vint à se compromettre, & ses premières observations ne furent publiées que sous un nom supposé, *Appelles post tabulam*, par un Magistrat d'Augsbourg, nommé Velfer, à qui le P. Scheiner en avoit écrit le détail aux mois de Novembre & de Décembre 1611, & qui publia ses trois lettres le 5 Janvier 1612, (*Rosa Urs.* pag. 18).

3125. Galilée écrivit contre Scheiner en 1619, dans son discours sur la comète de 1618, & en 1623, dans son ouvrage qui a pour titre *Il Saggiatore*, (c'est-à-dire, celui

(\*) Le nom de *Rosa Ursina* vient de la rose qui est une partie des armoiries d'un Duc de Bracciano de la Maison des Ursins, à qui ce livre fut dédié.

qui pefe ), il l'accusa de plagiat & prétendit avoir découvert ces taches le premier ; Scheiner s'en justifie fort au long dans son ouvrage ; Jean Fabricius, fils de David Fabricius les avoit aussi observées à Vitemberg, & il en publia même la relation au mois de Juillet 1611, Képler pense qu'il les avoit vues avant le P. Scheiner, (*Ephem. pag. 17*, Weidler, *pag. 435* ).

Mais quoi qu'il en puisse être de celui à qui le hazard les a pu faire voir pour la première fois, il est sûr que personne ne les observa aussi bien, & n'en donna la théorie d'une manière aussi complete que le P. Scheiner ; son ouvrage a 774 pages sur cette seule matière, & cela suffit pour faire voir avec quelle assiduité il s'en occupa, & combien il donna d'étendue à ses recherches. Hévélus le cite avec les plus grands éloges ; *incomparabilis & omnigenæ eruditionis. . . ut hac in materia omnibus palmam quasi praripuisse dici possit* (*Selenog. pag. 82* ).

3126. LES TACHES du soleil sont des parties noires irrégulières qu'on apperçoit de temps en temps sur le soleil, & qui paroissent tourner uniformément en 25 jours & 14 heures autour du soleil (3160) ; on en voit une représentée en *N* (*fig. 268* ), sur le disque du soleil.

Définition  
des taches.

Pl. XXXVII.

Fig. 268.

Les facules dont Scheiner & Hévélus parlent souvent, me paroissent n'être autre chose que le fond lumineux du soleil qu'on apperçoit quelquefois dans les interstices des taches ou des ombres, & qui leur a fait croire que c'étoient des points plus lumineux que le reste du soleil. M. Cassini dit cependant aussi qu'on a vu sur le soleil des points plus brillans que le reste de sa surface (*Elem. d'ast. 403* ), mais il appelle facules des taches légères & foibles, que l'on apperçoit quelquefois à l'endroit même où une tache a disparu, (*Anciens mém. Tom. X, pag. 661* ).

3127. LES OMBRES sont une nébulosité blanchâtre qui environne toujours les grandes taches ; Hévélus les compare à l'impression que l'haleine fait sur une glace de miroir en ternissant son éclat, (*Selen. pag. 84* ) ; quelquefois, dit-il, cette atmosphère des taches est jaunâtre *infar halonis*, & il en donne un exemple (*pag. 500* ) ; quel-

Ombres sur  
le Soleil.

quelques fois ces ombres se trouvent toutes seules , & donnent ensuite naissance à des taches , comme il l'observa au mois d'Août 1643 ( *Ibid. pag. 86 & 508* ) ; ces ombres sont souvent d'une très-grande étendue. Hévélius en a vu une au mois de Juillet 1643 qui occupoit près du tiers du diamètre du soleil , ( *pag. 506* ).

On voit spécialement la manière dont Hévélius se présentoit les ombres & les facules , dans l'exemplaire de sa Sélénographie qu'il envoya à Louis XIV, & qui se conserve dans la Bibliothèque du Roi ; toutes les planches y ayant été enluminées avec beaucoup de soin par l'auteur même , ou sous ses yeux.

Effet des  
taches.

3128. Les taches du soleil servent à expliquer divers phénomènes racontés dans les historiens. Ainsi dans les annales de France imprimées à Paris en 1588 , ( *Vie de Charlemagne , p. 62* ) , on trouve que l'an 807, xvi. kal. April. Mercure parut sur le soleil comme une petite tache noire qu'on aperçut en France pendant huit jours , & que les nuages empêchèrent d'observer dans quel temps se fit l'entrée & la sortie ; il a été prouvé ( 2000 ) , que ce ne pouvoit être autre chose qu'une grosse tache ; il en faut dire autant de ce que crut voir Scaliger ( *Exerc. 72 contra Card.* ) , & Képler même le 28 Mai 1607. Scheiner ( *p. 609* ) explique aussi par le moyen des taches du soleil plusieurs singularités qu'on trouve dans les historiens sur la diminution de lumière dans le soleil.

C'est à d'énormes taches du soleil qu'il faut rapporter , si on veut les admettre , les deux faits qui sont dans Abulfaradge ( *Hif. Dynast. p. g. 94, 99* ). L'an 535 le soleil eut une diminution de lumière , qui dura 14 mois , & qui étoit très-sensible ; l'an 626 la moitié du disque du soleil fut obscurcie , & cela dura depuis le mois d'Octobre jusqu'au mois de Juin. On voit souvent ces taches à la vue simple avec un simple verre fumé ; le 15 Avril 1764, M. d'Arquier à Toulouse en vit une fort grosse , & tout le monde la voyoit avec lui sans le secours des lunettes d'approche.

Après la découverte des taches du soleil , le P. Scheiner les observa assidument ; il avoit soin de rapporter à

l'écliptique les taches dont il observoit la situation par rapport au vertical, ou aux parallèles à l'équateur; par ce moyen il décrivait sur un carton la route d'une tache pendant les 13 jours de son apparition. On en trouve un très-grand nombre de gravées dans son ouvrage, depuis 1618, jusqu'en 1627; & elles lui firent reconnoître les règles suivantes (*Rosa Urs.* pag. 225).

3129. A la fin de Mai & au commencement de Juin, les taches décrivent des lignes droites inclinées sur l'écliptique du nord au sud, c'est-à-dire, qu'elles vont de *A* en *B* (*fig.* 268). A la fin de Novembre ou au commencement de Décembre, elles décrivent des lignes droites en allant du midi au septentrion, ou de *C* en *D*; pendant l'hiver & le printemps, leur route est concave vers le midi, & convexe du côté du nord; mais dans les six autres mois, ou depuis le commencement de Juin, jusqu'au commencement de Décembre, la concavité est tournée vers le nord, comme dans l'ellipse *RXVMO*.

Mouvement  
des taches.

*Fig.* 268.

La plus grande ouverture de ces ellipses arrive au commencement de Mars & de Septembre; alors le petit axe de chaque ellipse est  $\frac{1}{100}$  du grand axe. Toutes les taches du soleil, même les ombres & les facules décrivent des routes semblables, depuis le moment où elles paroissent jusqu'à celui de leur disparition; on observe la même chose dans les petites & dans les grandes, dans celles qui ne durent que quelques jours, comme dans celles qui font plusieurs révolutions; dans celles qui traversent le soleil par le centre, comme dans celles qui sont près de ses pòles. Cette régularité suffit seule pour démontrer que ces taches sont adhérentes au corps du soleil, & qu'elles n'ont d'autre mouvement que celui du soleil même autour de son axe. Les taches prouvent donc la rotation du soleil, & le P. Scheiner en tira bientôt cette conclusion.

Mouvement  
de rotation  
dans le Soleil.

3130. Presque toutes les observations de Scheiner furent ensuite confirmées par celles d'Hévélius (*Selenog.* pag. 96); M. Cassini les observa beaucoup aussi; il en parla dans un petit ouvrage publié en 1673, & qui a pour titre *Découverte de deux nouvelles planètes autour de Saturne*,

& dans plusieurs volumes des mémoires de l'académie. M. Picard fit aussi quelques observations des taches du soleil, en 1676 & 1679 (*Hist. céleste* 1741) : M. de la Hire en a aussi donné quelques-unes (*Mem.* 1700, 1702, 1704. *Histoire de l'acad.* 1700, 1701, 1705, 1706, 1707, 1708, 1709, 1710, 1713, 1714, 1715, 1716, 1719, 1720).

Taches qui  
disparoissent.

Il résulte de toutes ces observations que les taches du soleil sont très-variables ; Scheiner en a vu changer de forme, croître, diminuer, se convertir en ombres, disparoître totalement. M. de la Hire a vu aussi des taches se dissiper sur le disque apparent du soleil (*Mem.* 1702, *pag.* 137). Il y a des taches qui après avoir disparu long-temps reparoissent au même endroit ; M. Cassini pensoit que la tache du mois de Mai 1702, étoit encore la même que celle du mois de Mai 1695 (*Mém. acad.* 1702, *pag.* 140), c'est-à-dire, qu'elle étoit au même endroit. On n'en a guère vu qui ayent paru plus long-temps que celle qui fut observée à la fin de 1676 & au commencement de 1677 ; elle dura pendant plus de 70 jours, & parut dans chaque révolution (M. Cassini, *Elémens d'astron.* *pag.* 81).

Temps de  
leurs appari-  
tions.

3131. Les apparitions des taches du soleil n'ont rien de régulier : vers l'année 1611 qu'elles furent découvertes, on ne trouvoit presque jamais le soleil sans quelques taches ; il y en avoit souvent un très-grand nombre. Le P. Scheiner en a compté 50 tout à la fois. Bientôt elles devinrent plus rares : depuis l'année 1650, jusqu'en 1670 il n'y a pas de mémoire qu'on en ait pu trouver plus d'une ou deux, qui furent observées fort peu de temps (M. Cassini, *pag.* 82). Depuis 1695 jusqu'en 1700 l'on n'en vit aucune ; depuis 1700 jusqu'en 1710, les volumes de l'académie en parlent continuellement ; en 1710 on n'en vit qu'une seule ; en 1711 & 1712, on n'en observa point du tout ; en 1713 on n'en vit qu'une, au mois de Mai (*Mém. acad.* 1713). Depuis ce temps-là, on en a presque toujours vu : M. Cassini écrivoit en 1740 (*Elém. d'astron.* *pag.* 82), « elles sont présentement si fréquentes qu'il est » très-rare d'observer le soleil sans en appercevoir quel-

Elles sont  
fréquentes ac-  
quiellement,

» ques-unes , & même souvent un assez grand nombre à la  
 » fois » : pour moi je puis dire que depuis 1749 , jusqu'à  
 1771 , je ne me rappelle pas d'avoir jamais vu le soleil sans  
 qu'il y eût des taches sur son disque , & souvent un grand  
 nombre. C'est vers le milieu du mois de Septembre 1763 ,  
 que j'ai apperçu la plus grosse & la plus noire que j'eusse  
 jamais vue , elle avoit une minute au moins de longueur ,  
 enforte qu'elle devoit être trois fois plus large que la terre  
 entière ; j'en ai vu aussi de très-grosses le 15 Avril 1764 ,  
 & le 11 Avril 1766.

3132. Les taches du soleil paroissent sur le bord de  
 son disque extrêmement étroites , comme un trait fort dé-  
 lié , ce qui prouve qu'elles ont peu de hauteur , ou plutôt  
 qu'elles sont à la surface même du soleil ; il faut cependant  
 considérer que quand elles auroient une très-grande hau-  
 teur elles pourroient bien ne paroître pas au bord ou à l'ex-  
 trémité du soleil , parce qu'elles n'ont aucune lumière , &  
 qu'on ne les voit que quand elles interrompent la lumière  
 du disque solaire ; mais du moins si elles avoient une cer-  
 taine hauteur , on verroit la hauteur toute entière aussi-  
 tôt qu'elle commenceroit à être toute projetée sur le  
 soleil.

3133. Quelques Physiciens crurent autrefois que les  
 taches du soleil étoient des corps solides qui faisoient leur  
 révolution autour du soleil ( <sup>a</sup> ), mais si cela étoit , les taches  
 nous cacheroient à peu-près la même portion du soleil  
 soit sur les bords , soit au milieu ; & le temps qu'elles pa-  
 roissent sur le soleil seroit plus court que le temps où  
 on les perd de vue , au lieu que nous voyons ces taches  
 employer autant de temps à parcourir la partie antérieure  
 du soleil , que la partie postérieure , sauf la petite différence  
 que doit produire la grosseur du diamètre du soleil , & la  
 proximité de ces taches à l'un des poles du soleil ; enfin ces  
 planètes ne pourroient pas devenir invisibles pendant des  
 années entières ( 3131 ), & faire toutes leurs révolutions  
 chacune dans le même intervalle de temps.

Sentimens  
 sur leur nature.

( <sup>a</sup> ) Tarde les nomma *Sydera Borbonia* , & Maupertuis *Sydera Austriaca* ;  
 ( *Hevelii Selen.* pag. 83 ).

3134. Galilée, qui n'étoit point attaché au système de l'incorruptibilité des cieux, pensa que les taches du soleil étoient une espèce de fumée, de nuage, ou d'écume qui se formoit à la surface du soleil, & qui nageoit sur un océan de matière subtile & fluide; Hévélius étoit aussi de cet avis (*Selen. pag. 83*), & il réfute fort au long à cette occasion le système de l'incorruptibilité des cieux.

3135. Mais il me paroît évident que si ces taches étoient aussi mobiles que le supposent Galilée & Hévélius, elles ne seroient point aussi régulières qu'elles le sont dans leur cours; d'ailleurs la force centrifuge que produit la rotation du soleil, les porteroit toutes vers un même endroit, au lieu que nous les voyons, tantôt aux environs de l'équateur solaire, tantôt du côté des poles; enfin elles reparoissent quelquefois précisément au même point où elles avoient disparu (3130); ainsi je trouve beaucoup plus probable le sentiment de M. de la Hire (*Histoire acad. 1700, pag. 118. Mémoires. 1702, pag. 138*). Il pense que les taches du soleil ne sont que les éminences d'une masse solide, opaque, irrégulière, qui nage dans la matière fluide du soleil & s'y plonge quelquefois en entier. Peut-être aussi ce corps opaque n'est que la masse du soleil recouverte communément par le fluide igné, & qui par le flux & le reflux de ce fluide se montre quelquefois à la surface, & fait voir quelques-unes de ses éminences. On explique par-là d'où vient que l'on voit ces taches sous tant de figures différentes pendant qu'elles paroissent, & pourquoi après avoir disparu pendant plusieurs révolutions elles reparoissent de nouveau à la même place qu'elles devoient avoir si elles eussent continué de se montrer. On explique par-là les facules, & cette nébulosité blanchâtre dont les taches sont toujours environnées (3127), & qui sont les parties du corps solide sur lequel il ne reste plus qu'une très-petite couche de fluide. Cependant M. de la Hire pensoit d'après quelques observations qu'il falloit admettre plusieurs de ces corps opaques dans le soleil, ou supposer que la partie noire pouvoit se diviser & ensuite se réunir.

Cause des  
taches du so-  
leil.



## De l'Équateur solaire, &amp; de la rotation du Soleil.

3136. LES TACHES DU SOLEIL ont fait connoître que le soleil tournoit sur lui-même autour de deux points, qu'on doit appeller les poles du soleil; le cercle du globe solaire qui est à même distance des deux poles (15) s'appellera l'équateur solaire; c'est par le mouvement apparent des taches qu'on déterminera la situation de cet équateur, c'est-à-dire, son inclinaison & ses nœuds sur l'écliptique. M. Cassini communiqua à l'académie, dès l'année 1675, sa méthode pour trouver la révolution du soleil, la situation de ses poles & le mouvement apparent des taches (*Du Hamel, hist. acad. pag. 144. Anciens Mém. t. 10. pag. 578 & 727*).

Méthode  
pour connoi-  
tre l'équateur  
solaire.

M. de l'Isle, qui en 1713 observoit beaucoup les taches du soleil au Palais du Luxembourg à Paris, se forma une méthode qu'il explique en détail dans ses *mémoires pour servir à l'histoire de l'astronomie*, &c. 1738, pag. 144. On trouvera aussi dans les *éléments* de M. Cassini, une méthode graphique pour le même objet; mais dans laquelle il ne fait point entrer le mouvement de la terre, se contentant d'avertir qu'il faut y avoir égard; je vais bientôt expliquer plusieurs manières de déterminer exactement l'équateur solaire, & la durée de sa rotation, lorsqu'on a trois observations d'une même tache sur le soleil; ces méthodes seront également applicables à l'équateur de la lune (3188).

3137. La manière d'observer les taches du soleil est la même que pour les passages de Vénus; on y emploie le quart de cercle (2117) ou le réticule (2136). Scheiner & Hévélius recevoient l'image du soleil dans une chambre obscure au travers d'une lunette (2481). Nous préférons aujourd'hui de regarder directement le soleil, & de déterminer la différence de hauteur & d'azimut ou la différence d'ascension droite & de déclinaison entre la tache & le centre du soleil, pour en déduire la

De l'obser-  
vation des ta-  
ches.

# 394 ASTRONOMIE, LIV. XX.

différence de longitude & de latitude ; car c'est toujours là qu'il faut parvenir ( 2129 , 2138 ).

Fig. 268. 3138. Quand on aura observé plusieurs jours de suite la différence de longitude & de latitude entre la tache & le centre du soleil on les rapportera sur un carton , pour juger de leur progrès ; soit  $S$  ( *fig.* 268 ) le centre du disque solaire ;  $SE$  une portion de l'écliptique ,  $M$  une tache ,  $SL$  la différence de longitude , &  $ML$  la différence de latitude entre le soleil & la tache ;  $X$  ,  $V$  ,  $M$  ,  $O$  , les positions successives de la tache sur son parallèle apparent  $RO$  , l'on verra facilement que ces positions forment à peu-près une ellipse , si ce n'est vers le commencement de Juin & de Décembre où cette ellipse se réduit à une ligne droite.

Ouverture  
des ellipses.

Fig. 269. 3139. L'ouverture apparente des ellipses que décrivent les taches du soleil est proportionnelle à l'inclinaison du rayon visuel , ou à l'élévation de la terre au-dessus du plan de l'équateur solaire , & cette élévation doit se mesurer au centre du soleil ; soit  $S$  le centre du soleil ( *fig.* 269 ) ,  $EAPV$  le plan de l'équateur solaire ,  $ST$  la ligne dirigée vers la terre qui est toujours dans le plan de l'écliptique , & qu'il faut concevoir relevée au-dessus de la figure ; l'angle  $TSV$  est l'élévation de notre œil au-dessus du plan de l'équateur solaire ; c'est l'obliquité sous laquelle nous voyons ce cercle équatorial ; & le sinus de cet angle sera le petit axe de l'ellipse , le grand axe étant le sinus total ( 1828 , 2927 ). Ainsi en voyant que le petit axe de ces ellipses est  $\frac{1}{10} \frac{3}{4}$  de leur grand axe , au temps où elles sont les plus ouvertes , c'est-à-dire , au commencement de Mars & de Septembre , on en peut conclure que l'équateur du soleil n'est jamais incliné à notre œil de plus de  $7^{\circ} \frac{1}{2}$  ; l'angle  $TSV$  est la latitude héliocentrique de la terre par rapport à l'équateur du soleil ; l'argument de cette latitude est la distance de la terre au nœud de l'équateur solaire , ou au  $10^e$  degré du Sagittaire ( 3161 ). Pour trouver en tout temps l'ouverture des ellipses que décriront les taches , il suffit de mul-

tiplier le sinus de  $70^{\circ} \frac{1}{2}$  par le sinus de la distance de la terre ou du soleil à l'un des nœuds. Fig. 269.

3140. La règle précédente, pour trouver l'ouverture de ces ellipses, suppose que la terre soit immobile pendant la durée de l'apparition d'une tache; le mouvement de la terre rend le grand axe plus long, ou plutôt il empêche que la trace ne soit réellement une ellipse; & les règles précédentes ne sont bien exactes qu'après qu'on a réduit les observations à ce qu'elles donneroient si la terre ou le soleil eussent été immobiles pendant l'intervalle de ces observations. En effet, la terre qui s'élève continuellement au-dessus du plan de l'équateur solaire, ne permet pas que le cercle décrit par la tache paroisse jamais exactement sous la forme de la ligne droite, ni de l'ellipse qui auroit lieu si la terre étoit immobile; ou du moins c'est une ellipse qui change tous les jours de forme; ainsi cette trace apparente, ou cette courbe décrite sur un carton ne nous sert qu'à reconnoître le progrès ou l'exactitude des observations, & à nous conduire dans le calcul.

3141. La différence de longitude  $SL$  (fig. 268), & la différence de latitude  $LM$ , étant connues (2129), on en déduira la ligne  $SM$ , & l'angle  $LSM$ ; cette ligne droite  $SM$  prise sur le disque apparent du soleil est la projection ou le sinus d'un arc du globe solaire dont le centre est au centre  $S$  de ce globe; tout ainsi que nous avons vu dans le calcul des éclipses de soleil que les arcs de la circonférence de la terre projetés sur un plan devenoient égaux à leurs sinus (1826). Pour connoître l'arc du globe du soleil qui répond à la ligne droite  $SM$ , ou l'arc de distance, on fera cette proportion, le rayon du soleil réduit en secondes est au cosinus du demi-diamètre du soleil, comme la longueur  $SM$ , est au sinus de l'arc qui lui répond, & l'on aura l'arc ou l'angle sous lequel un observateur situé au centre du soleil verroit la tache  $M$  éloignée de la terre; car la terre paroît répondre au point  $S$ , ou au pôle même du cercle  $AROB$ , qui est le limbe du soleil vu de la terre.

Arc de  
distance.

3142. La règle que je viens de donner pour cette réduction est plus exacte que celle qu'avoit donnée Mayer. Pour sentir la vérité de la mienne, il suffit de considérer le rayon  $TG$  (fig. 270) qui touche le disque solaire en  $G$ , & forme avec  $CAT$  l'angle du demi-diamètre apparent  $CTG$ ; si cet angle est de  $15'$ , l'angle  $TCG$  est de  $89^{\circ} 45'$ , & c'est exactement la perpendiculaire  $GH$  ou le sinus de  $89^{\circ} 45'$  qui répond à  $15'$  ou à  $900''$ ; ainsi il faudra dire,  $900''$  est au sinus de  $89^{\circ} 45'$ , comme le nombre de secondes observé pour une distance  $BE$  est au sinus des degrés & minutes de l'arc  $AB$  qui lui répond.

Longitude  
de la tache.

Fig. 271.

3143. Nous pouvons actuellement déterminer la longitude héliocentrique de la tache, & sa latitude vue du soleil. Soit  $P$  &  $E$  (fig. 271) les poles de l'écliptique sur le globe du soleil,  $PKEK$  le grand cercle qui sépare l'hémisphère tourné vers la terre de l'hémisphère opposé;  $T$  le point du globe solaire où répond la terre, c'est-à-dire, le point qui a la terre à son zénit, ou qui nous paroît répondre au centre même du disque solaire,  $M$  le point où est la tache,  $TM$  l'arc de distance déterminé par le calcul précédent (3141); l'angle  $MTP$  formé par le cercle de latitude  $PT$  & par le cercle  $TM$  qui joint le lieu de la terre avec celui de la tache, est composé d'un angle droit  $PTL$ , & de l'angle sphérique  $MTM$  qui est le même que l'angle plan  $LSM$  de la figure 268, déterminé par observation (3141). Dans le triangle sphérique  $MTP$  formé sur la convexité du globe solaire, l'on connoît  $PT$  qui est toujours de  $90^{\circ}$ ,  $TM$  qui est l'arc de distance, & l'angle  $PTM$ ; on cherchera l'angle  $TPM$  qui est la différence de longitude entre le lieu de la terre & le lieu de la tache qui répond au point  $L$  de l'écliptique; l'on trouvera aussi  $PM$  qui est la distance de la tache au pôle boréal de l'écliptique, d'où l'on déduira facilement la latitude héliocentrique  $LM$  de cette tache. S'il s'agissoit d'une tache de la lune, il y auroit quelques considérations de plus (3182).

Latitude de  
la tache.

3144. On ajoutera la différence de longitude trouvée avec la longitude de la terre (c'est-à-dire, celle du soleil

augmentée de 6 signes) ; si le point *L* est réellement à la droite, ou à l'occident du centre du soleil (*fig.* 268 & 271) ; on la retranchera si la tache est dans la partie orientale du soleil, c'est-à-dire, si elle n'a pas encore passé sa conjonction apparente, & l'on aura la longitude de la tache, vue du centre du soleil, c'est-à-dire, le point de l'écliptique, où un observateur situé au centre du soleil verroit répondre cette tache.

<sup>a</sup> Longitude de la tache.

3145. Lorsque par cette méthode on a déterminé trois positions de la tache vue du soleil, on connoît trois points *X*, *V*, *M*, (*fig.* 271) d'un petit cercle *RXVM*, par longitudes & latitudes, on peut déterminer le pôle de ce petit cercle ; & c'est aussi le pôle de l'équateur solaire *GHK*, auquel le cercle *MR* est parallèle. Le problème seroit le même si l'on demandoit de trouver la déclinaison d'une étoile & la hauteur du pôle par le moyen de trois hauteurs observées, avec deux différences d'azimut, sans avoir de méridienne ; ce sont trois triangles sphériques qui ont deux côtés communs que l'on cherche, par le moyen du troisième côté qui est donné avec la différence des angles adjacents à ce côté connu. Nous en donnerons bientôt la solution (3150).

3146. Si la longitude héliocentrique d'une tache étoit la même dans les trois observations ; ce seroit une preuve que le soleil ne tourne point sur son axe ; car le centre du soleil ne peut voir une tache répondre toujours au même point du ciel si cette tache est entraînée par la circonférence du soleil ; la longitude héliocentrique d'une tache que nous venons de déterminer (3143) ne change donc que par le mouvement du soleil ; mais elle ne change pas uniformément, parce que l'écliptique, sur laquelle nous comptons les longitudes n'est pas l'équateur même du soleil, autour duquel se fait le mouvement du soleil, & sur lequel on a des progrès uniformes.

3147. Si la latitude d'une tache dans les trois observations étoit constante, tandis que la longitude change, on seroit assuré que la tache tourne parallèlement à l'écliptique, c'est-à-dire, autour des poles même de l'écliptique ;

qui dans ce cas feroit confondue avec l'équateur du soleil.

3148. Si la longitude & la latitude de la tache changent tout à la fois, comme on l'observe réellement; c'est une preuve que la tache décrit un parallèle à quelqu'autre cercle que l'écliptique; d'où il suit que l'équateur du soleil est incliné sur l'écliptique.

3149. Si nous avons une suite d'observations d'une tache pendant une demi-révolution autour du soleil dans le temps où le soleil est dans les nœuds de son équateur, nous verrons cette tache à sa plus grande & à sa plus petite latitude; la différence de ces deux latitudes donnera le double de l'inclinaison de l'équateur solaire; car soit *Fig. 268.* *AB* (fig. 268) le diamètre de l'équateur solaire, *KE* l'écliptique, *RO* le parallèle de la tache, les latitudes *OE* & *KR* de cette tache (quand elle est sur le cercle *AROE* de ses plus grandes latitudes) diffèrent entr'elles du double de *EB*, c'est-à-dire, du double de l'inclinaison de l'équateur solaire, puisque dans l'une des observations, la latitude *EO* de la tache est plus grande que *BO* de la quantité *BE*, & que dans l'autre observation la latitude *KR* est au contraire plus petite que *AP* ou *BO* de la même quantité *AK = LE*. Si l'une des latitudes observées étoit boréale, & l'autre australe, ce feroit la demi-somme des deux latitudes extrêmes, ou de la plus grande & de la plus petite, qui donneroit l'inclinaison de l'équateur solaire. C'est ainsi que nous trouverons l'inclinaison de l'équateur lunaire, parce que les taches de la lune peuvent s'observer pendant toute la durée d'une rotation lunaire. Mais comme nous voyons rarement les taches du soleil pendant une moitié de leur révolution, nous ne pouvons pas avoir immédiatement l'inclinaison de l'équateur solaire par les deux latitudes extrêmes; nous la déduirons dans le problème suivant de l'inégalité des trois latitudes observées. Le P. Boscovich fut le premier qui résolut ce problème, dans une dissertation publiée à Rome en 1736, sa méthode se trouve dans la première édition de cet ouvrage: voici deux autres solutions, dont la première a

été donnée par le P. Pézenas. (*Astronomie des Marins*, pag. 165. *Mémoires présentés*, T. VI).

3150. CONNOISSANT trois longitudes & trois latitudes héliocentriques d'une tache, trouver l'inclinaison de l'équateur solaire. Soit  $E$  (fig. 272), le pôle de l'écliptique sur le disque solaire, c'est-à-dire, le point de la surface du globe du soleil auquel répond le pôle de l'écliptique;  $A, B, C$ , les trois positions de la tache, observée en trois points d'un parallèle à l'équateur solaire,  $P$  le pôle de l'équateur,  $EA, EB, EC$  les trois distances de la tache au pôle de l'écliptique données par observations (3143), de même que les différences de longitudes, qui sont les angles  $AEB, BEC$ ; l'on résoudra séparément les 3 triangles sphériques  $AEB, BEC, AEC$  dont on connoît deux côtés & l'angle compris, & l'on trouvera les côtés  $AB, BC$  &  $AC$  (3696).

Méthode  
pour trouver  
l'inclinaison  
& le nœud.  
Fig. 272.

3151. Mais il ne suffit pas de connoître le triangle  $ABC$ , il faut savoir à quelle distance sont ces 3 points  $A, B, C$  du pôle  $P$  de l'équateur solaire; pour cela on considérera le parallèle du globe solaire sur lequel sont situés ces trois points; on connoît leurs distances entre eux, cela seul détermine la grandeur du cercle qui passe par les trois points; or, dans la sphère quand on connoît le rayon d'un petit cercle parallèle à l'équateur, on fait par-là même à quelle distance il est du pôle: ainsi connoissant les distances  $AB, BC, CA$ , par le moyen des trois arcs de grands cercles que nous avons calculés, on connoîtra aussi leurs distances en ligne droite, qui sont les cordes, ou les doubles des sinus des moitiés de ces mêmes arcs, c'est-à-dire, les lignes droites  $AB, BC, CA$ , que j'ai représentées séparément; il faut donc résoudre le triangle rectiligne  $ABC$ , & trouver l'angle  $B$ . Pour cela on retranche de la demi-somme des trois côtés chacun des côtés  $BA, BC$ , on ajoute ensemble les logarithmes des deux restes, & les complémens des logar. des deux côtés, la demi-som. est le log. sin. de la moitié de l'angle rectiligne  $ABC$  (3708); le double du supplément de l'angle  $ABC$  est l'arc  $AFBC$  du petit cercle  $AFECD$  parallèle à l'équateur solaire.

Fig. 272.

Nous connoissons donc en degrés un arc de grand cercle & un arc de petit cercle, qui tous deux passent par les points *A* & *C*, c'est-à-dire, qui ont l'un & l'autre pour corde la ligne droite *AC*, ou dont les moitiés ont la même ligne droite pour sinus, dès-lors on connoitra le rapport de leurs rayons (3612).

Distance  
au pôle.

3152. Le sinus de la moitié de l'arc de petit cercle *ABC* est donc au sinus de la moitié de l'arc de grand cercle *AC*, comme le rayon de cet arc *AC*, ou le rayon de la sphère est au rayon du petit cercle; or le rayon de ce petit cercle ou de ce parallèle solaire est le sinus de l'arc *PA*, ou de la distance au pôle, donc le sinus de la moitié de l'arc de petit cercle *AFBC* est au sinus de la moitié de l'arc du grand cercle *AC*, comme le rayon est au sinus de *PA*; c'est la première partie des élémens cherchés, ou la distance de la tache au pôle solaire. On trouvera l'angle *PCA* au moyen du triangle sphérique isoscèle, partagé en 2 triangles égaux par un arc perpendiculaire, qu'on supposera abaissé du point *P* sur l'arc *CA*, & qui partage l'angle aussi-bien que le côté *AC* en deux parties égales; car  $R : \cotang. PC :: \tan g. \frac{1}{2} AC : \cos. ACP$  (3678). Dans le triangle *AEC*, on trouvera l'angle *ACE* (3697), qui retranché de l'angle *ACP* donne l'angle *ECP*. Dans le triangle *ECP* connoissant *PC*, *EC* & l'angle compris, on trouvera *PE* (3696); cet arc est égal à l'inclinaison de l'équateur solaire sur l'écliptique.

Autre  
méthode.

3153. On peut aussi ramener ce problème à une formule analytique, dont l'usage sera encore plus facile que la solution trigonométrique expliquée ci-devant. Dans un triangle sphérique tel que *PEC*,  $\cos. PC = \cos. PE \cdot \cos. EC + \cos. E \cdot \sin. PE \cdot \sin. EC$  (3719); il en est de même des triangles *PEB* & *PEA*, ainsi l'on a ces trois équations.

<i>EC</i>	$= a$
<i>EB</i>	$= b$
<i>EA</i>	$= c$
<i>BEC</i>	$= m$
<i>AEC</i>	$= a$
<i>EP</i>	$= x$
<i>PA=PB=PC=y</i>	
<i>PEC</i>	$= z$

$$\cos. y = \cos. x \cdot \cos. a + \cos. z \cdot \sin. x \cdot \sin. a.$$

$$\cos. y = \cos. x \cdot \cos. b + \cos. (z + m) \sin. x \cdot \sin. b.$$

$$\cos. y = \cos. x \cdot \cos. c + \cos. (z + n) \sin. x \cdot \sin. c.$$



De la première équation l'on retranche la seconde, & l'on a  $\cos. x (\cos. a - \cos. b) + \sin. x (\sin. a \cos. z - \sin. b \cos. z + m) = 0$ . De la première on ôte la troisième, & l'on a  $\cos. x (\cos. a - \cos. c) + \sin. x (\sin. a \cos. z - \sin. c \cos. z + n) = 0$ . Divisant la première par la seconde, multipliant ensuite par  $\sin. a \cos. z - \sin. c \cos. (z + n)$ , & divisant par  $\cos. a - \cos. b$ ; on a cette équation ..

$$\frac{\sin. a \cos. z - \sin. b \cos. (z + m)}{\cos. a - \cos. b} = \frac{\sin. a \cos. z - \sin. c \cos. (z + n)}{\cos. a - \cos. c}$$

Mais on a  $\cos. z + m = \cos. z \cos. m - \sin. z \sin. m$  (3618), &  $\cos. z + n = \cos. z \cos. n - \sin. z \sin. n$ , substituant ces valeurs, divisant par  $\cos. z$ , & mettant  $\text{tang. } z$  au lieu de  $\frac{\sin. z}{\cos. z}$ ; on trouvera l'équation suivante.

$$\frac{\sin. a - \sin. b \cos. m + \sin. b \sin. m \text{ tang. } z}{\cos. a - \cos. b} = \frac{\sin. a - \sin. c \cos. n + \sin. c \sin. n \text{ tang. } z}{\cos. a - \cos. c}$$

donc

$$\frac{(\sin. a - \sin. b \cos. m) (\cos. a - \cos. c) + \sin. b \sin. m \text{ tang. } z (\cos. a - \cos. c)}{(\cos. a - \cos. b) (\cos. a - \cos. c)} = \frac{(\sin. a - \sin. c \cos. n) (\cos. a - \cos. b) + \sin. c \sin. n \text{ tang. } z (\cos. a - \cos. b)}{(\cos. a - \cos. b) (\cos. a - \cos. c)}$$

$$\text{tang. } z = \frac{(\sin. a - \sin. c \cos. n) (\cos. a - \cos. b) - (\sin. a - \sin. b \cos. m) (\cos. a - \cos. c)}{\sin. b \sin. m (\cos. a - \cos. c) - \sin. c \sin. n (\cos. a - \cos. b)}$$

C'est une des quantités cherchées, savoir la différence de longitude entre le pôle de l'équateur solaire & la première longitude observée; complément de la longitude de la tache comptée sur l'écliptique depuis l'intersection de l'équateur solaire avec l'écliptique.

3154. Connoissant l'angle  $z$ , on trouvera l'inclinaison  $x$  par l'équation  $\cos. x (\cos. a - \cos. b) + \sin. x (\sin. a \cos. z - \sin. b \cos. z + m) = 0$ , ou  $\frac{\sin. x}{\cos. x} = \text{tang. } x = \dots$

$$= \frac{-(\cos. a - \cos. b)}{\sin. a \cos. z - \sin. b \cos. (z + m)}$$
; enfin on trouvera  $y$  ou la distance de la tache au pôle solaire par le moyen du triangle *EPC*, dont on connoît deux côtés & l'angle compris, ou par le moyen de la première équation  $\cos. y = \cos. x \cos. a + \cos. z \sin. x \sin. a$ .

Il ne faut pas oublier dans l'usage de ces formules les changemens de signes qui arrivent aux sinus (3604 & 3605); il sera bon de placer sur un globe les longi-

tudes & les latitudes, dont on voudra faire le calcul. Nous donnerons bientôt les résultats de ces méthodes (3160).

3155. Au reste, on pourroit très-bien se passer de ces méthodes directes, en employant différentes suppositions pour l'inclinaison de l'équateur solaire & la situation du nœud, jusqu'à ce qu'on eût trouvé celles qui satisferoient aux trois observations données. Toutes ces méthodes peuvent servir également pour l'équateur lunaire, en réduisant au centre de la lune les longitudes & les latitudes d'une tache; mais on verra ci-après une approximation (3191) que je crois encore meilleure pour la lune.

Conditions  
dans les ob-  
servations.

3156. Pour trouver plus exactement l'inclinaison de l'équateur solaire, il est bon de choisir des observations faites aux environs des nœuds, c'est-à-dire, vers le commencement de Juin & de Décembre (3129); alors la route des taches paroissant la plus inclinée sur l'écliptique, on détermine avec avantage non-seulement l'inclinaison; mais encore le lieu du nœud. Si l'on observoit les taches dans le temps où le soleil est à 90° des nœuds, leur route étant une ellipse dont on voit difficilement les extrémités, & dont le milieu est parallèle au diamètre du soleil qui marque l'écliptique, les plus petites erreurs dans les observations nous rejetteroient fort loin pour la détermination du nœud, & l'on n'auroit pas la plus grande exactitude pour l'inclinaison.

Réduction  
des longitu-  
des observées.

3157. Au moyen de l'inclinaison & du nœud de l'équateur solaire il faut réduire à cet équateur toutes les longitudes des taches qui ont été observées par rapport à l'écliptique (3144); car ces longitudes rapportées à l'écliptique ne sont pas suffisantes pour donner la durée de la révolution d'une tache, ou celle de la rotation du soleil qui se fait dans le plan de son équateur, à moins qu'on n'eût observé le retour d'une même tache à une même latitude; ce mouvement est inégal sur l'écliptique; mais il est uniforme & proportionnel au temps sur l'équateur du soleil. Il faut donc y rapporter les mouve-

mens des taches ; pour cela on les doit calculer par le moyen de quatre analogies (900). Supposons que *NL* (fig. 275) soit l'équateur solaire, *ML* l'arc perpendiculaire abaissé d'un lieu *M* de la tache sur l'équateur, *MB* la latitude de la tache ou l'arc perpendiculaire sur l'écliptique, *NB* la distance au nœud comptée sur l'écliptique ; dans le triangle *MNB* connoissant *NB*, *BM*, on cherchera l'hypothénuse & l'angle *MNB* auquel on ajoutera, ou dont on ôtera l'angle *BNL* de  $7^{\circ} 30'$  pour avoir l'angle *MNL* ; dans le triangle *MNL* on cherchera *ML* distance de la tache à l'équateur solaire, & la distance *NL* de la tache au nœud *N*, mesurée le long de l'équateur.

Fig. 275.

3158. En faisant la même chose pour une autre observation, l'on aura le mouvement d'une tache sur l'équateur solaire, pour l'intervalle de temps qu'il y a entre deux observations ; il suffira d'une simple analogie pour trouver la durée de la rotation entière du soleil ; car le mouvement observé est à  $360^{\circ}$  comme l'intervalle de temps observé est au temps de la rotation toute entière par rapport au nœud *N*, or ce nœud est sensiblement fixe ; ainsi l'on aura la durée de la rotation absolue du soleil par rapport aux étoiles fixes.

Trouver la  
durée de la ro-  
tation.

3159. Les retours apparens d'une tache vers le milieu du soleil, observés de la terre, donneroient la durée de la rotation beaucoup trop grande, parce que la tache tournant autour du soleil comme la terre, & du même sens, elle nous paroît arriver sur le centre du soleil plus tard que si nous restions immobiles. Ces révolutions apparentes des taches, ou ces retours au centre du soleil sont inégaux, parce que le mouvement de la terre est inégal ; au lieu que les retours de cette tache à un même degré de longitude, calculés par les règles précédentes & réduits à l'équateur du soleil, sont égaux & uniformes, comme toutes les rotations des planètes.

3160. M. Cassini avoit trouvé d'abord la révolution moyenne des taches par rapport à la terre  $27^j 12^h 20'$ , il chercha cette révolution par rapport à un point fixe, en

Révolution  
des taches, 25  
jours 14 heu-  
res 8'.

difant :  $360^{\circ} + 27^{\circ} 7' 8''$ , mouvement moyen de la terre par rapport aux équinoxes dans l'espace de  $27^j 12^h 20'$ , font à  $360^{\circ}$  comme  $27^j 12^h 20'$  font à  $25^j 14^h 8'$  ; c'est la durée de la rotation du soleil par rapport aux points équinoxiaux, ( *Elémens d'astron. pag. 105. Mém. acad. 1700 & suiv.* ).

Inclinaison  
de l'équateur,  
7°.

3161. L'ÉQUATEUR solaire, suivant les anciennes observations de M. Cassini, est incliné sur l'écliptique de  $7^{\circ} \frac{1}{2}$ , comme on le voit dans l'histoire de l'académie, par M. Duhamel, & dans un abrégé d'astronomie fait en 1678, & qui est encore manuscrit. Le P. Scheiner supposoit en 1626 cette inclinaison de  $7^{\circ}$  ( *Rosa urfina, pag. 562* ), & il assure qu'il ne l'avoit jamais trouvée moins de  $6^{\circ}$ , ni plus de 8 ; M. de l'Isle en 1713 trouva cette inclinaison de  $6^{\circ} 35'$ , ( *Mémoires pour servir, &c. pag. 178* ) ; mais il n'y employa que trois observations, seulement pour donner un exemple de sa méthode ; or pour avoir quelque certitude en pareille matière, il faut nécessairement plusieurs comparaisons d'observations prises 3 à 3, ou combinées toutes ensemble.

Nœud af-  
cendant, 2  
signes  $10^{\circ}$ .

3162. LE NŒUD de l'équateur solaire sur l'écliptique étoit à  $2^s 8^{\circ}$  dans le dernier siècle ; car M. Cassini, dans l'abrégé d'astronomie que j'ai cité, dit que le pôle boréal du soleil répond au huitième degré des Poissons ; M. Cassini le fils trouve ce nœud à  $2^s 10^{\circ}$  par un grand nombre d'observations, ( *Elém. d'astron. pag. 100* ) ; mais il ne feroit, suivant les trois observations calculées par M. de l'Isle, qu'à  $1^s 26^{\circ}$  de longitude. Le P. Scheiner en 1626 le trouvoit vers  $2^s 10^{\circ}$ , comme M. Cassini, puisqu'il dit qu'au commencement de Décembre la route des taches est rectiligne.

Incertitude  
à fixer.

3163. Les trois résultats que je viens de rapporter quoiqu'un peu différens entre eux, ne fussent point encore pour nous faire conclure qu'il y ait des changemens sensibles dans la position de l'équateur du soleil ; les observations du P. Scheiner n'étoient pas assez exactes, celles de M. de l'Isle n'étoient pas assez éloignées de celles de M. Cassini, pour qu'on puisse essayer d'en déduire le mou-

vement du nœud de l'équateur solaire : j'observerai aussi qu'une différence de 10'' sur la position observée d'une tache, produit au moins un degré sur le lieu du nœud qui en résulte, & environ 4' sur l'inclinaison ; l'erreur peut même devenir encore plus grande dans certains cas, en sorte qu'on ne sauroit mettre trop d'exactitude dans ces sortes d'observations. Il sera donc nécessaire d'observer encore les taches du soleil à l'avenir avec beaucoup de précision, pour connoître si l'inclinaison de son équateur & le lieu de son nœud éprouvent quelques variations ; comme l'équateur terrestre en éprouve par la précession des équinoxes.

3164. M. Cassini dans son discours sur la lumière zodiacale, & M. de Mairan dans son traité de l'aurore boréale, prouvent que l'atmosphère du soleil ou la lumière zodiacale (845), est dans le plan de l'équateur du soleil, semblable à une lentille, dont le tranchant se confond avec le plan de l'équateur solaire, & c'est de là que M. de Mairan déduit les situations que doit avoir en divers temps de l'année la lumière zodiacale (pag. 223 & suiv.).

3165. Le célèbre Képler dont nous avons eu tant de fois occasion d'admirer le génie, en donna une preuve bien singulière à l'occasion de la rotation du soleil ; il décida que le soleil tournoit sur son axe, & cela avant qu'on l'eût jamais observé ; & il pensa que ce mouvement de rotation devoit être la cause du mouvement des planètes autour du soleil. Voici comme il s'exprime dans sa nouvelle physique céleste, imprimée au mois d'Avril 1609, deux ans avant les premières observations du P. Scheiner (3124) : *Modum etiam definiti argumentis talem ut sol manens quidem suo loco, rotetur tamen seu intorno. . . . transferatque una secum in gyrum corpora planetarum, intenso vel remisso raptu*, (Introduct. pag. 9).

Idees de Képler sur la rotation du soleil.

Képler en cherchant la cause du mouvement des planètes dans la rotation du soleil, pensa d'abord qu'elle devoit se faire dans le plan de l'écliptique, en sorte que les poles du soleil & les poles de l'écliptique répondissent aux mêmes points du ciel : (*De Stella Martis*, c. 34), il

crut aussi que le soleil devoit tourner en trois jours, c'est-à-dire, 30 fois plus vite que Mercure, parce que la terre tourne sur son axe 30 fois plus vite que la lune. Dans la suite, & après la découverte des taches, & de la véritable inclinaison de l'axe du soleil, Képler fut obligé de reconnoître que la direction & la vitesse de la rotation du soleil étoient fort différentes; mais il se servit de l'obliquité même de ce mouvement pour expliquer le déplacement de l'écliptique & le changement de latitude des étoiles fixes (2733), (*Epitome astron. Cop. pag. 912, Mém. ac. 1758, pag. 356*).

Préminence du cercle de l'équateur solaire.

3166. M. Cassini le fils pensa de même, que l'équateur du soleil pourroit servir de terme de comparaison pour les mouvemens célestes, & qu'on pourroit avec raison rapporter à son plan toutes les orbites planétaires; alors, par exemple, on diroit que le nœud boréal ou ascendant de l'orbite de la terre est à  $8^{\circ} 10'$  de longitude, puisque le nœud ascendant de l'équateur solaire est à  $2^{\circ} 10'$ ; en conséquence M. Cassini fit imprimer une table où l'on voit les orbites de toutes les planètes rapportées à l'équateur du soleil, (*Mém. acad. 1734*). M. de Mairan pense aussi que l'équateur solaire devoit être regardé comme le premier de tous les cercles célestes; mais ce cercle ne fera point fixe si la figure du soleil n'est pas exactement ronde (3526). M. Bouguer soupçonna que le soleil n'étoit pas sphérique, (*Mém. 1748, pag. 30*), & j'ai observé plusieurs fois moi-même que son diamètre du nord au sud, a au moins  $2''$  de plus que son diamètre d'orient en occident; peut-être cela vient-il de la décomposition des rayons colorés; les observations de l'équateur solaire nous l'apprendront, & il y aura peut-être encore d'autres moyens de s'en assurer.

Avantage des observations qu'on en fera.

#### DE LA ROTATION DE LA LUNE.

3167. LA LUNE présente toujours à la terre à peu près la même face; mais nous sommes au-dedans de son orbite; si nous étions placés à une très-grande distance

au-delà de l'orbite lunaire, nous verrions successivement tous les points de sa circonférence; d'où il suit que la lune tourne sur son axe, & qu'elle a un mouvement de rotation; M. de Mairan a fait voir par plusieurs autres raisonnemens que la lune tourne véritablement autour de son axe, par-là même qu'elle présente toujours la même face au centre de son orbite, (*Mém. acad.* 1747, p. 1).

La lune  
tourne sur  
son axe.

3168. Le mouvement de rotation de la lune est accompagné de circonstances singulieres qui ont fort occupé les astronomes, & qui sont assez peu connues pour mériter d'être traitées ici avec un certain détail.

LA SÉLÉNOGRAPHIE <sup>(a)</sup> est la description du disque apparent de la lune, de ses taches, & de ses points lumineux; avec leurs situations & leurs formes. On croit souvent appercevoir dans la lune une espèce de figure humaine, mais en l'examinant avec plus d'attention, on n'y voit aucune forme décidée; aussi les anciens varioient beaucoup dans leurs opinions à ce sujet; Cléarque & Argesinax y crurent appercevoir l'image de l'océan & de la terre, comme par la réflexion d'un miroir. On peut voir là-dessus toutes les opinions des anciens dans le vaste *Traité d'Hévélius* sur cette matière, qui a pour titre *SELENOGRAPHIA*, in-fol. 1647, 563 pages, & dans *Plutarque de facie in orbe lune*.

Des taches  
de la lune.

3169. On trouve dans la *Sélénographie d'Hévélius*, deux grandes figures dont l'une représente la pleine lune, l'autre la représente lorsqu'elle est en croissant ou en décroissant; ces figures, au jugement de M. Mayer, sont ce qu'il y a de meilleur en ce genre; celle que Riccioli donna ensuite dans son *Almageste* (*Tome I, pag. 204*), est mal gravée, mais on a l'avantage de trouver sur la figure même, les noms de la plupart des points lumineux, qu'il faut deviner dans Hévélius, où il n'y a pas même de lettres de renvoi, si ce n'est dans une figure assez bizarre, où il a donné à la lune la forme d'une carte géographique.

Différentes  
figures de la  
lune.

3170. M. le Monnier regarde comme les meilleures figures de la lune, celles qui furent gravées par Mellan,

(a) Ce mot vient de *Σελήνη*, *Luna*.

en 1634 & 1635 (*Instit. astron. pag. 141*) : voici le titre tel que je l'ai vu sur un exemplaire de M. Séguier à Nismes : *Phasium lunæ icones quos anno salutis 1634 & 1635 , pingebat ac sculp. Aquis sextis Claud. Mellan, Gallus , præsentibus ac flagitantibus illustribus viris Gassendo & Peyreschio. Voy. Gassendi , ( IV 355 , V 322 & suiv. ) : Vie de Gassendi 1737 , pp. 172 & 252 ; Vie de Peyresk , par Gassendi , pag. 410 ; Astronomie Philolaïque , pag. 467 ). M. le Monnier acheta ces planches après la mort d'un certain d'Herman , qui avoit effacé le nom de Mellan. On voit que Gassendi envoya ces phases de la lune à Hévelius , mais en 1647 il paroît qu'il n'en avoit pas encore connoissance , (*Selenogr. pag. 207*).*

3171. Nous avons en France une grande & belle figure de la pleine lune , que M. Cassini fit graver en 1692 , d'après ses propres observations ; le cuivre est encore actuellement à l'Imprimerie Royale , on n'en a tiré que peu d'exemplaires ; elle se trouve plus en petit , dans les anciens mémoires de l'académie pour 1692 , avec une explication de M. Cassini à l'occasion de l'éclipse de lune qui devoit arriver le 27 Juillet 1692. On en a mis une copie réduite dans la connoissance des temps depuis 1701 , jusqu'en 1772 , quoique successivement de quatre gravures , & de quatre grandeurs différentes ; elle se trouve dans mon Exposition du calcul astronomique , où j'ai de plus ajouté un réticule pour la libration ; enfin on en voit une copie dans la planche XXXVIII. Les noms des principales taches sont marqués comme dans le P. Riccioli , M. Cassini & M. de la Hire ; les chiffres sont à peu-près dans l'ordre suivant lequel les taches sont éclipsées d'orient en occident , cette figure ressemble assez exactement à celle de la pleine lune.

3172. Parmi les ouvrages considérables que l'on dut à la magnificence du grand Colbert , & à la confiance qu'il avoit dans M. Cassini , on doit compter les figures de la lune que M. Cassini fit dessiner en 1673 , & dans les années suivantes , où l'on voyoit ses phases de jour en jour ; le dessinateur nommé Patigni , se servoit de la lunette de 34  
pieds



pieds qui est à l'observatoire ; ces phases dessinées en grand , avec les détails les plus étendus sont encore entre les mains de M. Cassini de Thury , qui m'en a fait voir 34 dessins au crayon , fort détaillés.

3173. M. de la Hire qui étoit lui-même fort bon peintre , voulut faire de son côté un ouvrage semblable ; il observa la lune avec soin , il en forma une figure complète de cinq à six pieds de diamètre , que M. de l'Isle m'a dit avoir vue chez M. d'Ons-en-Bray , qui en avoit fait l'acquisition ; c'est sans doute un extrait de cette figure que l'on trouve dans les tables de M. de la Hire. Il avoit fait construire un globe lunaire , tel qu'Hévélius le propose (*Sélénog. pag. 493*) ; il est entre les mains de M. de Fouchy , qui le retira lorsque les machines de l'académie furent transportées en 1745 , de l'observatoire au jardin Royal ; M. Robert-de-Vaugondy en a le creux. Mayer avoit aussi entrepris un globe lunaire d'après ses propres observations , en partageant l'hémisphère visible de la lune en douze segmens. La mort de Mayer arrivée en 1762 , ne lui a pas permis de l'achever : M. Kästner , ci-devant Secrétaire de l'académie de Gottingen , dépositaire des manuscrits de Mayer , & qui a fait imprimer son éloge , m'a écrit qu'il y avoit déjà six phases de gravées , & deux de dessinées , les quatre autres restent à faire ; la Régence d'Hanovre a acheté tous ces papiers , & ces dessins qui sont extrêmement beaux , & de la plus grande exactitude ; mais pour rendre ces travaux utiles , il ne suffiroit pas de les imprimer , il faudroit faire des globes , auxquels on pût donner les mouvemens qu'exige la libration de la lune , dont nous allons parler.

*De la Libration de la Lune.*

3174. LA LIBRATION est un petit changement que l'on apperçoit dans la situation des taches de la lune ; quoique le disque apparent soit à peu-près le même en tout temps , on y observe cependant quelques degrés de

variation ; les taches paroissent d'environ trois minutes plus ou moins éloignées des bords ; la différence va même quelquefois à un huitième de la largeur du disque lunaire. ( Voyez la seconde colonne de la table , 3199 ).

Quatre sortes de librations.

3175. Il y a quatre sortes de librations, la libration diurne qui est égale à la parallaxe horizontale, la libration en latitude qui vient de l'inclinaison de l'axe de la lune sur l'écliptique, & la libration en longitude qui vient des inégalités du mouvement de la lune dans son orbite ; enfin il y a celle qui provient de l'attraction de la terre sur le sphéroïde lunaire. Les deux premières librations furent reconnues par Galilée, la troisième par Hévélius & Riccioli ; la quatrième a été sur-tout discutée dans la pièce qui a remporté le prix de l'académie en 1764, ( 3185 ).

3176. Galilée qui le premier observa les taches de la lune après la découverte des lunettes, ( *Nuncius sydereus*, 1610, pag. 16 ), fut aussi le premier qui remarqua la libration de la lune.

Passage de Galilée.

« La lune, (dit-il), par un rapport naturel & une espèce de sympathie avec la terre, tourne autour du centre de la terre, & lui présente toujours une même partie déterminée de sa surface ; en sorte que la ligne qui joint leurs centres, passe toujours par un même point de la surface de la lune <sup>(a)</sup>. Delà il suit qu'un observateur qui du centre de la terre regarderoit la lune, verroit toujours le même disque de la lune terminé par une même circonférence ; mais quand on est à la surface de la terre, le rayon mené au centre du globe lunaire, ne passe point à l'endroit de la surface de la lune où passe la ligne des centres, si ce n'est dans le cas où la lune est au zénit. Quand la lune se leve & se couche, le point de la surface où tombe le rayon visuel, est plus haut que le point où passe la ligne des centres, & par conséquent l'on voit alors une portion de l'hémisphère de la lune vers le bord supérieur, & l'on perd vers le bord infé-

Libration diurne.

(a) Cette idée-la n'est exacte que pour ce qui concerne la libration diurne.

» rieur une partie de l'hémisphère de la lune que l'on  
 » verroit du centre de la terre ; & parce que la partie  
 » de la circonférence de la lune que l'on voit est au-des-  
 » sus de la lune quand elle se lève , & au-dessous quand  
 » elle se couche , il en doit résulter une différence assez  
 » sensible pour qu'on voie certaines taches , ou du moins  
 » quelques parties remarquables de la lune paroître &  
 » disparoître. On doit observer une variation semblable  
 » dans la partie boréale & australe du disque lunaire ,  
 » suivant que la lune est dans l'un ou l'autre ventre du Dra-  
 » gon , ( c'est-à-dire , dans ses limites ) ; car si elle est au nord ,  
 » nous appercevons au midi de son hémisphère quelques  
 » parties nouvelles , tandis que les parties septentrionales  
 » disparoissent <sup>(a)</sup> . Nous sommes assurés par le secours des  
 » lunettes que ces conséquences ont lieu réellement ; en  
 » effet , il y a dans la lune deux certaines taches , dont l'une  
 » est vers le *Corus* , ( ou au nord nord-ouest ) , quand la lune  
 » est dans le méridien <sup>(b)</sup> ; l'autre lui est presque diamétra-  
 » lement opposée ; la première se voit même sans lunette ,  
 » mais non pas la seconde ; la première est une petite tache  
 » ovale , séparée des autres grandes taches ; la seconde est  
 » encore plus petite , également isolée , & située dans un  
 » espace assez clair. On observe d'une manière sensible  
 » dans ces deux taches , les variations dont nous venons  
 » de parler ; on voit l'une se rapprocher du bord de la lu-  
 » ne quand l'autre s'en éloigne , de manière que la distance  
 » de la tache qui est vers le *Corus* , est quelquefois double  
 » de ce qu'elle est dans d'autres temps par rapport au  
 » bord de la lune ; l'autre tache étant plus près du bord ,  
 » la différence est plus sensible , & la distance au bord est  
 » quelquefois triple de ce qu'elle étoit auparavant » . ( Ga-  
 » lilée , (*Dialog. de system. mundi*, pag. 58. édit. de 1635).

(<sup>a</sup>) Quoique le fait soit vrai , ce n'étoit pas une conséquence du principe qu'il avoit établi sur la ligne des centres , comme Galilée le suppose ; il falloit , pour expliquer ce phénomène , supposer que la lune présentoit la même face à un même point du ciel infiniment distant ,

lorsqu'elle étoit à même longitude , soit au nord , soit au sud de l'écliptique , ce qui a lieu véritablement ( 3179 ).

(<sup>b</sup>) C'est celle qui est appelée *Mare Crisium* ; l'autre est *Grimbith* , elle est marquée n°. 1 dans la planche XXXVIII.

3177. C'est ainsi que Galilée aperçut le premier le changement des taches de la lune, & qu'il en assigna deux causes qui sont encore adoptées actuellement; mais il ignora la troisième & la plus considérable de toutes, qui vient de l'inégalité du mouvement de la lune dans son orbite; c'est cependant cette dernière cause qui produit le changement de Grimaldi & de la mer des Crises, en sorte que Galilée ne donnoit point une explication suffisante de ce qu'il avoit remarqué, qui étoit une libration en longitude; mais par une idée heureuse il expliquoit d'avance un phénomène qu'on a observé long-temps après, c'est-à-dire, la libration en latitude.

La plus grande libration en latitude.

3178. HÉVÉLIUS commença en 1643 à observer assidument la libration de la lune; en 1648 il parvint à appercevoir que la libration en latitude étoit dépendante de la situation de la lune par rapport à ses nœuds, comme on le voit dans sa Sélénographie, mais il avoit alors une idée fautive de la libration en longitude, il ne la connut bien qu'en 1654. Hévélus observa premièrement que lorsque la lune étoit dans sa plus grande latitude boréale, les taches situées vers le bord septentrional en étoient les plus proches; ainsi *Thalès* & *Endymion* (ou *Montes Sarmatici* & *Lacus Hyperborei*), qui sont tout près d'Hermès en allant du côté de l'orient, étoient sensiblement plus près du bord boréal; quand la lune s'éloignoit du zénit en se rapprochant de l'équateur, ces taches s'éloignoit du bord boréal, & *Tycho*, ou le *Mont Sinai* se rapprochoit du bord austral de la lune, aussi bien que *Schikardus* ou *Mons Treicus*, & *Zucchi* ou *Lacus Meridionalis*; delà on peut conclure que l'axe de la lune est toujours sensiblement parallèle à lui-même, & qu'un diamètre de la lune pris du nord au sud, passe toujours par les mêmes étoiles fixes.

Différentes dénominations des taches.

Je rapporte ici les noms que Riccioli a donnés aux taches de la lune, avec ceux qu'Hévélus y a substitués; le premier employa les noms des Hommes illustres; le second des noms de l'ancienne Géographie; je préfère cependant, à l'exemple de M. Cassini, les noms de

Riccioli ; c'est un hommage que nous rendons à la mémoire des astronomes les plus célèbres ; on les trouvera sur la planche XXXVIII.

3179. LA PLUS GRANDE LIBRATION en longitude est le temps où la Mer des Crises, (*Palus Mæotides* suivant Hévélius), est la plus éloignée du bord occidental de la lune, ce qui arrive vers 9 signes d'anomalie ; alors les taches orientales, telles que *Grimaldi* (*Palus Maræotides* suivant Hévélius), sont les plus éloignées du bord oriental de la lune. Le contraire arrive dans la plus petite libration, telle que l'observa Hévélius le 17 Mai 1649. La Mer des Crises, étoit si près du bord de la lune, qu'il n'a jamais vu l'intervalle aussi petit ; la longitude vraie de la lune étoit alors moindre que la longitude moyenne, de  $6^{\circ}$ , la lune étant vers 3 signes d'anomalie.

La plus grande libration en longitude.

La cause de la libration en latitude est évidente si l'on suppose que la lune présente toujours la même face au même point du ciel, & qu'un de ses diamètres, que nous appellerons *l'axe de la lune*, soit toujours incliné de  $2^{\circ}$  sur l'écliptique. Soit *T* la terre (fig. 273), *TE* le plan de l'écliptique, *TC* une ligne inclinée de  $2^{\circ}$  sur l'écliptique, *L* le centre de la lune dont l'axe *ILK* soit perpendiculaire à *TC* ; lorsque la latitude de la lune ou l'angle *LTE* est de  $5^{\circ}$ , l'angle *LTC* est de  $3^{\circ}$  aussi bien que l'angle *GLD*, & une tache située en *G* sur l'équateur lunaire paroît éloignée du centre apparent *D* de la lune, de  $3^{\circ}$  ou de  $\frac{1}{4}$  du rayon de la lune ; mais 14 jours après quand la lune *M* a  $5^{\circ}$  de latitude australe, l'angle *ETM* étant de  $5^{\circ}$  & l'angle *CTM* de  $7^{\circ}$ , la tache qui étoit en *G* se trouve en *Q*, & sa distance *FQ* au centre apparent *F* de la lune est l'arc *FQ* égal à l'angle *CTM*, =  $7^{\circ}$  ; ainsi la tache située dans l'équateur paroît à  $7^{\circ}$  au midi du centre apparent *F* de la lune, tandis qu'auparavant elle paroïsoit  $3^{\circ}$  plus au nord ; donc la tache de la lune paroît de  $10^{\circ}$  plus au midi, ou plus près du bord méridional de la lune, que lorsque la latitude étoit septentrionale en *L*. Cela suppose que la ligne *TC*, à la-

Explication de la libration en latitude.

Fig. 273.

quelle l'axe est perpendiculaire soit immobile, ou que l'axe *IK* soit toujours parallèle à lui-même : nous verrons bientôt qu'il a un mouvement (3185) ; mais il n'est pas sensible en 14 jours.

3180. La cause de la libration en latitude se trouvant assez bien exprimée dans l'article précédent, il ne me reste qu'à expliquer aussi la libration en longitude par l'inégalité du mouvement de la lune dans son orbite. Ce fut Riccioli qui parla le premier en 1651 de cette hypothèse ; mais qui la rejetta cependant (*Alm. I, 214, tertia hypothesis*), parce qu'il supposoit alors une libration trop grande, & qu'il trouvoit plusieurs observations auxquelles cette hypothèse ne satisfaisoit pas. « La troisième hypothèse, » dit-il, seroit fondée sur l'excentricité de la lune, si nous » imaginions que la lune présente toujours la même face, » non à la terre, mais au centre de l'excentrique, en- » sorte que la ligne menée du centre du globe lunaire » au centre de l'excentrique qu'elle parcourt, passeroit » toujours par le même point du globe lunaire ». Cette hypothèse rejetée par Riccioli fut employée par Hévélius qui l'avoit imaginée en 1648 ; & dans sa lettre écrite à Riccioli en 1654, *pag. 46*, il l'explique comme la véritable cause de la libration en longitude ; Newton & M. Cassini l'adoptèrent également ; & je vais l'expliquer en peu de mots.

Explication  
de la libration  
en longitude.  
*fig. 274.*

3181. Suivant la théorie du mouvement elliptique, le foyer supérieur *F* de l'orbite lunaire *ALP* (*fig. 274*), est celui autour duquel la lune tourne uniformément (1252) : si donc la rotation de la lune est uniforme, comme le prouve l'observation, la lune après le quart de la durée de sa révolution, présentera au foyer *F* le point *B* de sa surface, qui dans l'apogée *A*, étoit dirigé suivant *AFT*, & par conséquent vers la terre ; mais dans cette position du rayon *LEF*, l'angle *FLT* étant de 6 ou 7°, le point *C* de la lune qui est dirigé vers la terre & qui forme le centre apparent de la lune, est différent du point *B*, de 7° de la circonférence de la lune ; ainsi la tache qui est en *B* (& qui paroïssoit au centre apparent du disque

lunaire quand la lune étoit apogée), en paroîtra éloignée de  $7^{\circ}$ , ou d'environ une huitième partie du rayon de la lune du côté de l'occident; c'est ce que l'on observe réellement; on en conclut que la durée de la rotation de la lune est uniforme, & égale à celle de sa révolution.

3182. Il n'est pas aisé de comprendre la raison de cette parfaite égalité entre les durées de la rotation & de la révolution de la lune. Newton ayant trouvé par l'attraction de la terre sur la lune, que le diamètre de la lune dirigé vers la terre doit surpasser de 280 pieds, les diamètres perpendiculaires à notre rayon visuel, en conclut que le plus grand diamètre doit être toujours à peu-près dirigé vers la terre: *Inde verò fit ut eadem semper lunæ facies in terram obvertatur, in alio enim situ corpus lunare quiescere non potest, sed ad hunc situm oscillando semper redibit. Attamen oscillationes ob parvitatem virium agitantium essent longè tardissimæ, adeo ut facies illa, quæ terram semper respicere deberet, possit alterum orbis lunaris umbilicum respicere, neque statim abinde retrahi & in terram converti.* (L. III. pr. 38).

3183. Il est vrai que l'équateur lunaire doit être allongé dans le sens du diamètre qui va de la lune à la terre, parce que l'attraction de la terre est plus grande sur les parties qui sont les plus près de la terre; d'un autre côté, la rotation de la lune autour de son axe, doit en faire un sphéroïde aplati par les poles, & rendre les méridiens elliptiques; ainsi dans la lune, les méridiens, l'équateur & les parallèles doivent être des ellipses; & le corps de la lune doit être, pour ainsi dire, comme un œuf qu'on auroit aplati par les côtés, indépendamment de son allongement naturel.

3184. M. d'Alembert pense qu'on ne sauroit expliquer la rotation apparente de la lune, par la seule supposition de son allongement (*Recherches*, II, pag. 255); mais qu'il faut que la lune ait été projetée par une impulsion faite sur un point éloigné du centre de  $\frac{1}{175}$  du rayon. Il avoit peine à croire que les nœuds de l'équateur lunaire, & ceux de l'orbite lunaire eussent le même mou-

Figure singulière de la lune.

Effet de l'allongement de ce sphéroïde.

vement; c'est cependant ce que prouve l'observation; car comme nous le dirons bientôt (3205): l'axe de la lune, au lieu d'être toujours parallèle à lui-même, & toujours incliné à l'écliptique de  $2^{\circ}$  dans le même sens, suit le mouvement de l'orbite lunaire; & l'équateur de la lune change de position, comme l'orbite, à laquelle il est toujours incliné de  $7^{\circ}$ .

3185. M. de la Grange, dans la pièce qui a remporté le prix de l'académie en 1764, suppose avec Newton que la lune est un sphéroïde allongé vers la terre, & il trouve que cette planète doit faire autour de son axe une espèce de balancement ou d'oscillation, par lequel sa vitesse de rotation est tantôt accélérée, tantôt retardée; qu'alors la lune doit nous montrer toujours à peu-près la même face, quoiqu'elle ait pu recevoir dans le principe une rotation dont la durée ne feroit point, par elle seule, égale à celle de la révolution. Il fait voir aussi que la figure de la lune peut être telle que la précession de ses points équinoxiaux, ou la rétrogradation des nœuds de l'équateur lunaire, soit à peu-près égale au mouvement rétrograde des nœuds de l'orbite lunaire; & dans ce cas il trouve qu'il ne doit plus y avoir de nutation sensible dans l'axe lunaire. L'action du soleil dans toutes ces recherches, est presque insensible par rapport à celle de la terre; c'est celle-ci qui produit le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire en agissant plus ou moins obliquement sur le sphéroïde lunaire; ainsi la précession de l'équateur lunaire, & la loi du mouvement produit sur le sphéroïde lunaire différent beaucoup de ce qu'on observe dans l'équateur terrestre. Plusieurs auteurs avoient appliqué au mouvement de la lune les formules générales trouvées pour la précession des équinoxes, & que l'observation avoit justifiées par rapport à la terre; le résultat ne s'accordoit point avec l'observation, mais M. de la Grange a fait voir que les formules qui sont vraies pour la terre, ne s'appliquent pas indistinctement à la lune, comme on l'avoit supposé.

3186. Il est vrai que si l'on supposoit la lune homogène,



gène, & le degré d'aplatissement tel qu'il résulte de la force centrifuge de la lune, & de l'action de la terre sur la lune supposée homogène, on ne trouveroit la précession que de  $61''$  par mois, au lieu de  $1^{\circ} 26'$ , c'est-à-dire, qu'on trouveroit 85 fois moins que ne donne l'observation; il faudroit donc supposer l'allongement de  $\frac{1}{381}$ , pour trouver  $1^{\circ} 25'$  de précession lunaire à chaque mois; mais cette quantité pourroit s'y trouver en effet, sans être apperçue, ni par la figure des phases, ni par la différence des diamètres de la lune, lors même que son grand axe seroit le plus éloigné de la direction de notre rayon visuel; on peut donc croire que la figure allongée de la lune est la cause de sa rotation & de sa libration, & du mouvement de son équateur. Dans ce cas-là, il pourroit bien se faire qu'elle ne suivît pas bien exactement la loi des distances à l'apogée, que j'ai expliquée ci-dessus (3181), mais jusqu'ici on n'y a pas remarqué de différence bien sensible; d'ailleurs la libration de la lune a été trop peu observée pour qu'on ait pu connoître parfaitement toutes ces inégalités. Je n'ai pû dire qu'un mot de ces causes physiques de la libration, sur lesquelles il faut consulter les ouvrages de M. d'Alembert & la pièce de M. de la Grange, qui sera publiée dans le IX<sup>e</sup> volume des pièces des prix.

3187. Après avoir parlé de la cause physique de la libration de la lune, je vais la considérer d'une manière purement astronomique, & détailler ce qu'on a fait jusqu'ici pour observer les loix de son mouvement de rotation. M. Cassini trouva le premier que les phénomènes de la libration se réduisoient à un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe différent de celui de l'orbite lunaire; il détermina la position de cet axe par observation, & trouva l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique de  $2^{\circ}\frac{1}{2}$ , l'inclinaison sur l'orbite de  $7^{\circ}\frac{1}{2}$ , & les nœuds de l'équateur lunaire sur l'écliptique, d'accord avec les nœuds de l'orbite lunaire, comme M. Cassini le fils l'a expliqué dans les mémoires de 1712, & dans ses élémens d'astronomie.

Explication  
de la libration.

*Méthode pour déterminer par approximation l'Équateur lunaire en employant un grand nombre d'observations.*

3188. MAYER dans un très-bon mémoire qu'il a donné sur cette matière <sup>(a)</sup>, n'a pas voulu déterminer par les observations la situation de l'équateur lunaire, d'une manière directe, parce que cette méthode est assujettie à trois observations (3150); mais il a cherché une approximation par le moyen de laquelle il pût faire entrer plusieurs observations dans un seul résultat, en prenant la somme ou la différence de plusieurs équations particulières, à l'exemple de M. Euler qui déterminoit ainsi les inégalités de Saturne; je vais expliquer cette méthode en détail, parce qu'elle peut servir dans d'autres recherches astronomiques.

3189. On commence d'abord par déterminer la différence d'ascension droite & de déclinaison entre une tache & le centre de la lune (2116, 2504); mais pour faire ces observations, il faut bien considérer que le parallèle apparent du bord de la lune, n'est pas un véritable parallèle à l'équateur (2539), la différence va quelquefois à plus d'un degré, & il en pourroit résulter environ 15'' d'erreur pour des taches éloignées du centre de la lune, ou moins à proportion pour celles qui en sont moins éloignées.

Lorsqu'on a trouvé la différence d'ascension droite, on cherche la différence de longitude & de latitude (2129), on en conclut la longitude & la latitude vues de la lune, de même que nous l'avons fait pour le soleil (3141 & suiv.); j'en donnerai un exemple à l'art. 3206.

On cherche ainsi trois fois la longitude & la latitude d'une tache vue du centre de la lune, par rapport à l'écliptique, ou à un cercle que l'on conçoit tiré par le centre

(a) *Kosmographische Nachrichten und Sammlungen auf das Jahr, 1748.* Nuremberg 1750, in-4°. pag. 52-123.

de la lune , parallèlement à l'écliptique , coupant sous un angle de  $5^{\circ} 9'$  l'orbite de la lune où l'orbite que la terre paroît décrire autour de la lune ; c'est avec ces trois observations qu'on pourra déterminer l'équateur lunaire (3150) , comme nous l'avons fait pour le soleil , & comme nous allons le faire par une autre méthode.

3190. Les taches qui sont le plus près du centre apparent de la lune , sont celles dont le changement est le plus sensible , elles doivent donc être préférées aux autres , nous avons en cela un avantage considérable sur les premiers astronomes qui observèrent la libration (3178) : n'ayant point alors l'usage des micromètres , ils n'observoient que les taches très voisines des bords de la lune , dont le mouvement est bien moins sensible , & dont la figure est moins régulière. Mayer a choisi la tache n<sup>o</sup> 24 dans notre figure appelée *Manilius* , (ou dans Hévélus *Insula Beshicus* , celle de *Menelaüs* , (ou *Byzantium*) , celle de *Dyonisius* , & celle de *Censorinus* , n<sup>o</sup> 32 , qui est située à l'extrémité de *Promontorium acutum*. Ce sont autant de points lumineux qui se distinguent très-bien , même dans la pleine lune , & qui se peuvent placer très-exactement sur les fils d'un micromètre. Nous parlerons ci-après du choix qu'on doit faire entre les observations d'une même tache (3198). Voici la table des observations que Mayer fit en 1748 , sur la tache de *Manilius* & dont nous allons faire usage , pour déterminer la situation de l'équateur lunaire ; j'y ajouterai ses principaux résultats ; je dois avertir que le mémoire contient de plus grands détails tant sur les observations que sur les réductions qu'on y doit faire ; mais les observations n'étant pas d'une extrême précision par la nature de l'instrument dont Mayer se servoit , & ses réductions étant défectueuses à certains égards (2539 , 3142) je ne rapporte les nombres suivans que pour servir d'exemple à la méthode que je dois expliquer. Il seroit utile de donner une traduction entière de ce mémoire , qui est écrit en Allemand ; cependant je vais faire en sorte de ne laisser rien à desirer sur cet article.

Choix des  
taches qu'on  
observe.

TABLE des Observations faites sur Manilius, pour la libration de la Lune.

Temps moyen des observations à Nuremberg.	Arc de distance entre Manil. & la Terre; T M Fig 271.	Anale PTM Fig. 271. (5143)	Longitude apparente de la Lune. (1679)	Latitude apparente de la Lune. (1876)	Distance P M de Ma- nilius au pôle de l'éclipti- que.	Diffé- rence de long. T P M entre Manilius & la Terre.	Longitude de Manilius, vue de la Lune sur l'écliptique.
1748. J. H. M.	D. M.	D. M.	S. D. M.	D. M.	D. M.	D. M.	S. D. M.
Avr. 11 11 1	17 20	50 11	6 0 35	4 16 M	76 50	15 4	0 15 39
13 9 3	15 8	58 35	6 27 24	5 27 M	76 52	13 14	1 10 39
Mai. 11 10 56	15 29	60 40	7 6 19	5 51 M	76 48	13 50	1 20 9
16 16 11	13 26	28 45	9 22 14	3 31 M	75 45	6 38	3 23 52
17 15 56	14 23	20 49	10 6 33	1 17 M	75 18	5 14	4 11 37
Jun. 5 9 58	18 2	62 16	6 2 53	4 56 M	76 59	16 20	0 19 13
13 14 0	14 18	25 48	10 0 24	1 41 M	75 29	6 23	4 6 47
14 12 50	15 12	16 47	10 14 43	0 25 M	75 3	4 30	4 19 13
Juil. 2 9 23	18 2	61 56	5 28 25	4 54 M	76 55	16 17	0 14 42
4 6 49	17 36	64 29	6 23 11	5 48 M	76 57	16 16	1 9 27
5 8 4	17 23	64 49	7 7 18	6 8 M	76 48	16 7	1 23 25
6 8 34	16 20	62 37	7 21 34	5 57 M	76 49	14 52	2 6 26
7 9 4	15 43	58 10	8 6 15	5 30 M	76 26	13 42	2 19 57
8 10 4	15 8	52 0	8 21 33	4 44 M	76 7	12 14	3 3 47
9 11 15	14 38	44 26	9 7 12	3 38 M	76 2	10 30	3 17 42
10 12 5	14 34	34 40	9 22 50	2 19 M	75 46	8 29	4 1 19
11 13 15	15 23	23 24	10 8 37	0 51 M	75 4	6 16	4 14 53
12 13 5	16 0	16 57	10 23 34	0 30 S	75 13	4 46	4 28 20
15 13 35	19 38	2 14	0 6 37	3 41 S	74 4	0 47	6 7 24
Aug. 3 7 5	16 10	60 27	7 39 58	5 26 M	76 31	14 25	2 14 23
14 11 34	20 23	4 16	1 11 2	4 45 S	74 5	1 33	7 12 35
Nov. 1 5 44	19 27	15 33	11 24 42	3 4 S	74 21	5 19	6 0 1
2 6 29	20 26	11 50	0 9 1	3 46 S	73 51	4 16	6 13 17
Déc. 27 4 47	20 54	7 19	0 14 44	4 21 S	73 38	2 43	6 17 27
Jan. 28 3 59	18 56	9 59	2 16 0	3 0 S	74 22	3 21	8 19 21
Fév. 25 11 42	17 30	14 53	2 27 53	2 0 S	75 6	4 35	9 2 28
Mars. 4 11 42	14 46	54 26	5 22 9	4 42 M	76 53	12 17	0 4 26

3191. L'équateur lunaire est représenté par le cercle *QNL* (fig. 275) tracé sur le globe de la lune; *DYVB* est l'écliptique, *P* le pôle de l'équateur lunaire, *A* le pôle de l'écliptique, *AP* la distance de ces deux pôles, qui est égale à l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique, c'est cet arc *AP* (qui est d'environ  $2^\circ$ ), que nous cherchons actuellement, & qui est une des inconnues du problème. Soit *M* une tache de la lune, telle que *Manilius*, par laquelle on tirera un cercle de latitude *AMB* jusqu'à l'écliptique *NB*, & un méridien lunaire *PML* jusqu'à l'équateur lunaire *NL*; l'arc *MB* est la latitude de la tache qu'on connoît par observation, & *AM* la distance au

pole de l'écliptique ; cette distance est variable dans chaque observation , mais c'est une des données du problème. L'arc  $ML$  du méridien lunaire est la latitude sélénographique de Manilius , ou sa distance à l'équateur lunaire : c'est une quantité constante , parce que nous supposons les latitudes sélénographiques invariables comme les latitudes terrestres , & c'est une des trois choses que nous avons à chercher dans la solution de ce problème.

3192. La troisième inconnue est la longitude du point  $N$ , ou du nœud de l'équateur lunaire ; ayant tiré du centre de la lune une ligne  $C\gamma$  dans le plan de l'écliptique, dirigée vers le point équinoxial, l'angle  $\gamma CN$ , ou l'arc  $\gamma N$  de l'écliptique est la longitude du point  $N$  que nous cherchons ; mais nous savons que le point  $N$  est presque d'accord avec le nœud ascendant de l'orbite lunaire ( 3184, 3187 ). Supposons donc qu'il n'en diffère que d'une petite quantité  $\theta$ , & appelant la longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire  $k$ , nous aurons la longitude  $\gamma N$  du nœud  $N$  de l'équateur lunaire,  $k + \theta$ . Appellons  $g$  la longitude de Manilius sur l'écliptique déduite de l'observation , ou l'arc  $\gamma B$  de l'écliptique, & retranchons-en l'arc  $\gamma N$ , il restera pour la distance  $NB$ , ou l'angle  $NAB$  formé au pole de l'écliptique  $g - (k + \theta)$  ou  $g - k - \theta$  ; mais le cercle de latitude  $AN$  qui passe par l'intersection  $N$  des deux cercles  $QN$ ,  $DN$ , & le cercle  $AP$  qui passe par leurs poles, font entre eux un angle droit ; ainsi l'angle  $MAP$  est le complément de l'angle  $MAN$ , l'angle  $MAP$  fera donc de  $90^\circ - g + k + \theta$ .

3193. Dans le triangle  $MAP$  formé au pole de l'écliptique  $A$ , au pole  $P$  de l'équateur lunaire, & au point  $M$  de Manilius, on a  $\cos. PM = \cos. AP. \cos. AM + \sin. AP. \sin. AM. \cos. PAM$  ( 3719 ) ;

$\alpha$	Inclinaison de l'équateur, $= AP$
$\beta$	Dist. de Manil. à l'équat. $= LM$
$\theta$	Dist. du nœud de l'équat. au nœud de l'orbite.
$g$	Longitude de Manilius, $= \gamma B$
$h$	Distance de Manil. au pole de l'éclipt. $= AM$
$k$	Longitude du nœud de l'orbite lunaire.

ou  $\cos. 90^\circ - \beta = \cos. \alpha \cos. h + \sin. \alpha. \sin. h. \cos. ( 90^\circ -$

*Fig. 275.*  $g + k + \theta$ ); donc  $\sin. \beta = \cos. \alpha. \cos. h + \sin. \alpha. \sin. h. \sin. (g - k - \theta)$ .

Par le moyen de trois observations on a trois fois la longitude d'une tache, & la latitude qui lui répond en nombres, & par conséquent trois valeurs de  $g$ ,  $h$ ,  $k$ ; ainsi l'on peut former trois équations pour avoir trois valeurs de  $\sin. \beta$ , & si l'on peut résoudre chaque équation, on dégagera  $\alpha$  &  $\theta$ , & l'on connoîtra l'inclinaison  $\alpha$  de l'équateur lunaire, avec la quantité  $\theta$ , dont son nœud diffère du nœud de l'orbite. Mais il seroit très-difficile & très-long de dégager par les méthodes ordinaires les inconnues  $\alpha$  &  $\theta$  de ces trois équations; c'est pourquoi l'on a recours aux approximations suivantes, où il s'agit de supposer  $\alpha$  &  $\theta$  assez petits pour que leurs cosinus soient égaux au rayon, c'est-à-dire, à l'unité.

3194. Pour s'assurer que  $\alpha$  &  $\theta$  sont en effet assez petits, il suffit de jeter les yeux sur la table des observations de Manilius (3190); on y voit que ses latitudes observées ne diffèrent jamais entre elles de plus de  $3^{\circ} 23'$ , car la plus grande valeur de  $h$  étoit dans la sixième observation, le 5 Juin 1748, de  $76^{\circ} 59'$ , & la plus petite le 27 Décembre, dans la vingt-quatrième observation, de  $73^{\circ} 36'$ , la différence est  $3^{\circ} 23'$ , dont la moitié  $1^{\circ} 41' \frac{1}{2}$  doit être à peu près la valeur de  $\alpha$ ; en effet, lorsque  $AP$  &  $AM$  concourent ensemble,  $PAI$  est plus petit que  $AM$ , qui est constant, & cela de la quantité  $AP = \alpha$ ; mais lorsque  $AP$  &  $AM$  sont diamétralement opposés,  $PM$  est plus grand que  $AM$  de la même quantité  $\alpha$ , car il est égal à la somme de  $PA$  & de  $AM$ , au lieu qu'auparavant il étoit égal à leur différence.

3195. On connoît donc ainsi à peu près la valeur de  $\alpha$  par l'inspection de plusieurs latitudes observées dans les différens points de la longitude de la tache; on connoîtra par conséquent sa latitude sélénographique, car en retranchant  $\alpha$  ou  $AP$  de la plus petite distance au pôle de l'écliptique, ou de  $AM$  observée dans le temps où elle étoit la plus grande, & où les arcs  $AP$  &  $AM$  coïncidoient, savoir  $76^{\circ} 59'$ , on aura  $75^{\circ} 17'$  pour l'arc  $PM$ , & le complé-

ment  $ML\ 14^{\circ}\ 43'$ , latitude sélénographique de Manilius. Cette quantité seroit suffisamment exacte, si l'on avoit observé assez souvent la latitude de la tache, pour être certain d'avoir rencontré les points où elle étoit la plus grande. fig. 275.

3196. Cherchons aussi à peu-près la valeur de  $\theta$  par l'inspection des observations rapportées ci-dessus; pour cela il suffit de considérer que dans le temps où la latitude de Manilius étoit la plus grande, elle devoit être nécessairement à  $90^{\circ}$  du nœud; or le 5 Juin 1748 cette latitude étant la plus grande, la longitude de Manilius fut observée de  $0^{\circ}\ 19'$ ; donc le nœud  $N$  étoit à  $9^{\circ}\ 19'$ , & comme le nœud de l'orbite lunaire étoit alors à  $10^{\circ}\ 11'$ , il s'ensuit que la différence  $\theta$  auroit été de  $22^{\circ}$ . De même le 27 Décembre 1748, Manilius étant à sa plus grande latitude, & par conséquent à  $90^{\circ}$  du nœud  $N$  de l'équateur lunaire, sa longitude fut observée de  $6^{\circ}\ 17'$ ; le point  $N$  étoit donc à  $9^{\circ}\ 17'$ ; & comme le nœud de l'orbite lunaire suivant les tables, étoit alors à  $10^{\circ}\ 0'$ , la différence  $\theta$  se seroit trouvée de  $13^{\circ}$ . On sent bien que ce premier résultat ne sauroit être exact, parce qu'on ne doit pas choisir pour déterminer le lieu du nœud, le temps où la latitude est la plus grande, mais plutôt celui où elle est nulle, & où elle augmente le plus rapidement (1362); par exemple, les temps où la distance de Manilius au pôle de l'écliptique étoit à peu-près de  $75^{\circ}\ 17'$ , le 13 & le 14 Juin 1748. On pourroit donc trouver à peu-près le lieu de l'intersection  $N$ , en cherchant quelle étoit la longitude de Manilius entre le 13 & le 14, lorsque sa distance au pôle de l'écliptique étoit de  $75^{\circ}\ 17'$ . Mais il suffit ici d'avoir montré que la quantité  $\theta$  est en effet assez petite pour que son cosinus puisse être supposé  $= 1$ .

3197. Pour simplifier la formule  $\sin. \beta$ , &c. (3193); l'on considérera que  $\sin. (g - k - \theta) = \sin. (g - k) \cos. \theta - \sin. \theta \cos. (g - k) \text{ art. } 3619$ ; mais  $\cos. \theta = 1$ , donc  $\sin. (g - k - \theta) = \sin. (g - k) - \sin. \theta \cos. (g - k)$ , & faisant aussi  $\cos. \alpha = 1$ , on aura:  $\sin. \beta - \cos. h = \sin. h$ .

Fig. 275.

fin.  $(g - k)$  sin.  $\alpha$  — fin.  $h$  cos.  $(g - k)$  sin.  $\alpha$  sin.  $\theta$  ; il faut encore éliminer sin.  $h$ , & cosinus  $h$ , & introduire au lieu de sinus  $\beta$ , une quantité qui en dépende, mais qui soit plus petite & plus facile à traiter dans le calcul. Pour cela nous considérons que  $AM$  ne peut différer de  $PM$  que de la petite quantité  $\alpha$ , ainsi la différence entre  $AM = h$  &  $PM = 90^\circ - \beta$ , fera toujours fort petite ; appellons-la en général  $x$ , on aura  $\beta = 90^\circ - h \mp x$ , sin.  $\beta = \text{cos.} (h - x) = \text{cos.} h \cdot \text{cos.} x \mp \text{sin.} h \cdot \text{sin.} x$ , & faisant cos.  $x = 1$ , & sin.  $x = x$ , sin.  $\beta = \text{cos.} h \mp x \text{ sin.} h$  ; sin.  $\beta - \text{cos.} h = x \cdot \text{sin.} h$ , donc  $x \cdot \text{sin.} h$  est égale à la valeur trouvée ci-devant pour sin.  $\beta - \text{cos.} h = \text{sin.} h \cdot \text{sin.} (g - k) \text{ sin.} \alpha - \text{sin.} h \cdot \text{cos.} (g - k) \text{ sin.} \alpha \text{ sin.} \theta$  ; retranchant  $\alpha$  au lieu de sin.  $\alpha$ , &  $\beta - (90^\circ - h)$  au lieu de  $x$ , & divisant par sin.  $h$ , on aura  $\beta - (90^\circ - h) = \alpha \text{ sin.} (g - k) - \alpha \text{ sin.} \theta \cdot \text{cos.} (g - k)$ . Telle est l'équation du problème ; ou les quantités  $h$  &  $g - k$  sont données, & ou les trois inconnues  $\beta$ ,  $\alpha$  &  $\theta$  sont séparées ; c'est celle que nous allons traiter, pour en dégager ces inconnues  $\alpha$ ,  $\theta$  &  $\beta$ . Nous choisirons trois observations qui donneront trois valeurs numériques de  $g - k$  & de  $h$  ; ainsi l'on formera trois équations qui ne renfermeront chacune que les trois inconnues  $\beta$ ,  $\alpha$  & sin.  $\theta$ .

Equation du problème.  
Choix des observations.

3198. Indépendamment du choix des taches qu'on doit observer (3190), pour rendre les trois observations les plus concluantes qu'il soit possible, on les choisira encore assez loin l'une de l'autre pour que les latitudes observées soient fort différentes, & que les quantités  $g - k$  (ou l'arc  $NB$ ), soient éloignées d'environ  $90^\circ$ , de la première à la seconde, & de la seconde à la troisième observation : par ce moyen si deux des observations sont vers les plus grandes latitudes, l'autre sera vers le nœud, ou si deux sont vers les nœuds, l'autre sera vers la plus grande latitude ; dans le premier cas l'inclinaison sera déterminée avec beaucoup de précision, dans le second cas ce sera le nœud qui sera le mieux déterminé ; mais on aura toujours l'inclinaison avec toute la précision de l'observation même.

Trois observations de Mayer.

3199. Mayer prend pour exemple trois observations parmi celles que nous avons rapportées (3190). Temps



	I.	II.	III.
Temps des observations,	2 <sup>j</sup> 9 <sup>h</sup> 23'	10 <sup>j</sup> 12 <sup>h</sup> 5'	15 <sup>j</sup> 13 <sup>h</sup> 35'
Longit. de Manil. = $g$ ,	0° 14' 42"	4° 1' 19"	6° 7' 24"
Dist. au pôle de l'écl. = $h$ ,	76 55	75 46	74 4
Longit. du Nœud = $k$ ,	10 9 14	10 8 48	10 8 32
Sin. ( $g - k$ )	+0,9097	+0,1302	-0,8560
Cof. ( $g - k$ )	+0,4152	-0,9915	-0,5170

Ces valeurs étant substituées dans l'équation du problème  $\beta - (90^\circ - h) = \alpha$ , &c. (317), on aura les trois équations suivantes, qui ne renfermeront plus que les trois inconnues  $\alpha, \beta, \theta$ .

$$\beta - 13^\circ 5' = +0,9097 \alpha - 0,4152 \alpha \text{ fin. } \theta.$$

$$\beta - 14^\circ 14' = +0,1302 \alpha + 0,9915 \alpha \text{ fin. } \theta.$$

$$\beta - 15^\circ 56' = -0,8560 \alpha + 0,5170 \alpha \text{ fin. } \theta.$$

3200. On pourroit dégager ces inconnues par les méthodes ordinaires d'Algèbre, mais il sera plus facile de le faire en retranchant successivement la première & la seconde équation de la troisième; à l'exemple de M. Euler dans sa théorie de Saturne, & l'on aura :

Résolution  
de ces équations.

$$-171' = -1,7657 \alpha + 0,9322 \alpha \text{ fin. } \theta.$$

$$-102 = -0,9862 \alpha - 0,4745 \alpha \text{ fin. } \theta.$$

La première équation étant divisée par 0,9322, & la seconde par -0,4745, elles deviendront

$$-183', 44 = -1,8941 \alpha + \alpha \text{ fin. } \theta,$$

$$+214, 47 = +2,0784 \alpha + \alpha \text{ fin. } \theta.$$

La différ. de ces deux équations est  $397,91 = 3,9725 \alpha$ ; donc  $\alpha = 100' = 1^\circ 40'$ , & substituant cette valeur de  $\alpha$  dans les autres équations, l'on aura  $\theta = 3^\circ 36'$ , &  $\beta = 14^\circ 33'$ . Cette valeur de  $\theta$  nous apprend que le nœud de l'équateur lunaire est sensiblement d'accord avec le nœud de l'orbite, puisque la différence est si petite qu'on ne peut s'en assurer par les observations. La valeur de  $\beta$  nous apprend que Manilius est éloigné de  $14^\circ 33'$  de l'équateur lunaire, c'est sa *Latitude sélénographique* (321).

Valeur de  $\alpha$ .

3201. La solution de ce problème est assujétie à trois observations, mais la méthode a l'avantage d'en admettre tout à la fois un nombre quelconque, en sorte qu'on puisse

tirer les trois inconnues, non pas de trois observations, mais de 30, si on les a. Mayer ayant calculé 27 observations de la tache de Manilius, il en forme 27 équations semblables aux trois équations  $\beta - 13^{\circ} 5'$ , &c. de ces 27 équations il forme trois sommes qui donnent trois équations, il les traite de la même manière que les trois équations précédentes (3200); & pour que les restes des soustractions qu'il faut faire, soient plus sensibles, il met dans une des sommes toutes les équations, où  $\alpha$  a un coefficient positif & plus grand que dans les autres, telles sont les équations déduites des observations 1, 2, 3, 6, 9, 10, 11, 12 & 27 (3190): il met dans la seconde somme toutes les équations où le coefficient de  $\alpha$ , c'est-à-dire,  $\sin. (g - k)$ , est considérable, mais négatif, comme dans les observations 8, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26; les neuf autres équations forment la troisième somme; le coefficient de  $\alpha$  y est beaucoup plus petit que dans les deux autres; mais le coefficient de  $\alpha \sin. \theta$  y est plus considérable, parce que  $\cos. (g - k)$  est fort grand, la distance de la tache au nœud étant petite lorsque le sinus de  $g - k$  est fort petit.

3202. Ayant donc formé trois sommes, il trouve les trois équations suivantes qui résultent de 27 observations,

Equations  
qui résultent  
de 27 obser-  
vations.

$$9\beta - 118^{\circ} 8' = + 8,4987 \alpha - 0,7932 \alpha \sin. \theta$$

$$9\beta - 140 17, = - 6,1404 \alpha + 1,7443 \alpha \sin. \theta$$

$$9\beta - 127 32, = + 2,7977 \alpha + 7,2649 \alpha \sin. \theta$$

Les 27 équations sont comprises dans ces trois-là, le plus avantageusement qu'il soit possible; les quantités que l'on cherche y sont multipliées, & par-là plus sensibles, & plus faciles à déterminer avec exactitude. Les coefficients de  $\alpha$  y sont assez inégaux pour que la soustraction que nous allons faire produise un reste fort sensible, & donne avec exactitude la valeur de  $\alpha$ .

On retranchera la première équation de la seconde & de la troisième, & l'on aura deux équations, où  $\beta$  ne se trouvera plus:

$$- 564' = - 5,7010 \alpha + 8,7581 \alpha \sin. \theta$$

$$- 1331 = - 14,6391 \alpha + 2,5375 \alpha \sin. \theta$$

Pour faire évanouir  $\sin. \theta$ , on divisera la première par 8,7581, & la seconde par 2,5375, on aura ces deux équations,  $64,398 = 0,6509 \alpha - \alpha \sin. \theta$ , &  $524,530 = 5,7690 \alpha - \alpha \sin. \theta$ ; on retranchera l'une de l'autre, & l'on aura  $460,132 = 5,1181 \alpha$ , donc  $\alpha = 89', 90$ , c'est-à-dire,  $1^\circ 30'$ , substituant cette valeur de  $\alpha$  dans une des équations précédentes, on aura  $\beta = + 14^\circ 33'$  c'est la latitude sélénographique de Manilius, &  $\theta = - 3^\circ 45'$  différence entre le lieu du nœud de l'orbite lunaire & le lieu du nœud  $N$  de l'équateur. Cette quantité est assez peu considérable pour être regardée comme nulle; parce que l'inclinaison étant très-petite, la moindre erreur dans les latitudes observées en doit produire une très-grande dans le lieu du nœud. La longitude du nœud de la lune au commencement de 1748, étoit  $10^\circ 18' 56''$ , on en retranchera les  $3^\circ 45'$  trouvés, & l'on aura la longitude de l'intersection  $N$  de l'équateur lunaire sur l'écliptique ou  $\gamma N$  (fig. 275)  $= 10^\circ 15' 11''$ .

Valeur de  
l'inclinaison.

Le nœud de  
l'orbite d'ac-  
cord avec ce-  
lui de l'équa-  
teur.

3203. Ce résultat de  $\alpha = 1^\circ 30'$  ne diffère que de  $10'$  de celui que l'on a trouvé par trois seules observations (3200); mais ici l'on en a pris neuf fois plus, enforte qu'il est probable que la précision de ce résultat est neuf fois plus grande.

Fig. 275.

3204. Mayer a calculé de même neuf observations faites sur la tache de Dionysius, & douze de Censorinus; les observations de Dionysius donnent pour  $\alpha$  &  $\theta$  à peu près la même chose que celles de Manilius; on trouve une plus grande différence dans les déterminations que fournit la tache de Censorinus, sur-tout pour  $\theta$ , qui se trouve de  $17^\circ \frac{1}{2}$  en plus, au lieu qu'elle étoit négative dans les deux autres cas; mais Censorinus est plus éloigné du centre de la lune, enforte qu'il est dans une partie du disque où les arcs de la lune se raccourcissent davantage & paroissent plus petits que vers le centre; il est donc naturel que les petites erreurs des observations y fassent plus d'effet.

L'obliquité de l'écliptique dans la lune, c'est-à-dire; l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique, se trouve

Il h h ij

par les observations faites sur *Censorinus*, moindre d'environ 11 à 12' que par Manilius, tandis que celles de Dionysius donnent au contraire une ou deux minutes de plus. Mayer en pesant le degré de précision de ces différentes observations, pensa que pour avoir un juste milieu il falloit rabattre une minute de l'obliquité que donne Manilius, & supposer  $\alpha = 1^{\circ} 29'$ , quoique M. Cassini l'eût donnée de  $2^{\circ} 40'$ ; cela pourroit faire croire, comme le dit Mayer, que cette inclinaison est variable; mais il promettoit de faire voir dans un autre mémoire, & par des observations faites du temps de M. Cassini, qu'elle avoit toujours été de  $1^{\circ} \frac{1}{2}$ ; enfin je dois ajouter ici qu'ayant moi-même observé les latitudes de Manilius, avec un excellent micromètre au mois d'Octobre 1763, j'ai trouvé cette inclinaison de  $1^{\circ} 43'$  (3206) par des observations qui me paroissent encore plus sûres que celles de Mayer.

Inclinaison  
de  $1^{\circ} \frac{1}{2}$  degré.

Mouvement  
des nœuds de  
l'équateur lunaire.

3205. Le résultat des observations de Mayer, & des miennes, d'accord avec celui de M. Cassini, est que *le nœud de l'équateur lunaire est toujours aux mêmes points du ciel que le lieu moyen du nœud de la lune*; on peut conclure même des observations d'Hévélius, faites il y a plus de 100 ans qu'il coïncidoit alors aussi bien qu'aujourd'hui, du moins sensiblement, avec le nœud de l'orbite lunaire; enforte qu'il faut lui supposer un mouvement de révolution en 18 ans contre l'ordre des signes, égal à celui des nœuds de la lune (1487). Le P. Boscovich ayant calculé quelques observations de Mayer, avoit cru reconnoître que les nœuds de l'équateur lunaire avoient un mouvement rétrograde plus prompt que celui des nœuds de l'orbite lunaire; mais il est clair que si leur mouvement moyen étoit différent, on ne verroit pas la même coïncidence par des observations faites il y a plus de 110 ans, par celles de Cassini, & par celles de Mayer; je vais encore confirmer ce résultat par de nouvelles observations.

Nouvelles  
observations  
de la libration.

3206. Au mois d'Octobre 1763, la lune se trouvoit à la fois dans ses nœuds, dans ses apsidés & dans ses syzygies; j'en ai profité pour observer la libration moyenne

avec les extrêmes ; j'ai donné ailleurs le détail de ces observations (*Mém. acad.* 1764, pag. 557), je vais seulement en rapporter trois dont j'ai fait le calcul. Le 15 Octobre 1763 à 6 heures 15' du soir, Manilius étoit éloigné de 16' 54" du bord austral de la lune en déclinaison, & suivoit de 61"  $\frac{1}{2}$  le bord occidental, sur le parallèle apparent. De cette observation répétée dix fois de suite & calculée avec le plus grand soin, j'ai conclu que la latitude de cette tache étoit de 13° 8' vue du centre de la lune, par rapport à l'écliptique, & sa longitude 4s 17° 3'. Le 20 Octobre à 6h 30' la même tache suivoit de 48" le bord de la lune, & étoit de 17' 19" plus boréale que le bord austral, d'où je conclus la latitude de Manilius, 14° 47', & sa longitude 6s 22° 5'.

Le 25 Octobre à 10h 25', la lune étant au nord de l'écliptique, la distance de Manilius au bord septentrional de la lune étoit de 10' 28", & cette tache précédoit de 1' 30" le bord oriental de la lune, d'où j'ai conclu que la latitude de Manilius étoit de 16° 15', plus grande de 3° 3' que la précédente, observée dix jours auparavant. De là je conclus par le moyen d'une méthode indirecte qu'il falloit supposer 1° 43' pour l'inclinaison de l'équateur lunaire, 14° 35' pour la latitude sélénographique de Manilius, & placer les nœuds de l'équateur à 2° de ceux de l'orbite lunaire, selon l'ordre des signes, cela prouve que les nœuds sont encore à peu-près d'accord, quoique les nœuds de l'orbite lunaire soient plus avancés de 60°, qu'ils ne l'étoient en 1748; ces observations prouvent donc encore le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire égal à celui de l'orbite lunaire.

3207. Le lieu du pôle boréal de l'équateur lunaire précède toujours de trois signes celui du nœud ascendant de l'orbite lunaire, & si l'on ôte 3s de la longitude du nœud, l'on a la longitude du pôle boréal de l'équateur lunaire. On voit, en effet, que *AN* (*fig.* 275), est plus avancée que *AP* de 90°.

3208. Après avoir déterminé la position de l'équateur lunaire sur l'écliptique, on peut aisément réduire à l'équa-

Elles prouvent le mouvement de l'équateur.

Lieu du pôle de l'équateur lunaire.

*Fig.* 275.

Fig. 275.

La rotation  
de la lune pa-  
roit uniforme.Longitudes  
sélénographi-  
ques des ta-  
ches.Premier mé-  
ridien lunaire.

teur lunaire les longitudes observées (3190), tout ainsi que nous l'avons fait pour les longitudes des taches du soleil (3157). Ces longitudes comptées sur l'équateur lunaire doivent croître également en temps égaux, si la rotation de la lune est uniforme, c'est-à-dire, qu'en les comparant deux à deux, on doit trouver toujours la même durée pour la rotation entière de la lune : ayant fait cet examen sur plusieurs observations, Mayer a trouvé que la rotation de la lune étoit réellement uniforme, autant qu'on en peut juger par les observations, & que sa durée étoit parfaitement égale à celle de la révolution, c'est-à-dire, de  $27^j 7^h 43' 5''$  (1420).

3209. LES LONGITUDES des taches de la lune peuvent se compter comme les longitudes géographiques, en partant de quelque point remarquable du globe lunaire ; on peut donc déterminer sur le disque lunaire, un premier méridien fixe duquel on comptera les longitudes sélénographiques des taches, comme on compte leurs latitudes depuis l'équateur lunaire *LAQ*. Le premier méridien lunaire est supposé avoir un mouvement uniforme autour des poles de la lune, & faire une révolution en  $27^j 7^h$  ; ainsi il s'éloigne uniformément des points équinoxiaux du Bélier & de la Balance, marqués sur le disque lunaire, ou vus du centre de la lune. Si l'on ajoute six signes à la longitude moyenne de la lune, on aura la longitude de la terre vue du centre de la lune, cette longitude moyenne croît aussi uniformément ; ainsi le premier méridien lunaire est toujours dirigé vers ce point du ciel qui nous est indiqué par l'opposite de la longitude moyenne de la lune. En effet, le mouvement moyen de la terre étant d'accord avec celui des taches de la lune, & la terre s'éloignant des points équinoxiaux de la lune avec autant de vitesse qu'une tache dans l'équateur de la lune ; il s'ensuit que la quantité dont le lieu moyen de la terre est éloigné des points équinoxiaux, étant comptée dans l'équateur de la lune d'occident en orient, le point où finit l'arc de l'éloignement, doit être immobile sur la surface de la lune à l'égard des taches. Il est aisé de voir que ce point vu

de la terre , ne paroît jamais fort éloigné du centre apparent de la lune. Si le plan de l'orbite lunaire étoit parallèle à l'équateur de la lune , & son mouvement uniforme , le premier méridien passeroit toujours par le centre apparent de la lune ; mais comme l'inégalité de la lune ne va jamais à plus de  $8^{\circ}$  , il s'ensuit que le premier méridien ne paroîtra jamais éloigné du centre apparent de plus de  $9^{\circ}$  selon la direction de l'équateur.

3210. Ayant ainsi établi sur la lune un premier méridien , on cherchera l'angle au pôle de la lune entre une tache *M* & le nœud ascendant *N* , ou l'arc *NL* de l'équateur lunaire , comme nous l'avons fait pour le soleil (3157) , au moyen du triangle *APM*. L'arc *NL* distance de Manilius au nœud étoit de  $67^{\circ} 54'$  le 4 Mars 1749 , suivant l'observation de Mayer ; la longitude moyenne de la lune étoit alors de  $5^{\text{s}} 25^{\circ} 7'$  , & celle de la terre vue de la lune  $11^{\text{s}} 25^{\circ} 7'$  , la longitude du nœud ascendant de la lune  $9^{\text{s}} 26^{\circ} 15'$  ; si on la retranche de celle de la lune , on aura  $1^{\text{s}} 28^{\circ} 52'$  , argument de latitude du premier méridien ; ainsi le premier méridien lunaire étoit éloigné du nœud ascendant *N* de l'orbite , & de celui de l'équateur lunaire sur l'écliptique de  $58^{\circ} 52'$  , comptés le long de l'équateur lunaire ; or l'angle *P* formé au pôle de la lune entre Manilius & le nœud de l'équateur lunaire , étoit de  $67^{\circ} 54'$  ; la différence est  $9^{\circ} 2'$  longitude de la tache de Manilius , comptée sur l'équateur lunaire , depuis le premier méridien , du côté de l'occident , parce que le point *M* se trouve à l'occident du point *N*. C'est ainsi que Mayer trouve la longitude sélénographique de Manilius  $9^{\circ} 2'$  , celle de Dionysius  $17^{\circ} 17'$  , & celle de Cenforinus  $32^{\circ} 45'$  à l'occident du premier méridien fixe.

Longitude  
de Manilius.

Longitude  
& latitude de  
3 points.

3211. Le même triangle *APM* fait connoître la valeur de *PM* , dont le complément *ML* est la distance de la tache à l'équateur lunaire , ou la *Latitude sélénographique* (3200). Mayer trouve celle de Manilius  $14^{\circ} 34'$  boréale , celle de Dionysius  $2^{\circ} 55'$  boréale , & celle de Cenforinus  $0^{\circ} 6'$  australe. Ces déterminations sont prises par un milieu entre plusieurs observations ; les différences

vont à près d'un demi-degré, & cela n'est pas extraordinaire ; car chaque seconde d'erreur dans les mesures que l'on prend sur le disque lunaire, produit  $3' 38''$  sur la circonférence d'un grand cercle de la lune, dans les objets même situés le plus près du centre ; d'ailleurs les observations de Mayer n'étoient faites qu'avec un simple réticule, où il falloit diviser une minute entière par l'estime.

Ces longitudes & ces latitudes sélénographiques sont absolument nécessaires pour établir & retrouver en tout temps la situation d'une tache sur le disque lunaire, par rapport au centre apparent de la lune & au cercle de latitude qui passe par le centre de la lune ; l'on pourroit prédire par leur moyen la figure du disque lunaire pour un moment donné, & la situation des principales taches, si l'on avoit bien exactement leurs longitudes & leurs latitudes.

Situation  
apparente de  
l'équateur.

Fig. 276.

Fig. 277.

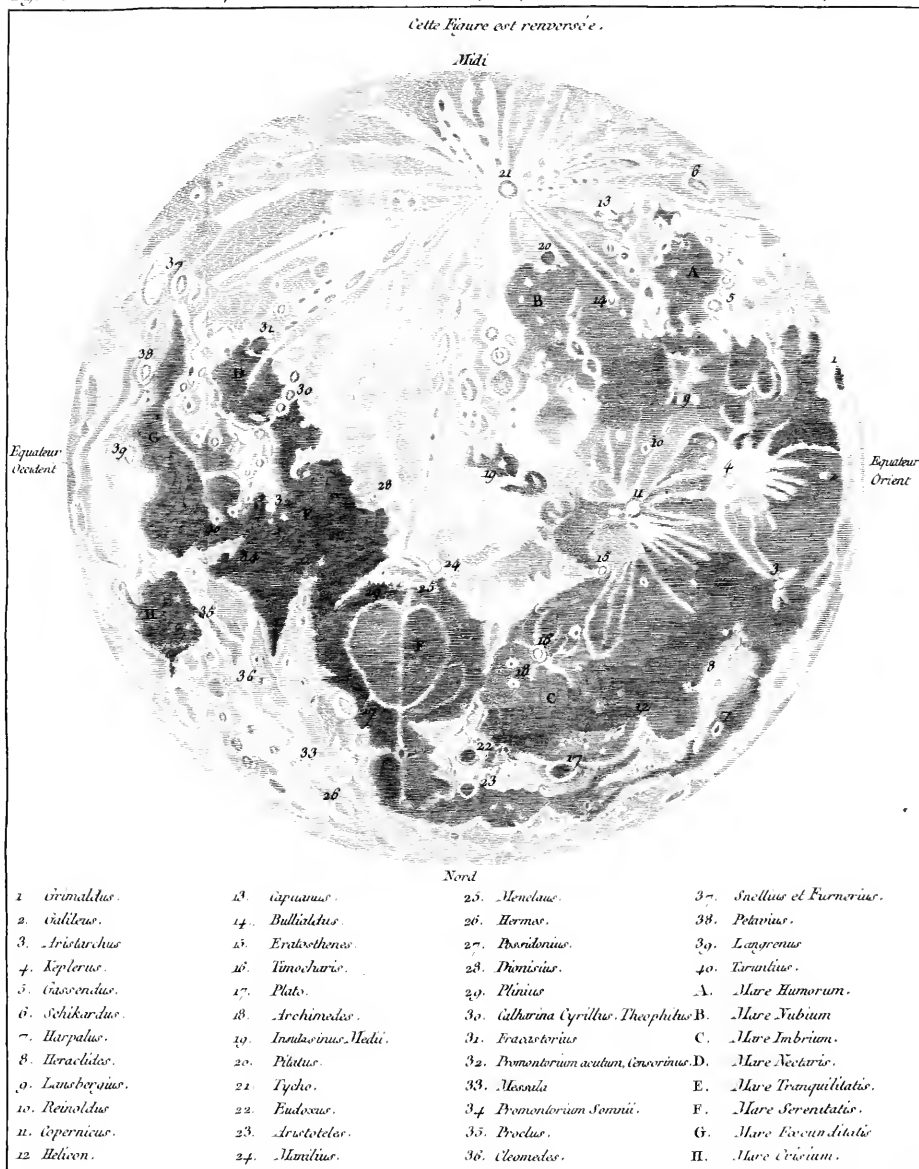
Situation du  
premier mé-  
ridien.

3 2 I 2. Lorsqu'on regarde le disque de la lune située à la fois dans son péricée & dans son nœud, l'équateur lunaire y paroît sous la forme d'une ligne droite, ou d'un diamètre de la lune qui passe d'un côté sur le point de *Censérinus*, & de l'autre trois minutes au nord de *Grimaldi* ; on voit les extrémités de ce diamètre sur la figure de la lune, (*Planche XXXV 111*). Alors le premier méridien lunaire paroît sous la forme d'un diamètre qui traverse l'équateur, & le coupe à angles droits. Si le diamètre *OE* (*fig. 276*), représente l'équateur lunaire, le point *E* à l'est ou à l'orient, le point *O* à l'ouest ou à l'occident, l'écliptique paroîtra sur un diamètre *CD* incliné de  $1^{\circ} \frac{1}{2}$  vers l'occident, quand la lune est dans le nœud ascendant ; & il paroîtra incliné vers l'orient comme *GF*, quand la lune sera dans le nœud descendant. Au contraire, quand la lune est dans ses limites boréales, l'équateur lunaire paroît comme une ellipse *ABD* (*fig. 277*), & l'écliptique fait une autre ellipse *ACD*, plus près du centre que celle de l'équateur ; dans les limites australes l'équateur lunaire paroît une ellipse *AFD* abaissée au midi, & l'écliptique est une ellipse *AED*.

3 2 I 3. Quand la lune est dans ses apsides ; son lieu  
vrai



Figure de la Lune dans ses moyennes libérations, avec les noms de ses principales taches suivant Riccioli, Cassini, Mayer, &c.





vrai étant le même que son lieu moyen , le premier méridien lunaire ( 3209 ) y paroît comme un diamètre *MLR* (fig. 278) ; quand elle est à trois signes d'anomalie , c'est une ellipse *MSR* située à l'occident du centre *L* de la lune, & quand la lune ayant passé son périégée est à neuf signes d'anomalie vraie , le premier méridien *MVR* est dans la partie orientale du disque lunaire. Au moyen de ces considérations l'on peut appercevoir à peu-près la courbure que doivent prendre dans certains temps les directions des taches qui paroissent en ligne droite , quand la lune est dans ses moyennes libration ; cela suffit aussi pour faire voir combien il y a de complication & de diversité dans la figure du disque lunaire , à raison de cette double ellipticité , & combien étoient défectueuses les anciennes hypothèses d'Hévélius qui sur une figure constante de la lune se contentoit de changer la position du centre ; on peut voir le réticule qu'il employoit pour cela , dans une planche des Institutions astronomiques de M. le Monnier , qui répond à la page 140.

Fig. 278.

3214. Je terminerai ce qui concerne la sélénographie , en disant un mot de la hauteur des montagnes de la lune. Hévélius observa des sommets de montagnes dans la lune , qui étoient quelquefois éclairés quoiqu'éloignés de la ligne de lumière de la treizième partie du rayon de la lune ; delà il suit que ces montagnes avoient de hauteur la 338<sup>e</sup> partie du rayon lunaire , ou une lieue de France. En effet , soit *BM* (fig. 279) , le rayon solaire qui éclaire la lune en quadrature , *BE* le côté éclairé , *BH* le côté obscur , *HM* une montagne lunaire ; quand le rayon *BM* commencera à éclairer le sommet *M* , si  $BM = \frac{1}{338}$  du rayon ou 0,07692 , la sécante *CM* fera 1,002953 , comme on le peut voir dans les tables ordinaires où sont les tangentes & les sécantes ; donc la hauteur perpendiculaire *HM* est égale à  $\frac{1}{1000000}$  ou  $\frac{1}{338}$  du rayon ; or le rayon de la lune est  $\frac{1}{17}$  de celui de la terre ; multipliant donc le rayon de la terre 3281000<sup>t</sup> par  $\frac{1}{17}$  &  $\frac{1}{338}$  , on a 2643<sup>t</sup> , c'est-à-dire , plus d'une lieue commune

Montagnes lunaires d'une lieue.

Fig. 279.

de France, ou trois milles d'Italie, comme le trouve Hévélius, (*pag.* 266).

Galilée supposoit cette hauteur encore plus grande, car il disoit avoir observé la distance *BM* des points lumineux de  $\frac{1}{10}$  du rayon de la lune, (*Nunc Syd. pag.* 23); mais on doit préférer à cet égard les observations d'Hévélius. Dans ses phases 30, 31 & 32 qui se trouvent aux environs de la quadrature, il a remarqué les plus grandes distances qu'il y ait jamais entre la ligne de lumière & ces sommets les plus élevés; tels sont ceux qu'Hévélius appelle *Mons Didymus* (ou *Albaregnius*), situé vers l'extrémité de *Mare Nubium*, fort près du centre de la lune; *Mons Appenninus* (ou *Eratosthènes*); *Mons Taurus* (ou *Waltherrus*), situé à côté de *Tycho*, du côté de l'occident; ce sont-là les plus hautes montagnes de la lune.

3215. Il paroît que parmi les montagnes de la lune il y a autant d'hétérogénéité que dans les nôtres; il y en a qui sont d'une matière plus dense que les autres, & qui réfléchissent plus fortement la lumière, (*Hevel. Selen. pag.* 352); cela ne doit pas venir de leurs différentes hauteurs, car au temps de la pleine lune elles sont toutes également éclairées de face, & cependant elles n'ont pas toutes la même teinte. Hévélius soupçonne même *Aristarque*, qu'il appelle *Mons Porphyrites*, d'être une espèce de volcan embrasé (*Selen. pag.* 354). En effet, sa couleur paroît toujours plus rouge que celle des autres parties de la lune, & cela dans toutes les positions de cet astre; mais cela ne vient-il point de la densité de sa matière, ou de sa couleur naturelle, plutôt que de la matière du feu; est-il probable qu'il y ait un volcan qui soit perpétuellement embrasé, sans changer enfin de forme ou de couleur?

Volcan soupçonné dans la lune.



DE LA ROTATION ET DE LA FIGURE  
des cinq Planètes principales.

3216. MERCURE est toujours trop loin de nous, trop engagé dans les crépuscules ou dans les vapeurs de l'horizon, pour qu'on puisse distinguer des taches sur son disque, & examiner la durée de sa rotation. Les phases même de Mercure sont difficiles à distinguer, comme nous en avertit Hévelius, (*Selenog. pag. 75*) ; il faut y employer de grandes lunettes ; on doit avoir soin d'en rétrécir l'ouverture, pour diminuer le trop grand éclat de la lumière de Mercure, & l'on distingue très-bien alors son croissant, du moins quand ☿ est dans la partie inférieure de son orbite. La cause des phases de Mercure & de Vénus est la même que celle des phases de la lune (1406).

Figure de  
Mercure.

3217. LES PHASES DE VÉNUS sont très-apparentes, & se distinguent avec les moindres lunettes ; Vénus est toujours ou en croissant, ou en forme d'ellipse, comme on le voit pour la lune dans la figure 80, & ce fut pour Galilée une preuve démonstrative du mouvement de Vénus autour du soleil (1065). Nous avons expliqué dans le V<sup>e</sup> livre la manière de trouver la phase la plus brillante de Vénus (1194).

3218. LA ROTATION DE VÉNUS est très-difficile à observer ; M. Cassini qui avoit déterminé avec le plus grand succès la rotation de Jupiter & celle de Mars, par des observations très-déliçates, essaya en 1666 d'observer celle de Vénus ; ce ne fut qu'avec beaucoup de peine qu'il apperçut une partie claire située proche de la section de lumière ; elle lui parut achever son mouvement en moins d'un jour, (*Journal des savans*, Décembre 1667, *Elémens d'astr. pag. 514. Anciens mém. T. x. pag. 467*) ; cependant il n'osoit assurer que ce fût toujours la même partie luisante qu'il avoit vue, ni décider si elle faisoit une révolution entière, ou seulement une libration, n'ayant

Des taches  
de Vénus.

pu voir la continuité de ce mouvement dans une assez grande partie de l'arc. Quoique M. Cassini eût observé ces taches de Vénus en Italie, il n'a jamais pu les distinguer à Paris avec les meilleures lunettes.

Inclinaison  
de l'équateur  
de Vénus.

3 2 1 9. M. Bianchini dans les années 1726, 1727 & 1728, observa aussi les taches de Vénus, & il en conclut que la révolution de Vénus autour de son axe n'étoit point de 23<sup>h</sup>, comme M. Cassini l'avoit soupçonné, mais de 24 jours & 8 heures, du septentrion vers le midi dans la partie que nous voyons; il jugea que le pôle boréal de cette révolution répondoit à 10<sup>s</sup> 20<sup>o</sup> de longitude, & étoit élevé de 15<sup>o</sup> sur l'écliptique, en sorte que son équateur étoit incliné de 75<sup>o</sup> sur l'écliptique, & avoit son nœud ascendant à 1<sup>s</sup> 20<sup>o</sup> de longitude; il composa à ce sujet un ouvrage qui a pour titre : *Hesperii & phosphori nova Phænomena, Romæ, in-fol.* 1728; ce livre contient sa *Célidographie*, c'est-à-dire, sa description du disque de Vénus.

L'observation sur laquelle il établit sur-tout la durée de cette révolution de 23 jours, est celle du 26 Févr. 1726, dans laquelle il apperçut à peu-près la même situation des taches à 5<sup>h</sup> 45' & à 9<sup>h</sup>; mais M. Cassini observe qu'il est possible que l'apparition d'une nouvelle tache eût formé à 9<sup>h</sup> un aspect à peu-près semblable à celui qui avoit lieu trois heures plutôt, que n'ayant pu observer les taches dans l'intervalle, il n'a pu savoir si elles avoient eu un mouvement, & que ses observations peuvent se concilier avec une rotation de 23<sup>h</sup> 22' (*Mém. acad.* 1732. *Elém. d'astr.* pag. 519): on croit assez généralement que M. Cassini a raison; & la loi observée par M. de Goimpy (3 122) paroît encore l'indiquer.

Figure de  
Mars.

Planche VI.  
Fig. 80.

3 2 2 0. LE GLOBE DE MARS ne paroît jamais en croissant, comme Vénus & Mercure, parce qu'il est au-delà du soleil; mais on lui voit prendre une figure elliptique, & sa rondeur est diminuée à peu-près comme celle de la lune trois jours avant son plein (*fig. 80*), (Képler, *Épit.* pag. 843. *Astr. refor.* pag. 372. Hevel. *Selenog.* pag. 42. M. Cassini, pag. 457).

Fontana observa en 1636 une tache obscure sur le dis-

que de Mars. Le P. Bartoli, Jésuite de Naples, écrivoit le 24 Décembre 1644, qu'avec une bonne lunette de Sirfali il avoit vu Mars presque rond avec deux taches au-dessous du milieu ; cependant il y eut des temps où Zucchius ne les vit point, & cela fit soupçonner le mouvement de Mars autour de son axe, (*Astron. ref. pag. 372*). M. Cassini observa mieux que personne les taches de Mars en 1666 ; & elles lui firent connoître que Mars tourne sur son axe en 24<sup>h</sup> 40' ; il publia pour lors un mémoire à ce sujet, qui a pour titre, *Martis circa proprium axem revolvibilis observationes Bononienses*. Bononiæ, 1666, *in-fol.* ; dans lequel on voit que l'axe de Mars est à peu-près perpendiculaire à son orbite, autant qu'on en peut juger par des taches qui sont peu propres à cette détermination. Il observa encore ces taches à Paris en 1670. M. Maraldi les observa en 1704 & 1706, & trouva aussi la durée de sa rotation de 24<sup>h</sup> 39'. Ces taches sont fort grandes, mais elles ne sont pas toujours bien terminées, & changent souvent de figure d'un mois à l'autre ; cependant elles sont assez apparentes pour qu'on soit très-assuré de la rotation de Mars, (*Mém. acad. 1706, pag. 74, 1719, 1720. Elém. d'astr. pag. 457*).

Il tourne en  
14<sup>h</sup> 39'.

322 I. LE GLOBE DE JUPITER est très-remarquable par son aplatissement, par ses bandes & par la promptitude de sa rotation. Il n'a point de phases sensibles, parce que nous sommes trop près du soleil par rapport à lui.

L'aplatissement de Jupiter fut observé par M. Cassini avant l'année 1666, comme on le voit dans un ouvrage Latin sur les taches des planètes, dont il n'y a jamais eu que les premières feuilles d'imprimées ; M. Maraldi m'a fait voir ce Fragment *in-fol.* relié avec plusieurs autres ouvrages de M. Cassini, faits avant son arrivée en France & lorsqu'il habitoit encore en Italie. M. Picard observa aussi l'aplatissement de Jupiter. Depuis ce temps-là M. Pound mesura les diamètres de Jupiter, & trouva l'aplatissement entre  $\frac{1}{10}$  &  $\frac{1}{14}$  ; des observations encore plus récentes & plus exactes, que M. Short m'a communiquées, & qu'il a faites avec un héliomètre achromatique,

Aplatissement de Jupiter.

donnent aussi le rapport de 13 à 14 entre le diamètre de Jupiter d'un pôle à l'autre, & le diamètre de son équateur; ce rapport est conforme à la théorie. (Voyez Newton, *Princip. pag.* 415, T. III. *pag.* 91, édit. 1742. M. Clairaut, *Figure de la terre*, *pag.* 195 & 305). Je me suis servi de ce rapport pour trouver la figure de l'ombre de Jupiter dans les éclipses des satellites (2935). Cet aplatissement de Jupiter a paru quelquefois moindre; M. Cassini jugea même que son disque étoit absolument rond en 1690, (*Anciens mémoires*, T. II. *pag.* 108); mais les observations que je viens de rapporter, ont été faites plusieurs fois, & rendent le fait incontestable.

Bandes de  
Jupiter.

Fig. 282.

3 2 2 2. Les bandes obscures que l'on voit sur le disque de Jupiter (*fig.* 282), furent remarquées d'abord à Naples par deux Jésuites nommés Zuppi & Bartoli, & en 1633 par Fontana qui en figura trois, (*Nova caelest. & terr. observ. Neap.* 1646). Hévélius, (*Selenog. pag.* 45), le P. de Rheita, le P. Riccioli, le P. Grimaldi, les observèrent aussi, (*Astron. reform. pag.* 370). Jos. Campani qui construisit à Rome d'excellentes lunettes, observa dans Jupiter le premier Juillet 1664, quatre bandes obscures & deux blanches, au rapport de M. Cassini; il y a des temps où ces bandes paroissent très-peu, elles ne sont pas également bien marquées dans toute la circonférence de son globe; il y a des bandes interrompues, (*J. l'ém. d'astr. pag.* 407). En 1691 on vit jusqu'à 7 ou 8 bandes obscures fort près les unes des autres; souvent on n'en distingue qu'une ou deux, peut-être en 1773 en verra-t-on beaucoup, Jupiter étant périhélie & périgee, le plus près de nous qu'il soit possible.

Inclinaison  
de l'axe.

Hévélius dans sa sélénographie remarqua que ces bandes étoient sensiblement parallèles à l'écliptique; M. Cassini reconnut qu'elles étoient plutôt parallèles à l'équateur de Jupiter, mais cet équateur diffère très-peu du plan de l'écliptique. M. Cassini écrivoit le 12 Octobre 1665 à M. l'Abbé Falconieri, que les ombres des satellites avoient cette année-là un mouvement parallèle aux bandes de Jupiter; or Jupiter étoit alors dans les nœuds



des satellites, donc les orbites des satellites sont parallèles aux cercles des bandes, & l'équateur de Jupiter dans le même plan que les orbites des satellites, c'est-à-dire, incliné d'environ  $3^{\circ}$  sur l'orbite de Jupiter; cela produit dans Jupiter une espèce d'équinoxe perpétuel; mais cette quantité d'inclinaison ne peut s'observer avec précision.

3223. La durée de la rotation de Jupiter, indiquée par les taches dont M. Cassini observa le mouvement, est de  $9^h 55' 50''$ ; & lorsque M. Maraldi revit en 1713 la tache qui depuis 50 ans avoit disparu & reparu plusieurs fois, il trouva la durée de cette rotation  $9^h 56'$ , précisément comme M. Cassini l'avoit trouvée en 1665. On peut voir au sujet des taches de Jupiter & des variations de ses bandes, différens mémoires de M. Cassini & de M. Maraldi, (*Mém. acad.* 1699, 1708, 1714; *Anciens mém. T. 11. pag. 104. T. x. pag. 1, 513 & 707*). Rotation de  $9^h 56'$ .

3224. SATURNE est trop éloigné de nous pour qu'on puisse observer sa rotation; M. Huygens la croyoit de  $10^h$ , comme celle de Jupiter, fondé sur une induction qu'il tiroit de la distance, & de la période du premier satellite de Saturne, comparés à celles du premier satellite de Jupiter. On ne distingue pas dans le disque de Saturne de point assez remarquable, pour qu'il fasse connoître la rotation; mais on voit autour de lui une bande plus remarquable que tout ce qui s'apperçoit dans les autres planètes.

3225. L'ANNEAU DE SATURNE est en effet la chose la plus singulière que la découverte des lunettes nous ait fait appercevoir; on le voit représenté dans la *fig. 280*, tel qu'il paroît dans les plus grandes lunettes; il y a des temps où sa largeur apparente est encore plus grande, mais il y a d'autres temps où on ne le voit point du tout, & où Saturne paroît tout-à-fait rond; Galilée écrivoit en 1612 qu'il avoit vu Saturne composé de trois parties, *Saturnum triformem*; mais comme cela lui paroissoit fort extraordinaire, & qu'il le vit ensuite d'une forme tout-à-fait ronde; il ne suivit point ces observations. Cassendi en 1643 annonça aussi que Saturne Anneau de Saturne.  
*Fig. 280.*

lui paroissoit accompagné de deux globules de même blancheur que le corps même de Saturne. On disputa long-temps dans le dernier siècle sur la vraie figure de cet anneau ; on crut voir quelquefois Saturne accompagné de deux corps ronds ou ovales, distincts & séparés ; le P. Riccioli même s'y trompa, (*Astron. reform. p. 17. 361*), Hévélius en 1647, dans sa sélénographie, pag. 44, disoit formellement qu'il ne comprenoit rien à ces deux bras de Saturne. En 1656 dans sa dissertation *De Saturni facie*, il distingua six phases différentes de Saturne qu'il appelloit *Monospharicum*, *Trispharicum*, *Spharico-cuspidatum*, *Spharico-ansatum*, *Elliptico-ansatum diminutum*, *Elliptico-ansatum plenum* ; mais la seconde & même la troisième phase étoient une illusion optique de ses lunettes.

3 2 2 6. Personne avant Huygens ne comprit, & n'expliqua distinctement la cause de ces apparences de Saturne ; les uns crurent que cela venoit de la figure particulière de Saturne, vu plus ou moins obliquement, les autres de deux gros satellites, (Veidler, *Histor. astr. pag. 500*). Roberval supposa des vapeurs élevées de l'équateur de Saturne ; Hodierna crut que Saturne avoit la forme d'un sphéroïde avec deux taches obscures, & qu'en tournant sur son axe il se présentoit sous différentes formes ; le P. Riccioli, même après l'explication ingénieuse d'Huygens, se trompoit encore, & prétendoit que Saturne étoit environné d'une armille mince, plane, elliptique, adhérente à Saturne en deux points, (*Astron. reform. pag. 368*). Je passe à l'explication d'Huygens, qui est évidemment la meilleure (*Syst. Saturn. 1659*) ; elle fut attaquée par *Eust. de Divinis*, Mais Huygens répondit l'année suivante d'une manière victorieuse.

Ce que c'est  
que l'anneau.

3 2 2 7. Saturne est environné d'un anneau fort mince, (3 2 41), presque plan (*ibid.*), concentrique à Saturne, également éloigné de sa surface dans tous ses points ; il est soutenu par la pesanteur naturelle & simultanée de toutes ses parties, tout ainsi qu'un pont qui seroit assez vaste pour environner toute la terre, se soutiendrait sans piliers ; la partie de l'anneau qui est la plus proche de Saturne, est  
plus

plus lumineuse que les parties éloignées M. Cassini observa que la largeur de l'anneau étoit divisée en deux parties égales, par un trait obscur dont la courbure étoit la même que celle de l'anneau; mais M. Short avec son grand télescope de 12 pieds, y a observé des phénomènes encore plus singuliers (3228). La fig. 280 représente Saturne environné de son anneau, dans son ouverture moyenne; la fig. 281 représente deux aspects différens de l'anneau; 1°, dans le temps où l'anneau est le plus ouvert surpassant un peu les bords de Saturne, & formant une ellipse *MNOP*, dans laquelle le globe de Saturne est inscrit; 2°, dans le temps où il paroît au contraire extrêmement mince, comme on le voit par l'ellipse *MNO*; il est alors oblique à notre œil, & Saturne approchant de la phase ronde (3230). On appelle *ligne des anses* le grand axe de l'ellipse.

3228. L'épaisseur des anses *A*, *B*, est divisée en deux; la partie intérieure *A* paroît avoir une lumière continue sans interruption; la partie extérieure *B* est divisée par plusieurs lignes qui paroissent concentriques à la circonférence de l'anneau, & qui font croire qu'il y a plusieurs anneaux placés dans un même plan; M. Hadley n'en voyoit qu'une avec son télescope de  $5\frac{1}{4}$  pieds de foyer (*Phil. transf. n°. 378. Abrégé VI. 222*); mais M. Short m'a assuré en avoir vu plusieurs; ces différentes lignes noires qui distinguent les couches de l'anneau dans la partie *B*, se rapprochent & se confondent vers les points *C* & *E*, parce que l'anneau y est trop mince, à raison de l'obliquité de l'œil. La bande obscure *EE* que l'on voit sur le disque de Saturne, paroît être l'ombre de l'anneau, comme nous le dirons bientôt (3241). On voit aussi quelquefois le bord de l'ombre de Saturne en *D* projetée sur l'anneau. (*Ibid, pag. 221*).

3229. Le diamètre de l'anneau de Saturne est à celui du globe de Saturne, comme 7 est à 3, suivant les mesures de M. Pound; l'espace *AF* qu'il y a entre le globe & l'anneau, est à peu-près égal à la largeur de l'anneau; ou tant soit peu plus grand, suivant Huygens; ainsi la

largeur de l'anneau est à peu-près  $\frac{1}{3}$  du diamètre de Saturne, aussi bien que les espaces vides & obscurs *AF*, que l'on voit entre le globe & les anses. M. Whiston, dans la vie de M. Clarke, dit que le pere de ce dernier avoit observé une étoile au travers d'un de ces espaces *AF*. (Smith, *Opt.* pag. 440).

Première  
cause de la dis-  
parition.

3 2 3 O. L'anneau de Saturne dispa- roît quelquefois, & il y a trois causes qui peuvent occasionner cette phase ronde. Lorsque Saturne est vers le 20<sup>e</sup> degré de la Vierge & des Poissons, le plan de son anneau se trouve dirigé vers le centre du soleil, & ne reçoit de lumière que sur son épaisseur, qui n'est pas assez considérable pour être aperçue de si loin; Saturne alors paroît rond, & sans anneau. Huygens le vit ainsi en 1655 (*Syst. Saturn.*). M. Maraldi observa aussi cette phase ronde, depuis le 14 Octobre 1714, jusqu'au 1 Février 1715 (*Mém. acad.* 1714, pag. 71, 1715, pag. 12, 1716, pag. 172). Dans certains cas, on distingue une bande obscure qui traverse Saturne par le milieu, & qui est formée par l'ombre de l'anneau sur son disque (*Mém. acad.* 1714, pag. 376) (3241).

Temps où cet  
anneau dispa-  
roitra.

Il suffit que le soleil soit élevé sur le plan de l'anneau d'un angle de huit minutes, pour qu'il paroisse éclairé; aussi cet anneau ne dispa- roît faute de lumière que pendant un mois, quinze jours avant & après le passage de Saturne par le point du ciel qui est à 5<sup>s</sup> 20<sup>o</sup> ou 11<sup>s</sup> 20<sup>o</sup> de longitude. Voici les temps où Saturne se trouvant à 5<sup>s</sup> 20<sup>o</sup> ou 11<sup>s</sup> 20<sup>o</sup>, l'anneau doit être dirigé vers le soleil: 21 Décembre 1671; 6 Juin 1701; 31 Janvier 1715; 20 Novembre 1730; 15 Juillet 1744; 5 Mai 1760; 30 Décembre 1773; 20 Octobre 1789; 17 Juin 1803; 6 Avril 1819, &c.

Nœud de  
l'anneau.

3 2 3 I. Le lieu du nœud de l'anneau sur l'orbite de Saturne, & celui des nœuds des quatre premiers satellittes (2998), que M. Maraldi trouve à 5<sup>s</sup> 19<sup>o</sup> 48' (*Mém. acad.* 1715 & 1716), par les observations de 1715, se trouve à 5<sup>s</sup> 19<sup>o</sup> 55' par les observations de 1685. Huygens l'avoit trouvé à 5<sup>s</sup> 20<sup>o</sup> 30' vers le milieu du dernier siècle, & M. Cassini dit qu'il est à 5<sup>s</sup> 22<sup>o</sup> (*Elém. d'astron.* pag. 643), il faut attribuer sans doute ces différences à

la grande difficulté qu'il y a de déterminer exactement ces intersections.

3 2 3 2. L'anneau de Saturne dispa-<sup>Seconde</sup>roît encore lorsque le plan de l'anneau passe par notre œil, étant dirigé vers la terre ; nous ne voyons alors que son épaisseur qui est trop petite , ou qui réfléchit trop peu de lumière pour qu'on puisse l'appercevoir ; M. Heinsius pense qu'il faut que la terre soit élevée au moins de 30' ou d'un demi-degré sur le plan de l'anneau , pour qu'on puisse l'appercevoir avec un télescope de deux pieds , ou avec une bonne lunette de 15 pieds ; mais je crois qu'on peut l'appercevoir à une moindre élévation. M. Heinsius observa le 8 Décembre 1743 , que les anses paroissent encore , la terre étant élevée de  $34\frac{1}{2}$  au-dessus du plan de l'anneau ; elles étoient cependant si foibles qu'on pouvoit juger que bientôt elles alloient disparaître si la terre se fût rapprochée davantage du plan de l'anneau ; mais l'angle d'élévation ou d'obliquité n'ayant pas diminué jusqu'à la disparition , l'on ne peut rien conclure de cette observation ; je crois donc que l'anneau doit disparaître seulement sept à huit jours avant que la terre soit dans le plan de l'anneau ; le mouvement de la terre est cause que ce passage se fait plus rapidement que celui du soleil dans le plan de l'anneau , & qu'il est plus aisé d'observer la disparition qui vient du passage de la terre dans le plan de l'anneau , que celle qui vient du passage du soleil dans ce plan ; voilà pourquoi j'expliquerai bientôt un moyen de trouver le nœud de l'anneau par ces dernières observations ( 3 2 3 6 ).

3 2 3 3. M. Maraldi a fait voir dans un excellent mémoire à ce sujet ( *Mém. acad.* 1715 , pag. 15 ) , qu'il y a une troisième cause qui peut faire disparaître pour nous l'anneau de Saturne , c'est lorsque son plan passe entre le soleil & nous ; car alors sa surface éclairée n'est point tournée vers nous ; tant que Saturne est entre  $11^s 20'$  &  $5^s 20'$  de longitude , le soleil éclaire la surface méridionale de l'anneau ; si la terre est alors élevée sur la surface septentrionale , elle ne peut voir la lumière de l'anneau , &

Troisième  
cause de la  
phase ronde.

ce fera un des temps de la phase ronde ; ainsi l'on peut voir disparaître les anses deux fois dans la même année, & les voir reparoître deux fois, comme on l'a véritablement observé, (*Mém.* 1715, p. 15). M. Maraldi fit voir le premier de quelle manière on pouvoit expliquer ces différentes dispositions, (*Mém. acad.* 1716) : nous avons eu ensuite là-dessus une très-bonne Dissertation, *De apparentiis annuli Saturni, Autore Godofredo HEINSIO, &c.* Lipsie 1745 ; mais je vais tâcher de rendre cette théorie encore plus facile.

Pl. XXXIX.  
Fig. 283.

Ecliptique  
considérée  
dans Saturne.

3274. Soit *LMA* (fig. 283) le globe de Saturne, sur lequel on imaginera trois cercles pour représenter l'écliptique, l'orbite de Saturne & le cercle de l'anneau. La ligne *NM* représente l'orbite que le soleil paroît décrire en 30 ans autour de Saturne ; cette orbite est exactement dans le même plan & décrite avec les mêmes vitesses, que l'orbite de Saturne vue du soleil (1106). Le diamètre *ATOSL* représente le plan de l'anneau ; le cercle *NOI* représente un plan qui passe par le centre de Saturne parallèlement à l'écliptique ou au plan de l'orbite terrestre : ce plan *NOI* prolongé dans l'immensité de la sphère céleste, passe sur les mêmes étoiles & marque dans le ciel la même trace & les mêmes points que le plan de l'orbe terrestre également prolongé ; car comme deux lignes parallèles ne marquent dans le ciel qu'un seul & même point (1113), ainsi deux plans parallèles quoique l'un passe par le soleil, & l'autre par Saturne, sont comme un seul & même plan, quand on les considère parmi les étoiles fixes ; leur éloignement est si grand, que la distance du soleil à Saturne y devient insensible. Delà il suit que si nous appercevons Saturne à 1° de l'écliptique, c'est-à-dire, à 1° des étoiles auxquelles se dirige l'écliptique, notre rayon visuel faisant avec le plan de l'écliptique terrestre un angle d'un degré, ce même rayon qui va de Saturne à la terre, fera aussi un angle d'un degré avec le plan de l'écliptique vu de Saturne ; & vu de Saturne, paroîtra aussi à un degré des mêmes étoiles situées dans l'écliptique ; la ligne droite qui joint la terre avec Saturne, mar-

que par une des extrémités, le lieu de la terre vu de Saturne, & par l'autre le lieu de Saturne vu de la terre; ainsi la terre peut être supposée en *T* à une distance *TE* de cette écliptique, égale à la latitude de Saturne vue de la terre; car la longitude & la latitude de la terre, vues de Saturne, sont exactement sur le point opposé à celui qui marque le lieu de Saturne vu de la terre. L'arc *NOI* appartient donc à un plan que l'on conçoit parallèle au plan de l'écliptique, faisant en *A* un angle de  $2^{\circ} 30' 20''$  avec l'orbite de Saturne (1376), à  $3^{\circ} 21' 31''$  de longitude (pour 1750) comptée sur l'éclipt. *NOI* (1347).

Supposons le nœud *S* de l'anneau & de l'orbite de Saturne à  $5^{\circ} 20' 8'' 0''$  pour l'année 1744, avec M. Heinsius, (3231) & le nœud *N* de Saturne à  $3^{\circ} 21' 55''$ , la distance *SN* fera de  $58^{\circ} 13'$ ; on connoît l'angle *S*, inclinaison de l'anneau sur l'orbite de Saturne, que je suppose de  $30^{\circ}$ , en attendant que je fasse voir par les observations qu'elle est véritablement de cette quantité; ainsi dans le triangle *NSO* on trouvera  $NO = 54^{\circ} 41' \frac{1}{2}$ , qui ajouté à la longitude du nœud *N* donnera pour la longitude du nœud *O*,  $5^{\circ} 16' 36' \frac{1}{2}$ ; c'est ce que M. Maraldi & Heinsius appellent la longitude du nœud de l'anneau sur l'écliptique. Mais quoique le cercle *NOI* représente l'écliptique, il ne faut pas imaginer que la terre décrive ce cercle réellement, c'est seulement un cercle dont les poles étant prolongés dans l'immensité de la sphère étoilée, répondent aux mêmes points que les poles de l'écliptique ou de l'orbite de la terre. La terre étant supposée en *T* avec une latitude *TE*, & le point *E* étant éloigné de six signes de la longitude géocentrique de Saturne réduite à l'écliptique, telle qu'on l'observe de la terre, l'arc *TE* & l'angle opposé *TOE* nous feront trouver *OE*, & par conséquent la longitude du nœud *O* sur l'écliptique; c'est ainsi que M. Maraldi la trouva par les disparitions & le retour des anses qu'il observa en 1714 & 1715 (*Mém. acad.* 1716).

3235. En effet, dans le temps où l'anneau disparoit, par la seconde cause, c'est-à-dire, dans le temps où son plan est dirigé vers nous, la terre vue de Saturne paroît

*Fig. 283.* répondre en un point *T* du plan de l'anneau *ATSL*, à une distance *TE* de l'écliptique, égale à la latitude géocentrique de Saturne pour ce temps-là; le point *E* de l'écliptique est celui auquel répond la terre vue de Saturne; ainsi l'arc *EO* de l'écliptique est égal à la distance qu'il y a du lieu géocentrique de Saturne au nœud *O* de l'écliptique & de l'anneau. Dans la disparition de l'anneau observée au mois d'Octobre 1714, le lieu de Saturne dans l'écliptique, opposé au point *E*, étoit de  $5^{\circ} 19' 15''$  vu de la terre, suivant M. Maraldi; la latitude septentrionale *ET* de la terre, égale à celle de Saturne étoit  $1^{\circ} 51'$ , d'où l'on conclut le côté  $EO = 3^{\circ} 3'$ ; donc la longitude du nœud *O* étoit  $5^{\circ} 16' 12''$ . Dans la disparition des anses arrivée le 22 Mars 1715, Saturne étoit à  $5^{\circ} 20' 14''$  avec une latitude septent. *TE* de  $2^{\circ} 24'$ ; l'angle *O* étant de  $31^{\circ} 20'$  (3237), on trouvera  $EO = 3^{\circ} 57'$ , & la longit. du point *O*  $5^{\circ} 16' 17''$ . Dans le retour des anses le 12 Juillet Saturne étoit à  $5^{\circ} 19' 52''$  avec  $2^{\circ} 9'$  de latit. donc *TE*  $= 3^{\circ} 33'$ , & le lieu du nœud *O*  $= 5^{\circ} 16' 19''$ . M. Maraldi s'en tient à  $5^{\circ} 16' 17''$  pour 1715. Si l'on veut l'avoir pour un autre temps quelconque, on ajoutera la précession des équinoxes, par exemple,  $25'$  pour 30 ans, & l'on aura  $5^{\circ} 16' 42''$  pour 1745, ce qui diffère à peine de  $5^{\circ} 16' 36''$  que M. Heinsius emploie dans ses calculs.

Nœud de  
l'anneau sur  
l'écliptique.

Autre moyen  
de trouver le  
nœud de l'an-  
neau.

3 2 3 6. Ces déterminations donnent aussi un moyen de trouver le nœud *S* de l'anneau sur l'orbite de Saturne, car dans le triangle *SON* supposant l'angle *S* de  $30^{\circ}$ , l'angle *N* de  $2^{\circ} 30' 40''$  & la distance *ON* du nœud *N* de l'orbite au nœud *O* de l'anneau sur l'écliptique; on trouve  $SN = 58^{\circ} 4' 10''$ , qui ajouté à la longitude du nœud *N* de Saturne, donne celle du nœud *S*  $= 5^{\circ} 19' 48'$  sur l'orbite de Saturne; ainsi voilà un moyen de trouver le nœud de l'anneau sur l'orbite de Saturne, non par le temps où le soleil cesse de l'éclairer (3230); mais par le temps où nous cessons de le voir, & où il passe par notre œil, ce qui est encore plus exact, comme je l'ai fait remarquer; on en peut conclure aussi l'inclinaison *NOA* de l'anneau sur l'écliptique, & on la trouve de  $31^{\circ} 20'$ .



3237. Dans la détermination du nœud de l'anneau, j'ai supposé connue son inclinaison, parce qu'une petite incertitude sur l'inclinaison n'empêcherait pas qu'on ne déterminât fort bien le lieu du nœud. Je passe actuellement à la recherche de cette inclinaison. Lorsque Saturne est le plus éloigné du nœud de l'anneau, & que la terre est la plus élevée au-dessus du plan de l'anneau, il nous paroît sous la forme d'une ellipse *MNOP* (fig. 281); le petit axe est la moitié du grand, du moins en réduisant les observations au centre du soleil; comme nous le dirons dans un instant (3240); ainsi en supposant l'anneau absolument circulaire, il faut que son inclinaison soit de  $30^{\circ}$  sur le plan de l'orbite de Saturne, pour paroître sous cette forme (1828); par-là il est aisé de savoir quelle doit être l'inclinaison de cet anneau sur le plan de l'écliptique; car dans le triangle *NOS* (fig. 283), on connoît l'angle *N* de  $2^{\circ} 30'$ , la distance *NS* des nœuds, & l'angle *S* de  $30^{\circ}$ . On aura facilement l'angle *O*; M. Heinsius le trouve de  $31^{\circ} 23' 17''$ : M. Maraldi suppose cet angle de  $31^{\circ} 20'$  (*Mém. acad.* 1716), la différence est insensible. C'est aussi l'inclinaison que nous avons supposée pour les orbites des quatre premiers satellites de Saturne (2998). On verra bientôt (3239), que quoique l'inclinaison soit de  $31^{\circ} 20'$ , nous n'observons jamais l'anneau d'une si grande ouverture, à cause de la latitude de Saturne.

Il nous reste à chercher sous quelle forme l'anneau doit nous paroître en différens temps, ou l'angle d'élévation de notre œil au-dessus du plan de l'anneau, pour être en état de prédire sa disparition. C'est la matière du problème suivant, que M. Maraldi n'a point donné dans son mémoire, & que M. Heinsius a résolu d'une manière fort longue & fort obscure; en voici une solution plus simple.

3238. PROBLÈME. Connoissant l'inclinaison & les nœuds de l'anneau sur l'écliptique, trouver l'angle d'élévation de la terre au-dessus du plan de l'anneau. Soit *B* le lieu de la terre, opposé à la longitude géocentrique de Saturne; *BF* la latitude de la terre vue de Saturne, égale à la latitude de Saturne vue de la terre, mais de dé-

Fig. 283.

Fig. 281.

Inclinaison  
de l'anneau.

Fig. 283.

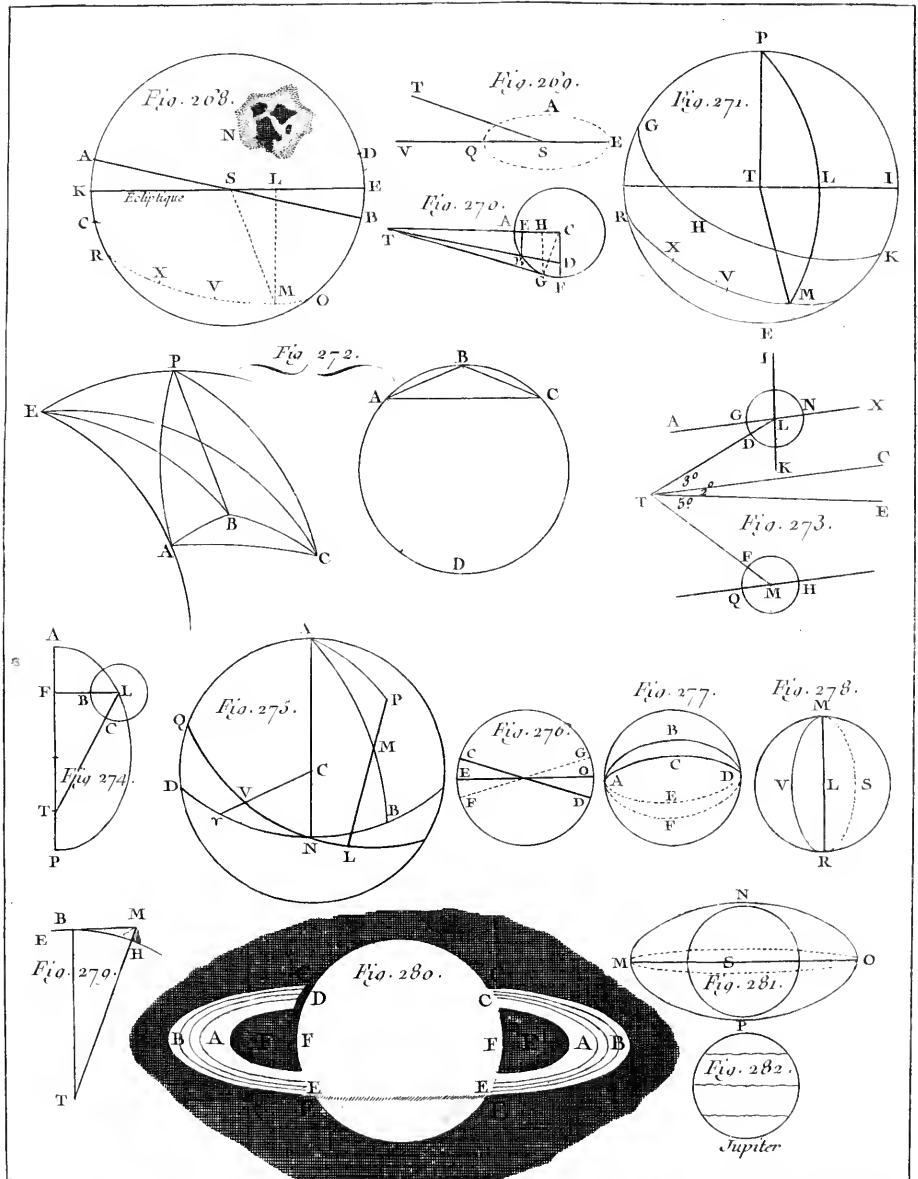
Elévation de  
l'œil sur l'an-  
neau.

nomination contraire, *OF* la différence entre la longitude de la terre vue de Saturne, & celle du nœud de l'anneau  $5^s 16' 36''$ ; dans le triangle *IBO* l'on cherchera *BO*, & l'angle *O*, la somme ou la différence de *BOI*, & de l'angle *SOF* inclinaison de l'anneau sur l'écliptique  $= 31^{\circ} 23'$ , donnera l'angle *SOB*; dans le triangle *BOG* l'on connoît l'hypothénuse *OB*, & l'angle *BOG*, l'on cherchera *BG* qui est la latitude de la terre par rapport à l'anneau, vue de Saturne, ou l'élévation de la terre au-dessus de l'anneau; les analogies font les mêmes que dans l'article 900.

3239. EXEMPLE. Le 8 Décembre 1743, la longitude de Saturne vue de la terre étoit  $5^s 18' 33''$ , & sa latit.  $1^{\circ} 53'$  bor. (1144) ainsi le lieu de la terre (fig. 284), répondoit sur l'écliptique au point *F* à  $11^s 18' 33''$ ; la longitude du nœud descendant de l'anneau *O* étoit à  $11^s 16' 36''$ , donc l'argument de latitude *OF* étoit de  $1^{\circ} 57'$ . La latitude *FB* de la terre étoit de  $1^{\circ} 53'$  australe, d'où il suit que l'hypothénuse *BO* étoit de  $2^{\circ} 42'$ , & l'angle *BOF* de  $44^{\circ} 1'$ , ôtant l'angle *FOG*  $= 31^{\circ} 23'$ , il reste *BOG*  $= 12^{\circ} 38'$ , avec lequel on trouvera *BG*  $= 35'$ , c'étoit l'élévation de la terre, ou plutôt sa dépression au midi du plan de l'anneau. La fig. 284, est disposée pour les cas où la terre est près du nœud descendant de l'anneau, & la fig. 283, pour le nœud opposé. De là il suit que quand Saturne est à  $2^s 16'$  ou  $8^s 16'$  de longitude géocentrique, son anneau doit paroître en général le plus ouvert; il l'étoit par exemple, au mois d'Avril 1767.

Effet de la latitude de Saturne.

Mais la latitude de Saturne apporte quelque modification à cette plus grande ouverture; par exemple, le 22 Avril 1767, Saturne étant à  $2^s 16' 55''$ , avec un  $1^{\circ} 10'$  de latitude australe, & le nœud *O* étant à  $5^s 16' 55''$ ; on aura *OF*  $= 90^{\circ}$ , l'angle *BOF* de  $1^{\circ} 10'$  vers le nord, & l'angle *BOG* de  $30^{\circ} 13'$ ; ainsi quoique l'inclinaison de l'anneau fût de  $31^{\circ} 23'$ , & que la terre fût la plus éloignée qu'elle pût être des nœuds de l'anneau, il n'étoit vu de la terre que sous une inclinaison de  $30^{\circ} 13'$ , quantité dont la terre étoit sous la face méridionale du plan de





de l'anneau le 22 Avril 1767. C'est dans de pareilles circonstances qu'il importe de mesurer avec le plus grand soin le rapport des diamètres de l'anneau, si l'on veut connoître son inclinaison; car si elle est exactement de  $31^{\circ} 23'$ , le petit axe de l'anneau sera au grand, comme le sinus de  $30^{\circ} 13'$  est au rayon, ou comme  $50 \frac{1}{3}$  est à 100, c'est-à-dire, précisément la moitié, car la fraction  $\frac{1}{3}$  ne fauroit s'apprécier avec nos instrumens, n'étant que  $\frac{1}{7}$  de seconde ou la cent cinquantième partie du petit axe, qui en total n'est que de  $20''$ .

3240. Par le moyen de l'élévation de notre œil sur le plan de l'anneau, on trouve la figure de l'anneau, ou le rapport des axes de son ellipse pour un temps quelconque; car le grand axe est toujours au petit comme le rayon est au sinus de cette élévation (1828).

Figure de  
l'anneau.

L'élévation du soleil au dessus du plan de l'anneau est plus aisée à calculer. Supposons le soleil en *C* (fig. 283), l'arc *CD* perpendiculaire sur l'anneau *LSA*, *CD* est la lat. du soleil par rapport à l'anneau, qui se trouve, en disant: le sinus total est au sinus de la distance héliocentrique *CS* de Saturne au nœud *S* ( $5^s 20^{\circ} 8'$ ) mesurée sur l'orbite de Saturne *MCSN*, comme le sinus de  $31^{\circ} 23' 17''$ , est au sinus de *CD* qui est l'inclinaison du soleil sur le plan de l'anneau. Delà on conclut aisément la figure de l'anneau vue du soleil, & l'on peut réduire les observations qu'on en fait sur la terre à celles qui seroient faites dans le soleil, & l'on trouve par-là l'inclinaison de l'anneau sur l'orbite de Saturne, dans les temps où le lieu de Saturne vu du soleil est à  $2^s 20^{\circ}$ , ou  $8^s 20^{\circ}$ ; c'est ainsi qu'on a trouvé cette inclinaison de  $30^{\circ}$ ; on en a conclu celle de l'anneau sur l'écliptique  $31^{\circ} 20'$  par la résolution d'un triangle (3237).

Elévation du  
soleil sur l'an-  
neau.  
Fig. 283.

3241. Il me reste à faire sur l'anneau de Saturne quelques réflexions annoncées dans la définition (3227), & qui supposent les remarques précédentes. J'ai dit que l'anneau est fort mince; en effet, quand il est dirigé vers le soleil & qu'il n'est éclairé que par son épaisseur, nous n'y voyons aucune lumière, & quand il est dirigé vers nous

L'anneau est  
fort mince.

de sorte qu'il ne nous présente que son épaisseur, nous ne le distinguons point. Il est vrai qu'on distingue sur Saturne l'ombre de l'anneau, dans les cas même où l'anneau ne paroît point; cela fit croire à M. Huygens que l'anneau avoit une épaisseur sensible, mais qui réfléchissoit peu de lumière; on pourroit cependant expliquer cette ombre que nous appercevons sur Saturne, sans cette supposition; en effet, quand l'anneau dirigé vers le soleil est éclairé par son épaisseur, la terre n'étant pas exactement dans le plan de l'anneau le voit projeté sur Saturne en forme de bande obscure. Quand l'anneau dirigé vers la terre ne nous présente que son épaisseur, nous ne le voyons point, mais le soleil l'éclaire alors obliquement, de sorte que l'anneau répand sur Saturne une ombre plus considérable que celle de son épaisseur. Il faudroit que l'anneau passât en même temps par le soleil & par la terre, pour qu'on pût décider que son épaisseur ne jette pas d'ombre sensible sur Saturne. M. Maraldi a reconnu encore d'une autre manière que l'anneau étoit très-mince; il suppose que les anses disparoissent quand l'anneau passe par notre œil, & qu'elles reparoissent aussi-tôt que l'anneau cesse d'être dirigé vers le centre de la terre, il trouve par ces deux phases le même résultat pour le lieu du nœud, ce qui prouve qu'on le voit dès qu'il a la moindre obliquité, c'est-à-dire, que son épaisseur est si petite qu'il est inutile d'y avoir égard dans le calcul (*Mém.* 1716, pag. 179).

L'anneau  
n'est pas ab-  
solument  
plan.

3242. J'ai dit que l'anneau est presque plan, il ne l'est cependant pas bien exactement; car M. Maraldi observa qu'une des anses disparoissoit avant l'autre. M. Heinsius observa le 29 Novembre 1743, que le bras oriental étoit plus court que l'autre, vers le temps où ces deux bras commençoient à disparoître. En 1671 lorsque les bras furent prêts à disparoître, ils se racourcirent un peu (*Anciens Mém. tom. x, pag. 583*), or si l'anneau étoit dans un seul plan, toutes ses parties disparoïtroient à la fois, car la différence des largeurs dans une ellipse aussi étroite est une chose insensible; donc ces observations

prouvent qu'il y a un peu de courbure dans le plan de l'anneau.

3243. M. de Maupertuis, dans son discours sur la figure des astres explique la formation de l'anneau par la queue d'une comète que Saturne a forcé de circuler autour de lui. On peut dire aussi que dans la formation des planètes, quelle qu'en ait été la cause, la matière qui retombant tout à la fois s'est trouvée également éloignée du centre, est restée suspendue comme une voûte soutenue par la poussée égale de toutes ses parties. Les partisans des causes finales trouvent que cet anneau étoit nécessaire à une planète qui reçoit du soleil cent fois moins de lumière que nous. Quoi qu'il en soit, c'est une chose bien singulière que cette couronne qui a 64 millions de lieues de diamètre avec 9000 lieues de largeur tout autour.

De la formation de l'anneau.

3244. On a cru remarquer aussi sur le globe de Saturne des bandes semblables à celles de Jupiter (3222), mais beaucoup plus foibles. M. Cassini en observa deux en 1675, 1683, 1696, 1708 & 1719; mais il n'y apperçut pas la courbure qu'il auroit dû y avoir dans ces bandes, si elles avoient été adhérentes au globe de Saturne; en conséquence, M. Cassini le fils pensa qu'elles étoient considérablement éloignées du globe de Saturne, à peu-près comme les nuages qui souvent environnent la terre d'assez loin (*Elém. d'astron. pag. 338, Mém. ac. 1715, pag. 41, Phil. transf. abr. vol. 4, pag. 32*).

Bandes de Saturne.

M. Cassini ne put appercevoir sur le globe de Saturne aucun point remarquable dont le mouvement pût faire distinguer sa rotation; nous sommes donc à cet égard dans la même incertitude que par rapport à Mercure (3216), & nous ignorons même si Saturne a un mouvement sur son axe.

Sa rotation est inconnue.

3245. ON TROUVERA de plus grands détails sur les raches de Vénus, de Mars, de Jupiter & de Saturne dans l'optique de Smith, pag. 409 & suiv. où l'auteur a rassemblé la plupart des découvertes faites par le secours des grandes lunettes & des grands télescopes; on

## 452 ASTRONOMIE, LIV. XX.

n'a fait jusqu'ici qu'un petit nombre d'observations de cette espèce, parce que les grands & bons télescopes sont fort rares & les grandes lunettes fort embarrassantes.

### DE LA PLURALITE DES MONDES.

Pluralité des  
Mondes sou-  
tenue par les  
Anciens.

3246. LA RESSEMBLANCE que l'on a vue entre les planètes & la terre dans le cours de ce livre, nous conduit à parler aussi de leur destination; les plus grands Philosophes ont pensé qu'elles étoient destinées à recevoir des êtres vivans comme nous, & qu'elles étoient habitées. La pluralité des mondes se trouvoit déjà dans les Orphiques, ces anciennes poésies Grecques attribuées à Orphée (*Plut. de Plac. phil. L. 2, c. 13*), les Pythagoriciens tels que Philolaüs, Nicetas, Heraclides, enseignoient que les astres étoient autant de mondes (*Plut. L. 2, c. 13 & 30*), Achilles Tattius, (*Ifag. ad Arati phæn. c. 10. Diog. Laërt. in Emped.*). Plusieurs anciens Philosophes admettoient même une infinité de mondes hors de la portée de nos yeux. Epicure, Lucrece (*L. 2, V. 1069*), tous les Epicuriens, étoient du même sentiment; & Métrodore trouvoit qu'il étoit aussi absurde de ne mettre qu'un seul monde dans le vide infini, que de dire qu'il ne pouvoit croître qu'un seul épi de bled dans une vaste campagne (*Plut. L. 1, c. 5*): Xenophanes, Zenon d'Elée, Anaximenes, Anaximandre, Leucippe, Démocrite, le soutenoient de même. Enfin il y avoit aussi des Philosophes qui en admettant que notre monde étoit unique, donnoient des habitans à la lune; tels étoit Anaxagore (*Macrob. Somn. Scip. L. 1, c. 11*), Xenophanes (*Cic. Ac. qu. I. 4*); Lucien (*Plutarque de Oracul. defectu; de facie in orbe lunæ*). On peut voir une liste beaucoup plus ample de ces opinions des Anciens sur la pluralité des mondes, dans Fabricius (*Bibliot. Gr. tom. 1. c. 20*), & dans le Mémoire de M. Bonamy, (*Acad. des inscr. tom. 1 x*). Hévélus en paroissoit aussi persuadé en 1647, lorsqu'il parloit de la différence des habitans des hémisphères de la lune: *Quòd si in luna dentur res creatæ viventes, illæ quæ habi-*

Par Hévélus.



*tant in hemisphario lunæ patente & aperto terræ , ratione luminis sunt melioris conditionis quàm illæ quæ colunt hemisphærium lunæ nobis absconditum ac latens.* ( Sélénogr. pag. 294 ), il les appelle *Selenitæ*, & il examine assez au long tous les phénomènes qui s'observent dans leur planète, à l'exemple de Képler, *Astron. lunaris*.

3247. La pluralité des mondes fut ensuite ornée par M. de Fontenelle de toutes les graces & de tout l'esprit qu'on peut mettre dans des conjectures physiques; M. Huygens (mort en 1695) dans son livre intitulé *Cosmotheoros*, disserta aussi fort au long sur cette matière. En effet, la ressemblance est si parfaite entre la terre & les autres planètes, que si la terre a été faite pour être habitée, nous ne pouvons douter que les planètes ne le soient également; celui qui voudroit s'y refuser seroit aussi inconséquent que celui qui dans un troupeau de moutons vu de loin, soutiendrait que les uns peuvent avoir des entrailles d'animaux, & les autres ne contenir que des pierres.

Par MM. de  
Fontenelle &  
Huygens,

3248. Nous voyons six planètes autour du soleil, la terre est la troisième; elles tournent toutes les six dans des orbites elliptiques; elles ont un mouvement de rotation comme la terre; elles ont, comme elle, des taches, des inégalités, des montagnes; il y en a trois qui ont des satellites, & la terre en est une; Jupiter est aplati comme la terre; enfin, il n'y a pas un seul caractère visible de ressemblance qui ne s'observe réellement entre les planètes & la terre: est-il possible de supposer que l'existence des êtres vivans & pensans soit restreinte à la terre; sur quoi seroit fondé ce privilège, si ce n'est peut-être sur l'imagination étroite & timide de ceux qui ne peuvent s'élever au-delà des objets de leurs sensations immédiates? Ce que je dis des six planètes qui tournent autour du soleil, s'étendra naturellement à tous les systèmes planétaires qui environnent les étoiles; chaque étoile paroît être, comme le soleil, un corps lumineux & immobile, & si le soleil est fait pour retenir & éclairer les planètes

Ressemblance des planètes avec la terre.

## 454 ASTRONOMIE, Liv. XX.

qui l'environnent , on doit présumer la même chose de chaque étoile.

Immensité  
de l'univers.

3249. Il y a eu des écrivains aussi timides que religieux , qui ont réprouvé ce système comme contraire à la Religion ; c'étoit mal soutenir la gloire du Créateur : si l'étendue de ses ouvrages annonce sa puissance , peut-on en donner une idée plus magnifique & plus sublime ? Nous voyons à la vue simple , plusieurs milliers d'étoiles , il n'y a aucune région du ciel où une lunette ordinaire n'en fasse voir presque autant que l'œil en distingue dans tout un hémisphère ; quand nous passons à de grands télescopes , nous découvrons un nouvel ordre de choses , & une autre multitude d'étoiles qu'on ne soupçonnoit pas avec les lunettes ; & plus les instrumens sont parfaits , plus cette infinité de nouveaux mondes se multiplie & s'étend : l'imagination perce au-delà du télescope , elle y voit une nouvelle multitude de mondes , infiniment plus grande que celle dont nos foibles yeux appercevoient la trace ; l'imagination va plus loin , elle cherche des bornes ; quel spectacle ? La seule difficulté qu'un Philosophe peut avoir sur l'existence des habitans de tant de millions de planètes , c'est l'obscurité des causes finales qu'il est bien difficile d'admettre , quand on voit les erreurs où sont tombés les plus grands philosophes , Fermat , Leibnitz , Maupertuis , &c. en voulant employer ces causes finales , ou ces suppositions métaphysiques de prétendus rapports entre les effets que nous connoissons & les causes que nous leur assignons , ou les fins pour lesquelles nous les croyons exister.



# LIVRE VINGT-UNIEME.

## DU CALCUL DIFFERENTIEL,

& du Calcul intégral, appliqués à l'Astronomie.

**P**ARMI les propriétés des sections coniques & les méthodes du calcul infinitésimal, il y en a que nous employons dans ce livre, & qu'on ne trouveroit pas dans les traités ordinaires ; leurs applications à l'astronomie sont d'ailleurs assez multipliées pour mériter d'être rassemblées ici, sur-tout avec des démonstrations plus simples qu'on ne les trouve ailleurs.

3250. Les ouvrages auxquels on pourra recourir pour avoir de plus grands détails, relativement aux Sections Coniques, sont le *Traité analytique des sections coniques*, par M. le Marquis de l'Hôpital, Paris 1707 & 1720 in-4° ; le grand *Traité* de M. de la Hire, in-folio ; l'Analyse démontrée du P. Reynau ; le *Traité des Sections Coniques* du P. Boscovich qui forme le III<sup>e</sup> volume de ses *Éléments de Mathématiques*, imprimés à Rome en 1754, in-8° ; celui de Robert Simpson, imprimé à Edimbourg en 1750, in-4° ; l'*introduction aux Sections Coniques*, par M. Mauduit, à Paris, chez Defaint, in-8° 1761 ; l'Ouvrage de M. l'Abbé de la Chapelle ; les *Institutions Mathématiques* de M. l'Abbé Sauri, imprimées en 1770, &c.

3251. LA PARABOLE est une courbe formée à la surface d'un cône par une section parallèle au côté du cône ; telle est la courbe *PCOD* (fig. 262). Soit son abscisse  $PQ = x$  son ordonnée  $QD = y$ , &  $p$  son paramètre, l'équat. de la parab. est  $y^2 = px$ . Le point *S* dans lequel l'abscisse  $PS = \frac{p}{4}$  s'appelle le foyer, parce tous les rayons parallèles à l'axe qui tombent dans la concavité de la parabole se réunissent en ce point, comme on le prouve dans tous les livres élémentaires des sections coniques. Nous avons démontré

Pl. XXXVI.

Fig. 262.

# 456 ASTRONOMIE, LIV. XXI.

déjà quelques propriétés de la parabole 3027 & suiv. 3033, 3043, il ne nous reste que peu de chose à ajouter.

3252. Le rayon vecteur  $SD$  dans une parabole, (ou la distance du foyer à la circonférence), est égal à l'abscisse plus le quart du paramètre; car  $SQ = x - \frac{p}{4}$ ,  $PT = x$ ,  $DQ^2 = px$ ; dans le triangle  $DSQ$  rectangle en  $Q$  l'on aura  $SD = \sqrt{DQ^2 + QS^2} = \sqrt{(px + xx - \frac{p^2}{2} + \frac{p^2}{16})} = x + \frac{p}{4}$ . Delà il suit que  $SD$  est aussi égale à  $ST$  & à  $SR$ , la ligne  $DR$  étant perpendiculaire à  $DT$ , car  $ST = SP + PT = \frac{p}{4} + x$ ; &  $SR = PQ - PS + QR = x - \frac{p}{4} + \frac{p}{2} = x + \frac{p}{4}$ . Ainsi le triangle  $TSD$  est isocèle, comme nous le supposons dans l'article suivant. On voit également que la sous-normale  $QR = SR + SP - PQ = \frac{p}{2}$ , ainsi la sous-normale est double du paramètre.

3253. Le rayon vecteur  $SD$  est égal à  $\frac{SP}{(\cos. \frac{1}{2} PSD)^2}$ , c'est-à-dire, que le carré du cosinus de la moitié de l'anomalie vraie (3032) est au carré du rayon, comme la distance périhélie est au rayon vecteur. Si du foyer  $S$  on abaisse sur la tangente  $TD$  une perpendiculaire  $SX$ , l'angle  $TSD$  sera partagé en deux parties égales, puisque le triangle  $TSD$  est isocèle (3252); & parce  $SX$  est parallèle à  $DR$ , l'angle  $DRQ$  est égal à l'angle  $XST$ , c'est-à-dire à la moitié de  $PSD$  qui est l'anomalie vraie; dans le triangle  $RDT$  rectangle en  $D$ , on aura à cause de la perpendiculaire  $DQ$  cette proportion,  $RQ : RD :: RD : RT$ , ou  $2PS : RD :: RD : 2SD$ , donc  $2PS : 2SD :: RQ^2 : RD^2$ ; mais  $RQ : RD :: \cos. QRD : 1$ ; donc  $PS : SD :: \cos. QRD^2 : 1 :: \cos. \frac{1}{2} PSD^2 : 1$ ; donc  $SD = \frac{SP}{(\cos. \frac{1}{2} PSD)^2}$ , nous avons fait usage de cette propriété pour le calcul des comètes (3042).

## PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE.

3254. L'ELLIPSE <sup>(a)</sup> est de toutes les courbes celle dont les astronomes font le plus d'usage, sur-tout dans les projections des éclipses, dans les calculs des orbites planétaires, & dans ceux de la figure de la terre. C'est une courbe de forme ovale ou alongée, dans laquelle les carrés des ordonnées sont aux rectangles correspondans des segmens du grand axe, comme le carré du petit axe est au carré du grand.

Utilité de l'ellipse.

Définition.

Soit *AMPI* (fig. 285) la circonférence d'une ellipse, *Pl. XXXIX. fig. 285.*  
*C* le centre, *AP* le grand axe, *CZ* la moitié du petit axe, *MB* l'ordonnée, *AB* & *BP* les deux segmens; on a par la définition, ou par la propriété fondamentale de l'ellipse,  $MB^2 : AB \cdot BP :: CZ^2 : AC \cdot CP$ , & faisant  $CA = a$ ,

$CZ = b$ ,  $CB = x$ ,  $ME = y$ , on aura  $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a - x)x$ ; c'est l'équation de l'ellipse, de laquelle il faut partir comme d'une définition; on démontre facilement que cette équation a lieu quand on coupe obliquement un cône ou un cylindre. Quelquefois au lieu de  $\frac{b^2}{a^2}$  on met  $\frac{p}{2a}$ , en nommant *p* une troisième proportionnelle aux axes  $2a$  &  $2b$ , c'est ce qu'on appelle le paramètre du grand axe. Si l'on compte l'abscisse *x*, non du centre, mais du sommet, on aura  $y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - xx)$ .

Equation de l'ellipse.

3255. On peut tirer de cette équation la valeur de *x* en *y*, si l'on considère que  $(a - x)^2 = aa - 2ax + xx$ ; mais dans l'ellipse  $2ax - xx = \frac{aa}{bb} y^2$ ; donc  $(a - x)^2 = aa - \frac{aa}{bb} y^2$ , &  $a - x = \frac{a}{b} \sqrt{bb - yy}$ .

(<sup>a</sup>) Ce mot vient de *Ελλείπω*, *deficio*, comme parabole & hyperbole indiquent l'égalité & l'excès, parce que dans l'équation générale des Sections Coniques,  $y^2 = 2px$  plus petit que le rectangle  $2px$  de l'abscisse & du paramètre, égal ou plus grand, suivant qu'on a une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

$\pm p \frac{xx}{a}$ , le carré de l'ordonnée est

# 458 ASTRONOMIE, Liv. XXI.

Pl. XXX.  
Fig. 229.

3256. Si l'on décrit sur le même axe  $HK$  (fig. 229), & autour du même centre  $C$  une ellipse  $HLK$ , & un cercle  $HIK$ , on a dans le cercle,  $DM^2 = HM.MK$ ; mais par la propriété de l'ellipse, on a  $MF^2 : HM.MK :: CL^2 : CI^2$ , donc en mettant dans cette proportion à la place de  $HM.MK$  sa valeur  $DM^2$ , l'on aura  $MF^2 : DM^2 :: CL^2 : CI^2$ , donc  $MF : DM :: CL : CI$ ; c'est-à-dire, que les ordonnées de l'ellipse sont proportionnelles aux ordonnées du cercle; en sorte que si l'on divise en deux parties égales toutes les ordonnées  $DM$ ,  $CI$ , &c. d'un demi-cercle  $KDIH$ , la ligne qui passe par tous les points de division, est une ellipse  $KFLH$ ; nous avons fait usage fort souvent de cette proportion constante qu'il y a entre les ordonnées du cercle & celles de l'ellipse (art. 1240, 1827, 2246, 3103, &c.).

Pl. XXXI.  
Fig. 239.

3257. Cette propriété de l'ellipse fait voir que tout cercle projeté sur un plan qui lui est incliné y produit une ellipse, comme nous l'avons déjà remarqué (1827). La considération de cette projection fournit un moyen bien simple de démontrer que la propriété des axes (3254) a lieu aussi, par rapport à deux diamètres de l'ellipse tels que  $MEN$ ,  $Qeq$  (fig. 239), dont l'un est parallèle aux ordonnées de l'autre; c'est-à-dire, que  $Ss^2 : Qq^2 :: NV.VM : NE.EM$ . En effet, toutes les ordonnées  $Ss$ ,  $Qq$  de l'ellipse qui sont parallèles entre elles, sont plus petites que les ordonnées  $XO$ ,  $Ff$  du cercle dont elles sont les projections, & plus petites dans un rapport constant; les segmens  $NV$ ,  $VM$ ,  $NE$ ,  $EM$ , dans l'ellipse sont plus petits que les segmens  $YZ$ ,  $ZB$ ,  $YE$ ,  $EB$ , dont ils sont les projections, & plus petits dans un rapport constant, puisque les lignes de l'ellipse sont toutes également inclinées sur le plan du cercle projeté; mais dans le cercle les carrés des ordonnées sont égaux aux produits des segmens, donc dans l'ellipse ils sont dans un rapport constant; si par exemple les carrés des ordonnées elliptiques sont la moitié des carrés des ordonnées circulaires, & que les produits des segmens dans l'ellipse soient le quart de ceux du cercle, les carrés

des ordonnées elliptiques seront toujours doubles des rectangles de leurs segmens.

3258. Il suit encore de là que si deux lignes *MN* & *AR* se coupent dans l'ellipse (*fig. 288*), & qu'elles soient parallèles à deux diamètres *GF*, *BD*, l'on aura cette proportion  $AP \cdot PR : MP \cdot PN :: BQ \cdot QD : GQ \cdot QF$ . En effet, les ordonnées *RA*, *BD* sont plus petites que les ordonnées circulaires, dont elles sont les projections; mais elles sont entre elles dans le même rapport; les segmens *MP*, *PN*, *GQ*, *QF*, sont les mêmes que les segmens circulaires, dont ils sont les projections; donc puisque les carrés des ordonnées étoient égaux aux produits des segmens dans le cercle, ils seront en raison constante dans l'ellipse; c'est ce que M. de l'Hôpital démontre d'une manière fort longue (art. 165, pag. 108, édit. de 1720).

*Pl. XXXIX.  
Fig. 288.*

3259. LA SOUS-TANGENTE *QR* de l'ellipse (*fig. 287*) est  $= \frac{aa - xx}{x}$ , comme dans le cercle, en comptant les abscisses du centre. Concevez un cercle décrit sur le rayon *CA*, mais incliné au plan de la figure, enforte que sa projection orthographique soit une ellipse (1827); au point qui a sa projection en *F* concevez une tangente au cercle; cette tangente aura pour projection la tangente *FQ* de l'ellipse; car tout autre point du cercle au-dedans de la tangente se projettera en un point de l'ellipse au-dedans du point *F*, ainsi le point *F* est le seul qui soit commun à la ligne *FQ* & à l'ellipse; donc la ligne *FQ*, projection de la tangente au cercle, est tangente à l'ellipse, donc elles aboutissent l'une & l'autre au même point *Q* du grand axe; mais dans le cercle on a  $x : y :: y : RQ$ ; ou  $RQ = \frac{aa - xx}{x}$ , donc c'est aussi la valeur de la sous-tangente dans l'ellipse.

*Sous-tan-  
gente.  
Fig. 287.*

COROLLAIRES. La distance *CQ* du centre à la tangente est  $= \frac{aa}{x}$ , puisqu'elle est la somme de *CK* & *RQ*; l'on a donc  $CL : CA :: CA : CQ$ . L'équation de l'ellipse étant la même par rapport au petit axe de l'ellipse, l'on a

*fig. 287.* pour le petit axe  $CG:CB::CB:CX$ , &  $CX.CG = CB^2$ .

3260. Si la ligne  $FNH$  est perpendiculaire en  $F$  à la tangente  $QFTX$ , le produit de  $FH$  par  $FN$  est égal au carré du demi-petit axe; car à cause des triangles semblables  $CTX, FNR$ ,  $CT:CX::FR:FN$ , ou  $FH: CX::CG:FN$ , donc  $FH.FN = CX.CG = CB^2$ .

*Pl. XXXV.*

*fig. 239.*

3261. Le point  $Q$  de l'ellipse (*fig. 239*), étant la projection du point  $F$  du cercle circonscrit, la tangente de l'ellipse en  $Q$  est la projection de celle du cercle en  $F$  (3259); la tangente à l'ellipse en  $Q$  est parallèle au diamètre conjugué  $MN$ ; d'où il suit que la tangente en  $F$  est parallèle au rayon  $EY$ , dont  $EN$  est la projection; ainsi le rayon  $EF$  fait un angle droit avec le rayon  $EY$ , ou avec le rayon  $EB$ . J'ai fait usage de cette propriété pour l'aberration (2832, 2842).

3262. LE PARALLÉLOGRAMME fait sur deux diamètres conjugués est constant; ou ce qui revient au même le produit du demi-diamètre  $EQ$ , & de la perpendiculaire  $QH$ , abaissée sur son demi-diamètre conjugué  $EM$  est égal au rectangle ou au produit des demi-axes. Puisque l'angle  $FLB$  est toujours droit, le carré formé sur  $FE$  &  $EB$  est constant, quelle que soit la situation des points  $F$  &  $B$  qui ont leur projection en  $Q$  & en  $M$ ; le parallélogramme formé sur  $QE$  &  $EM$  est la projection de ce carré; la surface de cette projection est constante, parce que de quelle manière qu'une figure soit placée dans un plan, sa projection sur un autre plan d'une inclinaison donnée est toujours dans le même rapport avec la figure projetée: quoique la projection change de forme: on comprendra facilement la vérité de ce principe si l'on divise, dans tous les cas, la figure projetée, par exemple, le carré fait sur  $FEB$  en éléments ou lignes perpendiculaires à la commune section des deux plans, ou à  $LE$ ; la somme de ces éléments sera toujours constante, puisque c'est la surface du carré; chacun a pour projection une ligne plus petite dans le rapport du cosinus de l'inclinaison au sinus total (1825), donc la somme qui en résulte sera dans tous les cas une



surface plus petite dans ce même rapport que la surface donnée. Ainsi le carré fait sur  $EFB$  ayant pour projection le parallélogramme fait sur les diamètres conjugués  $QE$ ,  $EM$ , ce parallélogramme ou le produit de  $EQ$  par  $QH$  est une quantité constante, quelque soit le point  $Q$ . Mais lorsque le point  $Q$  est en  $L$ , & le point  $M$  en  $G$ , ce parallélogramme est le rectangle des deux demi-axes,  $= ab$ , donc  $QE \cdot QH = ab$ . J'ai fait usage de ce théorème pour le calcul de l'aberration (2843).

3263. LA SOMME des carrés de deux diamètres conjugués est constante; c'est-à-dire, toujours égale à la somme des carrés des deux axes. Par exemple,  $EQ^2 + EM^2 = 1 + b^2$ , en nommant 1 le demi-grand axe de l'ellipse, &  $b$  le demi-petit axe. Si l'on conçoit les points  $Q$  &  $M$  de l'ellipse, comme étant les projections des points  $F$  &  $B$  du cercle, l'élévation perpendiculaire du point  $F$  du cercle au-dessus du plan de l'ellipse sera le côté d'un triangle rectangle, dont  $FD$  ou le sinus de l'arc  $FL$  est l'hypothénuse, &  $QD$  l'autre côté; le carré de cette élévation sera donc égal au carré de  $FD$  moins le carré de  $QD$  qui est dans le même rapport à chaque point de l'ellipse; donc le carré de cette élévation sera comme le carré du sinus de  $FL$ . Puisque  $FB$  est un quart-de-cercle, l'abaissement du point  $E$  au-dessous de la figure sera comme le carré du cosinus de  $LF$ , donc la somme des carrés de l'abaissement & de l'élévation sera constante; mais les carrés des hypothénuses  $FE$  &  $EB$  sont constans, donc la somme des carrés des côtés  $EQ$ ,  $EM$  est constante, c'est-à-dire, par-tout égale à la somme des carrés des demi-axes.

COROLLAIRE. Par la même raison, la somme des carrés des abscisses  $EC$ ,  $ED$  qui répondent aux diamètres conjugués est constante, puisque l'une est le cosinus de  $LB$ , & l'autre le sinus; & que le carré de sinus plus celui du cosinus fait toujours le carré du rayon; donc  $EC^2 + ED^2 = EL^2$ .

3264. Lorsque l'abscisse  $EL'$  (fig. 238) est le sinus d'un nombre de degrés pris sur le cercle circonscrit  $CD$ , l'ordonnée  $SV'$  est le cosinus d'un arc semblable, ou de

Fig. 233.

pareil nombre de degrés pris sur le cercle inscrit  $ABF$ . Supposons l'arc  $CD$  de  $50^\circ$ , & l'arc  $AT$  de  $50^\circ$ , & tirons un rayon  $ETD$ ; le sinus  $DG$  de l'arc  $CD$  est égal à l'abscisse  $LV$ ; donc  $EV$  est le sinus de  $50^\circ$  dans le grand cercle; la ligne  $SV$  qui est égale à  $PE$ , est aussi le cosinus de  $50^\circ$  dans le cercle  $ATB$ , car  $ET:ED::TR$  ou  $SV:DV$ , ou  $\frac{DV}{ED} = \frac{SV}{ET}$ ; or  $\frac{DV}{ED}$  est le cosinus de l'arc  $CD$  de  $50^\circ$  (3613); donc  $\frac{SV}{ET}$  est aussi le cosinus de  $50^\circ$ , ou le cosinus de l'arc  $AT$ ; donc si l'abscisse  $EV$  est le sinus de  $50^\circ$  dans le grand cercle, l'ordonnée  $SV$  en fera le cosinus dans le petit cercle. Nous avons fait usage de cette propriété dans les articles 1843, 2767, 2825.

Pl. XXXVI.

Fig. 266.

3265. LE SECTEUR elliptique  $GSFG$  (fig. 266) est au secteur circulaire  $GSEFG$ , comme le petit axe de l'ellipse est au grand axe. Car toutes les ordonnées de l'ellipse sont à celles qui leur répondent dans le cercle en raison constante, & comme le petit axe est au grand axe (3256); ainsi le segment elliptique  $GBV$  qui est comme composé d'une infinité d'ordonnées à l'ellipse, fera au segment  $GBF$  composé d'une infinité d'ordonnées au cercle, dans ce même rapport du petit axe au grand axe. Les triangles rectilignes  $B\Delta V$ ,  $ESF$ , sont entre eux comme leurs bases  $BV$ ,  $VF$ , c'est-à-dire, encore comme le petit axe est au grand axe; donc les sommes, ou les secteurs entiers  $G\Delta V$ ,  $GSF$ , composés chacun d'un triangle & d'un segment, sont encore comme le petit axe est au grand axe de l'ellipse.

3266. La même chose doit s'étendre à l'ellipse entière, comme à chacune de ses parties; ainsi la surface d'une ellipse est à celle du cercle circonscrit, comme le petit axe est au grand axe. Nous avons supposé cette vérité (1239).

3267. Si l'on appelle  $a$  &  $b$  les demi-axes de l'ellipse, &  $c$  la valeur de la circonférence d'un cercle dont le rayon est 1, (c'est-à-dire, à peu-près le nombre 6,28), la surface de l'ellipse fera  $\frac{c b a}{2}$ , car la circonférence dé-

crite sur le demi-grand axe est alors  $ca$ , la surface est  $\frac{ca^2}{2}$ , celle de l'ellipse est à celle du cercle, comme  $a$  est à  $b$ , donc celle de l'ellipse est  $\frac{ca^2}{2} \cdot \frac{b}{a}$  ou  $\frac{cab}{2}$ .

Surface de  
l'ellipse.

3268. La surface d'une ellipse est donc égale à celle d'un cercle, dont le diamètre est moyen proportionnel entre les deux axes de l'ellipse; car le rayon de ce cercle seroit  $\sqrt{ab}$ , & sa surface  $\frac{c}{2} \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab}$  ou  $\frac{cab}{2}$ , égal à la surface de l'ellipse. Nous en avons fait usage (1257, 3331).

3269. Si de l'extrémité  $Z$  du petit axe (fig. 285), avec un rayon  $ZS$  égal au demi-grand axe  $CA$ , l'on décrit un arc de cercle, il coupera le grand axe en deux points  $S$  &  $F$ , qu'on appelle les foyers; supposant  $CZ = b$ ,  $CS = e$ ,  $CA = a$ , l'on aura  $aa - ee = bb$ .

Fig. 285.

3270. Le rayon vecteur  $SM$  est égal à  $\frac{PB \cdot SA}{CA} - SB$ ; c'est-à-dire,  $= \frac{(a+x)(a+e) - a(e+x)}{a}$ , ou ce qui

Rayon  
vecteur.

revient au même  $\frac{a^2+ex}{a}$ . Par la propriété la plus connue de l'ellipse, & que nous démontrerons même bientôt, on a  $SM + FM = 2a$ , supposons  $SM = a + z$ , &  $FM = a - z$ , on aura  $BA^2$  ou  $y^2 = SM^2 - SB^2 = aa + 2az + zz - ee - 2ex - xx = FM^2 - FB^2 = aa - 2az + zz - ee + 2ex - xx$ , donc  $2az - 2ex = -2az + 2ex$ ,  $z = \frac{ex}{a}$ , donc  $SM = a + \frac{ex}{a}$ , ou ce qui revient au même, comme on l'a vu au commencement de cet artic.,  $SM = \frac{PB \cdot SA}{CA} - SB$ . (Ceci se rapporte à l'article 1240).

3271. Pour prouver que dans l'ellipse on a  $SM + FM = 2a$ , comme je l'ai supposé; il suffit de faire voir que cette supposition seule conduit à l'équation de l'ellipse; or  $\frac{ex}{a}$  qu'on a déduit de cette supposition, étant mis à la place de  $z$  dans la première équation donnée par le triangle rectangle, on a  $y^2 = a^2 + \frac{ee \cdot xx}{aa} - ee - xx$ ;

Fig. 285. donc  $aa y = a^4 + e e x x - a a e e - a^2 x^2$ , ce qui revient à cette proportion  $aa : aa - ee$  (ou  $bb$ ) ::  $aa - x x : y^2$ ; propriété primitive de l'ellipse (3254).

3272. Si l'on tire au point  $V$ , un rayon vecteur  $SV$ , un diamètre  $VCn$ , est un diamètre conjugué  $CI$ , ce dernier intercepte sur le rayon vecteur  $SV$  une partie  $Vq$  égale à  $AC$ . En effet, ayant tiré  $Fh$  parallèle au diamètre  $CI$ , l'on aura  $FV = Vh$ , puisque les angles  $FVu$ ,  $SVN$  sont égaux par la propriété des foyers de l'ellipse, & par conséquent leurs alternes  $F$  &  $h$ ; mais à cause des triangles semblables  $SCq$ ,  $SFh$ , dans lesquels  $SC = CF$ , on a aussi  $Sq = qh$ , donc  $Vq$  est égal à la demi-somme de  $FV$  &  $Vh$ , plus la moitié de  $Sh$ , c'est-à-dire, à la moitié de  $FV$  & de  $VS$ , ou à la moitié du grand axe.

3273. Le rayon vecteur  $SM = \frac{PB \cdot SA}{CA} - SB$  (3270)

peut aussi s'exprimer par  $SM = PS + \frac{CS \cdot PB}{CA}$  (3102); car  $PB \cdot (SA - CS)$ , c'est-à-dire,  $PB \cdot CA$  est la même chose que  $CA \cdot (PS + SB)$ ; donc  $PB \cdot SA - SB \cdot CA = CA \cdot PS + CS \cdot PB$ , ou  $\frac{PB \cdot SA}{CA} - SB = PS + \frac{CS \cdot PB}{CA}$ .

Fig. 287. 3274. La normale  $FN$  (fig. 287) est égale à  $\frac{b}{a^2}$

$\sqrt{a^4 - a^2 x x + b^2 x x}$ ; car dans le triangle  $NFQ$  rectangle en  $F$ ,  $QR : RF :: RF : RN$ , ou  $\frac{aa - x x}{x} : \frac{b}{a} \sqrt{aa - x x}$

Sous-normale. ::  $\frac{b}{a} \sqrt{aa - x x} : \frac{b b x}{a^2}$ ; c'est la valeur de la sous-normale dont nous ferons usage (3582).

Dans le triangle rectangle  $NFR$ ,  $FN^2 = \sqrt{FR^2 + RN^2}$   
 Normale.  $= \sqrt{\frac{b^2}{a^2} (aa - x x) + \frac{b^4 x^2}{a^4}} = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - a^2 x x + b^2 x x}$ .  
 Nous en ferons bientôt usage (3276).

3275. Si de l'extrémité  $F$  d'un diamètre  $FC$  l'on abaisse une perpendiculaire  $FH$  sur son diamètre conjugué  $ECHD$ , & que l'on nomme  $m$  &  $n$  le sinus & le cos. de l'angle  $DCL$ , on aura  $CH$ ,  $FH = m n (aa - bb)$ . Car  $RN = \frac{b b x}{a a}$  (3274); donc  $CN = x - \frac{b b x}{a a}$ . Mais  $CQ = \frac{a x}{n}$  (3259),  
 donc

donc  $CN.CQ = aa - bb$ . Dans le triangle  $CNH$  rectangle en  $H$ ,  $CN : CH :: 1 : \sin$ .  $CAH$  ou au cosinus  $n$  de l'angle  $HCN$ ; de même  $CQ : CT$  ou  $FH :: 1 : m$ ; ainsi l'on a ces deux proportions;  $1 : n :: CN : CH$ , &  $1 : m :: CQ : FH$ ; multipliant terme à terme,  $1 : mn :: CN.CQ$ , (ou  $aa - bb$ )  $: CH.FH$ ; donc enfin  $CH.FH = mn(aa - bb)$  art. 3538.

3276. Le rayon osculateur ou le rayon de la développée dans une ellipse est égal au cube de la normale divisé par le quart du carré du paramètre. Soit  $FP$  (fig. 286) le diamètre du cercle  $FSP$ , qui touche l'ellipse en  $F$  & se confond avec elle plus qu'aucun autre cercle,  $FCV$  le diamètre de l'ellipse qui passe au point de contact, & qui est coupé en  $S$  par le cercle osculateur;  $DFM$  est un arc infiniment petit, ou supposé assez petit pour être commun au cercle & à l'ellipse; cette supposition va nous servir à trouver la valeur du diamètre  $FP$ , parce que ce cercle qui a une ordonnée infiniment petite, commune avec l'ellipse, & répondante à une même abscisse  $FO$  la touche au point  $F$  sans la couper; ce cercle a au moins trois points communs avec l'ellipse; tout cercle plus grand ou plus petit sortiroit de l'ellipse ou rentreroit au dedans. Par la propriété des cordes qui se coupent dans un cercle, on a  $MO.O D = FO.OS$ , & parce que  $MO = O D$ , l'ordonnée de l'ellipse étant coupée en deux parties égales par le diamètre  $FC$ ,  $MO^2 = FO.OS$ ; mais par la propriété des diamètres de l'ellipse  $MO.O D$  ou  $FO.OS : FO.O V :: CE^2 : CF^2$  (3257); donc  $OS : O V :: CE^2 : CF^2$ , ou bien  $FS : FV$  ou  $2 CF :: CE^2 : CF^2$ , donc  $FS = \frac{2.CE^2}{CF}$ , c'est-à-dire, au paramètre du diamètre  $FCV$  (3254); ainsi le cercle osculateur intercepte toujours sur le diam.  $FV$  de l'ellipse une partie  $FS$  égale au paramètre de ce diam.

Pour trouver la valeur de  $FP$  l'on considérera que  $FH : FC :: FS : FP$ , donc  $FP = \frac{2.CE^2}{FH}$ ;  $FH^2 : CA^2 :: CB^2 : CE^2$  (3262),  $FH^2 : CA^2 :: FH.FN : CE^2$  (3260);  $CE^2 = \frac{CA^2.FN}{FH}$ , donc  $\frac{1}{2} FP$  ou  $\frac{CE^2}{FH}$  est égal à  $\frac{CA^2.FN}{FH^2}$ ; mais le pa-

Fig. 286.

# 466 ASTRONOMIE, LIV. XXI.

Fig. 286. ramètre  $p$  de l'axe  $AY = \frac{CB^2}{CA}$  (3254), donc  $\frac{1}{2}p \cdot CA = CB^2 = FH \cdot FN$  (3260);  $FH = \frac{p \cdot CA}{2FN}$ ,  $FH^2 = \frac{pp \cdot CA^2}{4FN^2}$ ;  $\frac{1}{2}FP$ , qui est  $= \frac{CA^2 FN}{FH^2}$ , est donc aussi  $= \frac{4 \cdot A^2 FN^3}{pp \cdot CA^2} = \frac{FN^3}{\frac{1}{4}pp}$ , c'est-à-dire,  $\frac{4b^4}{pp} \sqrt{1 - xx + bbxx^3}$  (3274) &c mettant

$4b^4$  à la place de  $pp$ ,  $\frac{1}{8} (1 - xx + bbxx^3)^{\frac{3}{2}}$ . Au sujet des rayons osculateurs on peut voir M. de l'Hôpital : *Analyse des inf. petits*, art. 89. M. Euler *Introduct. in analysim infinitorum*, Tom. II. art. 317. Le P. Boscovich, *Sectionum conicarum elementa*, art. 523. Nous avons fait usage de cette expression, pour trouver l'aplatissement de la terre (2676).

Fig. 285. Variation de l'ellipse.

3277. L'équation de l'ellipse, entre le rayon vecteur & l'anomalie vraie (1234), est celle dont on fait usage dans les calculs de l'attraction (3465, 3493). Dans une ellipse dont le demi-axe est  $a$ , l'anomalie  $MSA = u$ , le rayon vecteur  $SM$  (fig. 285)  $= r$ , l'excentricité  $CS = e$ , le demi-paramètre  $= p, = \frac{bb}{a} = \frac{aa - ee}{a}$ , l'on a  $\frac{p}{r} = \frac{a - e \cos u}{a}$ .

En effet, soit prise  $CK = \frac{aa}{e}$ , on aura  $KB = \frac{aa}{e} + x = \frac{aa + ex}{e} = MH$ ;  $SK = \frac{aa}{e} - e = \frac{aa - ee}{e} = \frac{ap}{e}$ ; mais  $SM = \frac{aa + ex}{a}$  (3270), &  $\frac{aa + ex}{a} : \frac{aa - ee}{e} :: e : a$ , donc  $SM : MH :: e : a$ , ou  $r = \frac{e}{a} MH$ ; mais  $MH = SB + SK = r \cos u + \frac{aa - ee}{e}$ , donc  $r$  ou  $\frac{e}{a} MH = \frac{aa - ee + er \cos u}{a}$ ,  $\frac{ar - er \cos u}{a} = \frac{aa - ee}{a} = p$ , donc  $\frac{p}{r} = \frac{a - e \cos u}{a}$ .

3278. Cette expression donne la valeur du rayon vecteur  $r$  en parties du demi-axe, ou de la dist. moy.  $a$  qui est prise pour unité, car  $r = \frac{ap}{a - e \cos u}$ . Supposons  $u = 90^\circ$ , on aura  $r = p$ , c'est-à-dire, qu'alors le rayon vecteur est égal au demi-paramètre de l'ellipse; ce qui est connu d'ailleurs, puisque l'ordonnée entière au foyer d'une section conique est toujours égale au paramètre.

3279. Si l'on vouloit supposer le demi-axe = 1, l'on trouveroit  $r = \frac{p}{1 - e \cos. u} = \frac{1 - ee}{1 - e \cos. u}$ , c'est le rayon vecteur, & l'équation de l'orbite devient  $\frac{p}{r} = 1 - e \cos. u$ .

3280. Si au lieu de l'angle  $u$  qui exprime l'anomalie vraie, on substitue l'angle compté d'un autre point quelconque, éloigné de l'apside, d'une quantité  $m$ , l'anomalie vraie étant  $u - m$ , il faudra mettre  $u - m$  à la place de  $u$ ; l'on aura (3620),  $\frac{p}{r} = 1 - e \cos. u \cos. m - e \sin. m \sin. u$ , & faisant les constantes  $e \cos. m = h$ ,  $e \sin. m = g$ , on trouvera  $\frac{p}{r} = 1 - h \cos. u - g \sin. u$ , c'est la forme sous laquelle on l'emploie dans le calcul des attractions (3459), l'apside étant immobile.

3281. Si dans le même temps que la planète décrit un angle  $u$  la ligne des apsides avançoit elle-même, c'est-à-dire, si l'apside étoit mobile, & que son mouvement fût à celui de la planète, comme  $1 - m$  est à 1, le mouvement de la planète étant  $u$ , celui de l'apside seroit  $u - mu$ ; l'anomalie vraie de la planète dans son ellipse mobile seroit  $mu$ , & l'équation de l'ellipse mobile  $\frac{p}{r} = 1 - e \cos. mu$ ; on en fait usage dans certains cas (3512).

3282. LA SECTION oblique d'un sphéroïde elliptique aplati, tel que la terre, est toujours une ellipse. Soit  $GF$  (fig. 288), le diamètre de l'équateur,  $AR$  le diamètre de la section oblique  $AOR$  dont on cherche la nature,  $BD$  un diamètre de l'ellipse tiré parallèlement à la section  $AR$ ;  $MN$  le diamètre d'un parallèle  $MON$ ;  $PO$  une ordonnée commune au cercle  $MON$  & à la courbe  $ROA$ . Par la propriété du cercle l'on a  $MP \cdot PN = PO^2$ , mais par la propriété de l'ellipse  $GP \cdot PR : M'P \cdot PN :: QD^2 : GQ^2$ , (3258) donc  $AP \cdot PR : PO^2 :: QD^2 : GQ^2$ , c'est-à-dire, en raison constante, quelle que soit la situation du point  $P$  sur la ligne  $AR$ ; donc la courbe  $AOR$  est une ellipse semblable à celle qui passe par  $BD$ . Cette proposition est nécessaire dans les recherches de la figure de la terre (3580).

Equation plus générale.

Equation de l'ellipse mobile.

Section d'un sphéroïde.

Fig. 288.

175. 188.

Cette proposition a lieu pour les cas même, où le plan de section n'est point parallèle à l'axe, ni perpendiculaire au plan de l'équateur; mais la proposition suivante est limitée à un plan de section parallèle au petit axe du sphéroïde, ou à l'axe du monde.

3 2 8 3. La section d'un sphéroïde aplati tel que la terre, parallèlement au méridien est une ellipse semblable au méridien. Car si la ligne  $AR$  devient perpendiculaire à  $GQF$ , le rapport de  $GQ^2$  à  $DQ^2$  deviendra celui du carré du grand axe au carré du petit axe; donc dans la section  $AOR$ , lorsque  $AR$  sera parallèle à l'axe du monde le rapport des axes sera le même que dans l'ellipse  $GDF$ .

3 2 8 4. Delà il suit que la section d'un sphéroïde elliptique est toujours semblable à l'ellipse du méridien pourvu que le plan de cette section soit perpendiculaire au plan de l'équateur, car alors il fera toujours parallèle à quelqu'un des méridiens; c'est ce que suppose M. Clairaut, dans sa figure de la terre, pag. 181.

*De l'Arithmétique des Infinis, ou du Calcul des suites.*

Puissances  
d'un binôme.

3 2 8 5. Le carré d'un binôme  $a + b$  est  $a^2 + 2ab + b^2$ , son cube est  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ , & si l'on continue à chercher les puissances de ce binôme en multipliant continuellement par  $a + b$ , on remarquera bientôt que les puissances de  $a$  vont toujours en diminuant d'une unité,  $a^3, a^2$ , &c. que celles de  $b$  vont toujours en augmentant,  $b, b^2, b^3$ , &c. que les coefficients de ces différens termes sont les lignes verticales du triangle arithmétique, dont M. Pascal donna la description en 1654.

Élévation  
des puissances.

3 2 8 6. RÈGLE GÉNÉRALE pour élever un binôme  $a + b$  à une puissance quelconque  $m$ . On mettra d'abord les puissances de  $a$ , ou du premier terme, dans cet ordre,  $a^m, a^{m-1}, a^{m-2}$ , &c. en diminuant toujours l'exposant d'une unité à chaque terme; 2°. l'on écrira les puissances de  $b$  ou du second terme, dans cet ordre,



1,  $b$ ,  $b^2$ ,  $b^3$ , &c. en augmentant toujours l'exposant d'une unité; 3°. on écrira les exposans dans cet ordre, 1,  $m$ ,  $\frac{m(m-1)}{1.2}$ ,  $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$ ,  $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$ , & ainsi de suite.

3287. Ce théorème de Newton est d'un usage immense dans tous les calculs de l'attraction, & il faut avoir la règle suivante très-familière quand on veut s'occuper de pareilles recherches :  $(a + b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3$ , &c.

3288. Pour exprimer la quantité  $\frac{1}{1+2\beta}$  (2679) dans laquelle  $\beta$  est une fraction très-petite, on peut considérer cette quantité, comme si c'étoit  $1 + 2\beta$  élevé à la puissance  $-1$ , suivant le calcul des exposans qui fut donné par Wallis, en 1655, (*Arithmet. infinit.*); si l'on y applique la formule précédente, on trouvera  $1 - 2\beta$ , en négligeant les termes suivans. On auroit la même chose en faisant la division à la manière ordinaire.

On trouve par les mêmes principes que la différence des carrés est double de celle des racines, quand la différence est fort petite (2676); car le carré de  $1 + a$  est  $1 + 2a$ , en négligeant  $a^2$  qui est le carré d'une fraction très-petite, & par conséquent encore plus négligeable.

3289. Pour élever à la puissance  $-\frac{1}{2}$  le binôme  $1 + (mm-1)ss$ , dont nous avons fait usage (2676), on emploie la formule 3287; les puissances du premier terme sont toutes égales à 1, celles du second terme sont  $(mm-1)ss$ ,  $(mm-1)^2 s^4$ , &c.; les coefficients sont, 1,  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ , ou  $+\frac{1}{8}$ , &c. donc le binôme  $(1 + (mm-1)ss)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(mm-1)ss + \frac{1}{8}(mm-1)^2 s^4$ , &c.

3290. Cette règle générale pour l'élévation des puissances nous sert à exprimer le côté d'un triangle rectiligne, dont on connoît les deux autres côtés & l'angle compris, ce qui est d'un grand usage pour le calcul des forces attractives des planètes (3485). Soit le triangle  $RTS$  (fig. 290), dont on connoît le côté  $ST = r$ , le côté

Calcul des exposans.

Trouver le troisième côté d'un triangle.

Fig. 290.

Fig. 290.  $SR=f$  & l'angle compris  $RST=t$ , on demande le côté  $RT=s$ , & la valeur de  $\frac{1}{s^3}$ . Je suppose d'abord que  $RT=s=\sqrt{f^2-2fr\cos.t+r^2}$  (3637),  $s^3=(f^2+r^2-2fr\cos.t)^{\frac{3}{2}}$ , donc  $\frac{1}{s^3}=(f^2+r^2-2fr\cos.t)^{-\frac{3}{2}}$ , qu'il faut développer en une suite de termes où il n'y ait que  $\cos.t$ ,  $2t$ ,  $3t$ , &c. (*Mém. acad.* 1758, pag. 15). Voici une manière de le faire, adaptée aux usages de l'attraction; mais dans laquelle je suppose  $f$  beaucoup plus grand que  $r$ .

Pour réduire ce trinôme à la formule générale (3287); soit  $2fr\cos.t-r^2=a$ , en sorte que  $\frac{1}{s^3}=(f^2-a)^{-\frac{3}{2}}$ , & en élevant  $f^2-a$  à la puissance  $-\frac{3}{2}$ , l'on aura, par la règle générale  $\frac{1}{s^3}=\frac{1}{f^3}+\frac{3a}{2f^5}+\frac{15a^2}{8f^7}+\frac{35a^3}{16f^9}+\frac{315a^4}{128f^{11}}$ , &c. On substituera pour  $a$ ,  $a^2$ ,  $a^3$  leurs valeurs; d'abord pour  $a$  la valeur  $2fr\cos.t-r^2$ ; pour  $a^2$  l'on aura  $4f^2r^2\cos.t^2-4fr^3\cos.t+r^4$ ; mais  $\cos.t^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos.2t$  (3627); ainsi  $a^2=2f^2r^2+2f^2r^2\cos.2t-4fr^3\cos.t+r^4$ . De même  $a^3=8f^3r^3\cos.t^3-12f^2r^4\cos.t^2+6fr^5\cos.t-r^6$ , mais  $\cos.t^3=\frac{3}{4}\cos.t+\frac{1}{4}\cos.3t$  (3631), donc  $a^3=6f^3r^3\cos.t+2f^3r^3\cos.3t-6f^2r^4+6f^2r^4\cos.2t+6fr^5\cos.t-r^6$ . L'on trouvera aussi  $a^4=16f^4r^4\cos.t^4-32f^3r^5\cos.t^3+24f^2r^6\cos.t^2-8fr^7\cos.t+r^8$ ; mais  $\cos.t^4=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos.2t+\frac{1}{8}\cos.4t$  (3632); substituant cette valeur, aussi bien que celles de  $\cos.t^3$  &  $\cos.t^2$ , l'on a  $a^4=6f^4r^4+8f^4r^4\cos.2t+2f^4r^4\cos.4t-24f^3r^5\cos.t$ . Je néglige les cinq autres termes qui sont plus petits, parce qu'ils sont multipliés par de plus hautes puissances de  $r$  & de moindres puissances de  $f$ , & que je suppose  $f$  beaucoup plus grand que  $r$ ; ces valeurs de  $a$ ,  $a^2$ , &c. substituées dans la série  $\frac{1}{f^3}+\frac{3a}{2f^5}$ , &c. donnent  $\frac{1}{s^3}=\frac{1}{f^3}+\frac{9r^2}{4f^5}+\frac{225r^4}{64f^7}+(\frac{3r}{f^3}+\frac{45r^3}{8f^5})\cos.t+(\frac{15r^2}{4f^5}+\frac{105r^4}{16f^7})\cos.2t+\frac{35r^3}{8f^6}\cos.3t+\frac{315}{64}\cdot\frac{r^4}{f^7}\cos.4t$ .

Les coefficients, tels que  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 4}$ , &c. sont formés de l'addition des différentes fractions, qu'il faut ajouter ou soustraire suivant les signes; ainsi parmi les termes  $\frac{r^4}{f^7}$  on trouvera  $\frac{15}{8} - \frac{105}{8} + \frac{6 \cdot 3 \cdot 15}{1 \cdot 8} - \frac{120}{6 \cdot 4} + \frac{840}{6 \cdot 4} - \frac{6 \cdot 3 \cdot 5}{6 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 5}{6 \cdot 4} \frac{r^4}{f^7}$ , & ainsi des autres. Si l'on pouvoit plus loin les termes où se trouve  $\cos. 4t$ , on auroit des termes divisés par  $f^9$ , qui deviennent beaucoup moindres, pourvu qu'on suppose que  $f$  soit 5 à 6 fois plus grand que  $r$ , comme dans l'art. 3485.

3291. LE RETOUR DES SUITES est la méthode qui enseigne à dégager l'inconnue d'une série; je suppose qu'on ait une série  $z = ay + by^2 + cy^3 + ey^4$ , &c. on peut en trouver la racine  $y$ , par la méthode des indéterminées. Supposons la quantité  $y = hz + iz^2 + kz^3 + lz^4$ , on prendra le carré & le cube de cette série, en négligeant les puissances qui sont au-dessus de  $z^6$ , on les substituera dans  $z = ay + by^2 + cy^3$ , &c. & l'on aura une nouvelle série composée de  $z$ , & de ses puissances; tous les termes de cette série qui renfermeront  $z$ , sont égaux au coefficient indéterminé  $h$ , tous ceux qui renferment  $z^4$  sont égaux à  $i$ , &c.; ce qui donnera autant d'équations qu'il y a de coefficients indéterminés dans  $hz + iz^2$ , &c. l'on en déduira la valeur de ces coefficients, & l'on aura

$$y = \frac{a}{z} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - a^2e}{a^7} z^4 +$$

Retour des suites.

$\frac{14b^4 + 6a^2bce - 21ab^2c + 3a^2c^2 - a^3f}{a^9} z^5$ , &c. Jen'entre pas dans le détail de ce calcul, on le peut voir dans les *Elemens de Mathémat.* de Wolf. &c. Je ne l'indique ici que pour servir à trouver les sinus (3315).

3292. PROBLEME. Résoudre l'équation  $x = u + a \sin. mu$ , ou trouver la valeur de  $u$  en  $x$ , dans la supposition que  $a$  est une fraction assez petite, comme  $\frac{1}{10}$  ou 0, 1.

SOLUTION. supposons pour une première approximation que  $u$  soit égale à  $x$ , puisqu'elles diffèrent peu l'une de l'autre, le terme  $a \sin. mu$  étant très-petit; cette supposition nous donnera une valeur de  $u$ , & substituant cette

valeur de  $u$  dans le petit terme  $a \sin. mu$ , il en résultera une erreur encore plus petite dans la valeur de  $u$ , puisqu'elle ne fera que la dixième partie du petit terme  $a \sin. mu$ ; en supposant donc  $x = u$ , on a  $x = u + a \sin. mx$ , ou  $u = x - a \sin. mx$ ,  $mu = mx - ma \sin. mx$ ; donc  $u = x - a \sin. (mx - ma \sin. mx)$ . Pour rendre ce second terme plus simple, on mettra sa valeur (3619),  $\sin. mx \cos. (ma \sin. mx) - \cos. mx \sin. (ma \sin. mx)$ ; on supposera aussi le cosinus du petit arc  $ma \sin. mx$  égal à l'unité, & le sinus égal à l'arc lui-même, car il n'en diffère que d'une quantité où entre le cube de la petite fraction  $a$  (3315), de sorte que si  $a = \frac{1}{10}$ , on a  $a^3 = \frac{1}{1000}$ , ce qui rend la différence de cet arc à son sinus, mille fois plus petite que l'arc; nous pouvons donc supposer que le sinus est égal à l'arc lui-même, & au lieu de  $\sin. (ma \sin. mx)$  mettre seulement l'arc  $ma \sin. mx$ ; en faisant ces deux substitutions, nous aurons  $u = x - a \sin. mx + ma^2 \cos. mx \sin. mx$ , donc  $u = x - a \sin. mx + \frac{ma^2}{2} \sin. 2mx$  (3625).

3293. Cette seconde valeur de  $u$  en  $x$  approche encore plus de la vérité, puisqu'on n'y a pas même négligé le terme qui renferme  $a^2$  ou qui est dix fois plus petit que celui qui renferme seulement  $a$ . Si l'on substituoit cette valeur de  $u$  & du sinus de  $mu$ , dans le second terme de l'équation donnée  $x = u + a \sin. mu$ , on auroit une troisième approximation dans laquelle se trouveroient même les termes qui renferment  $a^3$ , ou le cube de la petite fraction  $a$ .

M. Clairaut trouve qu'on auroit dans ce cas-là  $u = x - a(1 - \frac{m^2 a^2}{8}) \sin. mx + \frac{1}{2} a^2 m \sin. 2mx - \frac{1}{8} a^3 m^2 \sin. 3mx$  (*Pièce sur la Théorie de la Lune*, art. xxxi). Il résout dans le même endroit l'équation plus compliquée  $x = u + a \sin. mu + b \sin. pu + c \sin. qu$ , & elle lui est nécessaire pour la théorie de la lune où il y a trois termes assez considérables (3479); on peut voir de plus grands détails sur cette espèce d'équations dans les *Mémoires de l'académie* 1760, pag. 325, à l'occasion de mes calculs sur les inégalités de Vénus, produites par l'attraction de la terre.

## Du calcul différentiel &amp; Intégral.

3294. L'USAGE que nous ferons dans ce livre-ci, & dans le suivant du calcul des infiniment petits, exigeroit que nous en donnassions ici quelques notions, comme nous l'avions fait dans la première édition de cet ouvrage; mais l'abondance des matières nous oblige à renvoyer pour celle-ci aux traités de calcul différentiel de M. le Marquis de l'Hôpital, de M. Euler, &c. Nous nous contenterons de rappeler ici les règles générales, & les applications dont nous avons besoin.

Si l'on appelle  $x$  une quantité variable quelconque, &  $dx$  une augmentation infiniment petite, qu'on appelle sa différentielle, celle de  $mx$  fera  $mdx$ , celle de  $x^m$  fera  $m x^{m-1} dx$ . Pour avoir la différentielle du produit de deux quantités  $x$  &  $y$ , il n'y a qu'à mettre  $x + dx$  à la place de  $x$ , &  $y + dy$  à la place de  $y$ , multipliant les quantités ainsi augmentées, on a  $xy + xdy + ydx + dx dy$ , il faut rejeter  $dx dy$  comme étant infiniment plus petit que  $dx$  & que  $dy$ ; ainsi le produit  $xy$  a augmenté de  $xdy + ydx$ ; c'est donc-là sa différentielle. D'où suit la règle générale pour différentier un produit. *Multipliez chacune des quantités par la différentielle de l'autre, & prenez la somme des produits.*

Différentier  
un produit.

Les différences secondes, telles que  $ddx$ , se traitent de la même manière que les différences premières, on en verra divers exemples.

3295. La même règle sert à différentier  $\frac{x}{y}$  qui revient à  $xy^{-1}$ , suivant le calcul des expofans; la différentielle est donc  $y^{-1} dx - xy^{-2} dy$ , ou  $\frac{dx}{y} - \frac{x dy}{y^2}$ , ou  $\frac{y dx - x dy}{y^2}$ .

Différentier  
une fraction.

De la même manière l'on pourra différentier une quantité fractionnaire, telle que  $\frac{f^1 dr}{M r r}$  (3454), & l'on trouvera  $\frac{f^1 ddr}{S r r} - \frac{2 S r dr f^1 dr}{S^2 r^4}$  ou  $\frac{f^2 ddr}{S r^2} - \frac{2 f^1 dr^2}{S r^3}$ .

474 ASTRONOMIE, Liv. XXI.

3296. Si le rapport de deux quantités  $x$  &  $y$  est constant, les différentielles de ces deux quantités seront encore dans le même rapport; car alors il faut que ces deux variables, avec leurs augmentations, aient encore le même rapport, ou que  $x+dx$  soit à  $y+dy$ , comme  $x$  est à  $y$ ; donc  $x+dx : y+dy :: x : y$ , ou  $dx : dy :: x : y$ . Si le rapport de  $x$  à  $y$  est égal à une quantité constante  $a$ , & qu'on ait  $\frac{x}{y} = a$ , on aura  $x = ay$  &  $dx = a dy$  (3294); donc  $\frac{dx}{dy} = a$ . Nous en ferons usage, art. 3837.

3297. La différentielle de  $\sqrt{1+x}$ , ou d'une quantité irrationnelle quelconque, se trouve en la réduisant à une quantité rationnelle: supposons  $\sqrt{1+x} = y$ , & cherchons la différentielle de  $y$ ; nous aurons  $1+x = y^2$ ,  $dx = 2y dy$  (3304),  $dy = \frac{dx}{2y} = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}}$ .

3298. La différentielle de  $\frac{1}{2} x x \sqrt{x}$ , ou  $\frac{1}{2} x^{\frac{5}{2}} dx$ , est  $\frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x} dx$ . De même la différentielle de  $\frac{4}{3} b x \sqrt{x}$  ou  $\frac{4}{3} b x^{\frac{3}{2}}$  est  $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} b x^{\frac{1}{2}} dx$  ou  $2b \sqrt{x} dx$ ; on s'en sert quelquefois pour trouver l'attraction d'un sphéroïde.

3299. On trouve, par cette méthode, que la différentielle de  $\sqrt{1+xx}$  est  $\frac{x dx}{\sqrt{1+xx}}$ , & que celle de  $\sqrt{1-xx}$  est  $\frac{-x dx}{\sqrt{1-xx}}$ ; la différentielle de  $\frac{a}{\sqrt{1-x}}$  est  $\frac{adx}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ , & celle de  $x\sqrt{1-xx}$  est  $dx\sqrt{1-xx} - \frac{xx dx}{\sqrt{1-xx}}$ .

De-là il suit que la différentielle de  $\sqrt{f^2 + \int \pi r^3 du}$  (3452) est  $\frac{\pi r^3 du}{\sqrt{f^2 + \int \pi r^3 du}}$ , car il n'y a qu'à mettre dans l'expression  $\sqrt{1-xx}$ ,  $f^2$  au lieu de 1, &  $2\int \pi r^3 du$  à la place de  $xx$ . Nous ferons voir bientôt que la diffé-

rentielle de  $2\pi r^2 du$  n'est autre chose que  $2\pi r^2 du$  (3301).

Lorsqu'une quantité qui a augmenté jusqu'à un certain terme est prête à diminuer, c'est-à-dire, qu'elle est arrivée à son *maximum*, elle cesse d'augmenter, alors sa différentielle est nulle ou égale à zéro; c'est en quoi consiste la règle de *maximis & minimis*, dont nous ferons usage plus d'une fois.

3300. LE CALCUL INTÉGRAL est l'inverse du calcul différentiel : nous avons supposé que  $dx$  étoit la différentielle de  $x$  (3294), nous dirons ici que l'intégrale de  $dx$  est  $x$ . On dira de même que l'intégrale de  $m x^{m-1} dx$  est  $x^m$ , d'où suit la règle suivante pour intégrer les quantités où il n'y a qu'une simple puissance de l'inconnue  $x$  : augmentez d'une unité l'exposant de l'inconnue  $x$ , & divisez-la par cet exposant ainsi augmenté, & par  $dx$  :

Règle d'intégration.

Trouver l'intégrale d'une quantité comme  $m x^{m-1} dx$ , C'est trouver le rapport qu'il y a entre  $x$  & la quantité qui a produit  $m x^{m-1} dx$  par son petit accroissement; nous connoissons la relation des différentielles ou des petits accroissemens, & nous en voulons conclure celle des quantités finies qui ont reçu ces petits accroissemens; cela est extrêmement utile dans les calculs de l'attraction, parce que le petit accroissement de distance ou de vitesse que produit une certaine attraction se trouve facilement, mais le total de la quantité, à laquelle appartient ce petit accroissement, seroit impossible à trouver sans les règles de ces petits accroissemens. V. le *Traité du calcul intégral* par M. de Bougainville, en 2 vol. in-4°. 1754 & 1756 (chez Defaint & Saillant); on doit consulter aussi l'ouvrage de M. Euler, qui a pour titre *Institutionum calculi integralis, vol. I. & II. Petropoli, 1768, 542 pag. in-4°*; les traités des Fluxions de Newton, de Mac-laurin, & de Simpson; l'analyse démontrée du P. Reynau, & les leçons que Jean Bernoulli composa en 1691, (*Bern. opera. tom. III. pag. 388*); le calcul intégral du P. Jacquier, & du P. le Seur, celui du P.

Utilité du calcul intégral.

Riccati, les opusculs de M. d'Alembert, le recueil des mémoires de M. Fontaine, les mémoires de l'académie des sciences de Paris; ceux Berlin, de Pétersbourg, de Turin.

3301. Quand on ne peut intégrer une différentielle; on se contente d'indiquer son intégrale, & cela se fait par le moyen de la lettre  $\int$ ; ainsi l'intégrale de  $r^3 du$  est  $\int r^3 du$ ; & par la même raison la différentielle de  $\int r^3 du$  seroit  $r^3 du$  tout simplement, comme nous l'avons supposé (3299).

Pour avoir l'intégrale de  $\frac{aa-xx}{aa} \cdot \frac{xxdx}{a}$ , il suffit d'achever la multiplication qui n'est qu'indiquée, & l'on aura  $\frac{xxdx}{a} - \frac{x^4 dx}{a^2}$ , dont l'intégrale est  $\frac{x^3}{3a} - \frac{x^5}{5a^2}$  (3300); si l'on fait  $x=a$ , elle deviendra  $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{5}a^3 = \frac{2}{15}a^3$ , c'est l'intégrale de  $\frac{aa-xx}{aa} \cdot \frac{xxdx}{a}$  pour le cas où  $x=a$ .

Autres formules différentielles.

3302. Suivant la règle donnée pour les fractions (3295), la différentielle de  $\frac{fdr\sqrt{1+2\rho}}{rrdu}$  (3453), en supposant  $du$  constant, sera composée de trois termes; 1°. la différentielle de  $dr$  qui est  $ddr$ , multipliée par tout le reste de la quantité donnée; 2°. la différentielle de  $\sqrt{1+2\rho}$  qui est  $\frac{d\rho}{\sqrt{1+2\rho}}$  (3297) multipliée par tout le reste de la quantité; 3°. la différentielle de  $\frac{1}{rrdu}$  qui est  $-\frac{2rdrdu}{r^3du^2}$  (3295) multipliée par  $fdr\sqrt{1+2\rho}$ ; la différentielle totale sera  $\frac{fdr\sqrt{1+2\rho}}{rrdu} + \frac{fd\rho}{rrdu} \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{1+2\rho}} - \frac{2fdr^2du\sqrt{1+2\rho}}{r^3du^3}$ .

3303. La différentielle de  $\frac{1}{2}(\int \pi r dx)^2$  se trouvera par la règle ordinaire (3294), en multipliant la quantité donnée par son exposant 2, diminuant l'exposant lui-même d'un, & multipliant encore par la différentielle de l'inconnue simple  $\int \pi r dx$ , qui est  $\pi r dx$  (3301); on aura donc  $\pi r dx \int \pi r dx$  pour la différentielle de  $\frac{1}{2}(\int \pi r dx)^2$  (3452).



3304. La différentielle d'une quantité comme  $a+x$  composée d'une constante  $a$  & d'une variable  $x$ , est  $dx$  aussi bien que celle de la quantité  $x$  toute seule; la constante n'y entre pour rien; ainsi quand on a une différentielle  $dx$ , son intégrale est  $x$ , mais en général cette quantité  $x$  doit être augmentée de quelque constante  $a$  pour exprimer la quantité que l'on cherchoit, c'est-à-dire,  $a+x$ ; ordinairement les conditions & les circonstances d'un problème déterminent la constante qu'il faut ajouter à l'intégrale.

Compléter une intégrale.

3305. Souvent il arrive par la nature du problème que l'intégrale cherchée, doit être égale à zéro, quand l'inconnue elle-même s'évanouit; si l'on reconnoit que ce cas doit avoir lieu, on observera la règle suivante; quelques auteurs appellent cela en général compléter l'intégrale, mais improprement, puisque ce n'est que satisfaire à la condition particulière du problème. Après avoir intégré par les règles précédentes, on fera l'inconnue  $= 0$ ; si toute la quantité ne devient pas aussi  $= 0$ , qu'elle ait une valeur, on retranchera cette valeur de l'intégrale trouvée, & l'on aura l'intégrale complète; car puis qu'on est sûr que la quantité finie qui auroit produit la différentielle donnée, doit disparaître quand l'inconnue  $= 0$ ; il faut donc la rendre telle, & en ôter ce qui est nécessaire pour que le total s'évanouisse avec l'inconnue, si l'on veut avoir la quantité qui a dû produire la différentielle donnée: j'ai fait usage de cette règle dans les articles 2687, 3458, &c.

3306. Pour avoir l'intégrale de  $4s^3\sqrt{1-s s}ds$  (2687) il faut transformer cette différentielle en une quantité rationnelle, afin de pouvoir y appliquer la règle générale (3300); faisons donc  $\sqrt{1-s s} = z$ ;  $1-s s = z z$ ,  $s s = 1-z z$ ,  $s = \sqrt{1-z z}$ ,  $dz = \frac{-z dx}{\sqrt{1-z z}}$  (3298),  $4s^3 = 4(1-z z)\sqrt{1-z z}$ ; donc la différentielle proposée  $4s^3\sqrt{1-s s}ds = -4z^2 dz(1-z z) = 4z^4 dz$

# 478 ASTRONOMIE, LIV. XXI.

—  $4z^2 dz$ , dont l'intégrale  $(3300) = \frac{4}{3} z^3 - \frac{4}{3} z^3$ ; il faut y substituer les valeurs de  $z^3$  & de  $z^3$ , & l'on aura  $\frac{4}{3} (1 - ss)^2 \sqrt{1 - ss} - \frac{4}{3} (1 - ss) \sqrt{1 - ss}$ . Pour compléter cette intégrale  $(3305)$ , on fera  $s = 0$ , parce que l'on est sûr par la nature du problème que  $lh$  (*fig. 222*), c'est-à-dire, la valeur que l'on cherche, est nulle quand  $s = 0$ ; alors l'intégrale deviendra  $\frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{8}{3}$ ; cela prouve qu'il faut l'augmenter de  $\frac{8}{3}$ ; par ce moyen l'on aura l'intégrale complète, c'est-à-dire, celle qui disparaîtra entièrement quand  $s$  fera nulle,  $= \frac{4}{3} (1 - ss)^2 \sqrt{1 - ss} - \frac{4}{3} (1 - ss) \sqrt{1 - ss} + \frac{8}{3}$ .

Différentiel-  
les des sinus.

*Fig. 293.*

3307. Le plus grand usage que nous fassions du calcul intégral est pour les sinus. Supposons qu'un arc  $x$  augmente ou diminue d'une quantité infiniment petite  $dx$ , alors son sinus augmentera ou diminuera d'une quantité  $dx \cos x$ ; c'est-à-dire, que  $d \sin. x = dx \cos. x$ . Soit un arc  $AB$  (*fig. 293*), dont le sinus est  $BD$ , le cosinus  $DC$ , la différentielle  $BE$ ; le sinus diminuera de la quantité  $BF$ , lorsque l'arc diminuera de  $BE$ , & le cosinus croîtra de la quantité  $FE$ ; ainsi  $BF = d \sin. x$ ;  $FE = d \cos. x$ . Le triangle infiniment petit  $BEF$  est semblable au triangle  $BCD$ , car ils sont tous deux rectangles, & de plus l'angle  $FBE$  qui est le complément de  $CBF$  est égal à l'angle  $BCD$ ; donc  $BF : BE :: CD : BC$ ; c'est-à-dire,  $d \sin. x : dx :: \cos. x : 1$ , donc  $d \sin. x = dx \cos. x$ .

3308. On trouvera de même que  $d \cos. x = -dx \sin. x$ , car les triangles semblables  $BCD$ ,  $BEF$  donnent cette proportion  $FE : BE :: BD : BC$ , c'est-à-dire,  $+d \cos. x : -dx :: \sin. x : 1$ , donc  $d \cos. x = -dx \sin. x$ . Cette expression a un signe négatif, tandis que la précédente avoit un signe positif, parce que les cosinus changent en sens contraire des sinus, ils décroissent tandis que les arcs ou les sinus augmentent.

Connoissant la différentielle de  $\cos. x$ , on doit chercher celle de  $\cos. mx$  dont nous ferons un fréquent usage dans les calculs de l'attraction; la différentielle de  $x$  est  $dx$ , celle de  $mx$  est  $mdx$ ; au lieu de  $\cos. x$  nous aurons  $\cos.$

$mx$ , ainsi au lieu de l'expression trouvée ci-devant  $-dx \sin x$ , nous aurons  $d \cos. mx = -m dx \sin. mx$ . Par la même raison si l'on cherchoit la différentielle de  $+\frac{a}{m} \cos. mx$ , on auroit  $-a \sin. mx dx$ ; nous allons en tirer une règle générale, dont nous ferons souvent usage.

Pour intégrer une formule,  $a \sin. mx dx$ , qui renferme un sinus, il faut 1<sup>o</sup>, changer les signes, 2<sup>o</sup>, mettre  $\cosinus$  à la place de sinus, 3<sup>o</sup> diviser la formule par  $mdx$ ,  $m$  étant le multiple de  $x$  compris dans la formule, & l'on a l'intégrale cherchée  $-\frac{a}{m} \cos. mx$ .

Règle pour intégrer.

3309. Il est aisé de démontrer que l'intégrale de  $a \cos. mx dx$  sera  $\frac{a}{m} \sin. mx$ , car si l'on différentie cette expression on a  $\frac{a}{m} \cos. mx. m dx = a \cos. mx dx$  qui est la quantité proposée. Ainsi pour intégrer une formule qui renferme un cosinus il faut, sans changer les signes, mettre sinus à la place de cosinus, & diviser la quantité par  $mdx$ ; nous avons fait usage de ces formules dans les art. 1631, 3458, 3469, &c.

3310. La tangente  $AG$  (fig. 293), diminue de la quantité  $GH$ , quand l'arc diminue de la quantité  $BE$ ; pour exprimer cette différentielle  $GH$  de la tangente  $AG$ , on considérera que les triangles  $GHI$ ,  $CBD$  sont semblables; donc  $GH:IH::CB:CD$ , c'est-à-dire,  $GH:IH::1:\cos. x$ ; donc  $GH = \frac{IH}{\cos. x}$ . Les triangles, ou petits secteurs  $CBE$ ,  $CIH$  sont semblables; donc  $CB:BE::CI:IH$ , ou  $1:dx::\sec. x:IH$ , donc  $IH = dx \sec. x$ ; enfin,  $CD:CB::CA:CG$ , ou  $\cos. x:1::1:\sec. x$ , donc  $\sec. x = \frac{1}{\cos. x}$ ; donc  $IH (= dx \sec. x) = \frac{dx}{\cos. x}$ , & substituant cette valeur de  $IH$  dans la valeur de  $GH = \frac{IH}{\cos. x}$ , on a  $GH = \frac{\frac{dx}{\cos. x}}{\cos. x}$ ; donc  $d \text{ tang. } x = \frac{dx}{\cos. x^2}$ . On en verra l'usage (3458).

Fig. 293.

Différentielle de la tangente.

3311. J'ai supposé dans ces calculs que la ligne  $GI$  étoit parallèle à  $HE$  & que l'angle  $GHI$  étoit le complément de l'angle  $IGH$ ; ils ne diffèrent entre eux que par

l'angle infiniment petit  $ICH$ ; or toutes les fois qu'on compare entre elles deux quantités finies (telles que les angles finis  $G$  &  $H$ ), on néglige les quantités infiniment petites dont elles peuvent différer entre elles, & qui ne produiroient que des infiniment petits du second ordre.

D'ailleurs, comme on le verra bientôt, dans un triangle dont les côtés sont infiniment petits, (les angles étant des angles finis, comme ils le sont nécessairement, ou du moins deux d'entre eux), un changement infiniment petit dans un des angles ne change les côtés, dont on calcule les rapports, que d'un infiniment petit du second ordre (3349). C'est une considération qu'il faut avoir présente dans tous les calculs de cette espèce.

3312. La différentielle de  $\frac{s}{\cos. u}$  (3458), renferme la différentielle de  $s$  multipliée par  $\frac{1}{\cos. u}$  moins la différentielle de  $\cos. u$ , qui est  $-\sin. u \, du$  (3308) multipliée par  $s$ , & divisée par  $\cos. u^2$  (3295), c'est-à-dire, par le carré du dénominateur  $\cos. u$ ; cette différentielle de  $\frac{s}{\cos. u}$  est donc  $\frac{ds}{\cos. u} + \frac{s \, du \sin. u}{\cos. u^2}$ . Nous en ferons usage (3458).

3313. Il arrive souvent dans le calcul intégral que l'on traite des quantités variables comme si elles étoient constantes; par exemple, la différentielle de  $\frac{dr}{dx}$ , en supposant  $dx$  constant fera simplement  $\frac{d}{dx} \frac{dr}{dx}$ ; mais ce qu'il est essentiel de remarquer, c'est qu'en l'exprimant ainsi  $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$ , on ne suppose plus que  $dx$  soit constant. Sup-

Planche XL.  
Fig. 304.

posons  $An = dx$  (fig. 304),  $Nn = dr$ , enforte que  $\frac{dr}{dx}$  soit la sécante de l'angle  $AnN$ ; soit  $\frac{dr}{dx} = z$ , & ayant pris  $MD = z$  construisons une nouvelle courbe  $ODB$ , dans laquelle  $DF = dx$ ,  $BF = dz$ , &  $\frac{dz}{dx}$  ou  $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$  fera la tangente de l'angle fini  $FDB$ . Or, cet angle fini fera le même, soit

soit que  $dx$  soit constant ou qu'il varie d'une petite quantité  $d dx$  (3311), ainsi l'expression  $d \frac{(\frac{dr}{dx})}{dx}$  ne suppose point que  $dx$  soit constant, & l'on peut dire que c'est la différentielle de  $\frac{dr}{dx}$ , même dans le cas où  $dx$  est variable. Nous ferons usage de cette remarque (3453).

3314. L'expression d'un arc par le moyen de sa tangente, peut se trouver par les principes exposés jusqu'ici. Soit  $AG$  (fig. 293)  $= t$ ,  $GH = dt$ ,  $CG^2 = 1 + t^2$ , on a ces deux proportions (3310),  $HI : GH :: CA : CG$ , &  $CH : HI :: CE : EB$ , donc  $EB = \frac{dt}{1+t^2}$ , & exprimant  $\frac{1}{1+t^2}$  en série (3288) on a  $EB = dt - t^2 dt + t^4 dt - t^6 dt$  &c, dont l'intégrale (3300) est l'arc  $AB = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7$ , &c. Cette valeur d'un arc de cercle est employée dans la Figure de la terre de M. Clairaut, pag. 179.

Trouver un arc par la tangente. Fig. 293.

On peut trouver de même un arc par le moyen de son sinus. Dans le triangle  $BFE$ , si l'on suppose  $AD = x$  &  $BD = y$ , l'on aura  $BE = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , mais  $BD^2 = 2x - xx$ ; donc  $dx = \frac{y dy}{1-x}$ ,  $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{(1-x)^2}$ ,  $dx^2 + dy^2 = \frac{(1-x)^2 dy^2 + y^2 dy^2}{(1-x)^2} = \frac{dy^2}{1-y^2}$ , donc  $\sqrt{dy^2 + dx^2} = dy (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ , réduisant en série (3287), & intégrant chaque terme, l'on aura l'arc  $AB = y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$ , &c.

Par son sinus.

3315. Il est un peu plus difficile, quand on connoît l'arc lui-même, de trouver le sinus  $BD$ , ou la valeur de  $y$ ; pour y parvenir on appellera  $z$  l'arc cherché, & l'on résoudra l'équation  $z = y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5$ , &c. par approximation (3291), & l'on aura le sinus  $y = z - \frac{1}{2}z^3 + \frac{1}{1.2.3}z^5$ , ou  $y = z - \frac{1}{1.2.3}z^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5}z^5$ , &c.

Expression des sinus.

Ainsi lorsqu'on connoît un arc  $a$  en secondes, on con-

noît son sinus  $a - \frac{a^3}{6}$  ; donc la différence entre un petit arc & son sinus est égale à  $\frac{a^3}{6}$ , ou la sixième partie du cube de cet arc ; or comme le cube d'une petite fraction devient une fraction beaucoup plus petite, on voit combien il est permis de négliger la différence entre un petit arc & son sinus ; si  $a$  est infiniment petit,  $a^3$  est un infiniment petit du troisième ordre, qu'il faut rejeter du calcul, comme je l'ai fait ( 3028 , 3338 , 3353 ).

Expression  
des cosinus.

3316. Le cosinus  $CD$  d'un arc  $AB$ , dont le sinus  $BD = y$ , est  $\sqrt{1 - y^2}$  ; si donc on extrait la racine de 1 moins le carré du sinus exprimé par la série  $z - \frac{1}{1.2.3} z^3$ , &c. l'on aura pour la valeur du cosinus la série suivante,  $1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720}$ , &c. ( Voy. *Philos. transact.* n°. 219. *Volfii Elementa*, T. 1 ). D'où il suit que si l'arc  $z$  est infiniment petit, le cosinus  $1 - \frac{z^2}{2}$  différera du rayon 1 d'une quantité  $\frac{z^2}{2}$  qui est infiniment plus petite que l'arc, ou qui est un infiniment petit du second ordre par rapport au rayon.

Cette expression  $\frac{z^2}{2}$  en y ajoutant les termes suivans de la série, donne le sinus verse d'un arc  $z$  ; on trouveroit, par exemple, que pour un arc d'une minute le sinus verse en décimales du rayon est 0,00000042307975, comme dans les grandes tables de Rheticus ( 3904 ). Si l'on veut en conclure le sinus verse de l'arc décrit par la lune en une seconde de temps, on prendra pour plus d'exactitude le mouvement diurne ; de son logarithme ; on ôtera celui de 24 heures réduites en secondes, & l'on aura le logarithme de l'arc décrit en une seconde 9,7395852 ; le double de ce logarithme moins le double de celui de 1' ou 60" ajouté avec le logarithme du sinus verse de 1' qui est 2,6264222, donne le logarithme du sinus verse de l'arc décrit par la lune en une seconde de temps 8,5492901 ; la caractéristique 8 indique ordinai-

rement qu'il y a deux zéro dans le nombre cherché ; mais ici il y en a dix de plus , parce qu'on a ajouté 10 pour faire la soustraction des logarithmes. Si l'on ajoute ce logarithme avec celui de la distance de la lune en pieds , qui est 9,0729303 sa parallaxe sous l'équateur étant de 57' 13'', on a le logarithme de 0,004190062 qui vaut environ  $\frac{1}{249}$  de pied. Nous en ferons usage ( 3397 ).

3317. Si l'on a une quantité fort petite, telle que  $a \sin. A$ , son sinus sera égal à  $(a - \frac{1}{8}a^3) \sin. A + \frac{a^5}{24} \sin. 3 A$ , car le sinus est égal à l'arc moins la sixième partie du cube de l'arc ( 3315 ), donc le sinus de  $a \sin. A$  est égal à  $a \sin. A - \frac{a^3 \sin. A^3}{6}$  ; mais  $\sin. A^3 = \frac{3}{4} \sin. A - \frac{1}{4} \sin. 3 A$  ( 3630 ) ; donc le sinus cherché  $= a \sin. A - \frac{a^3}{6} \cdot \frac{3}{4} \sin. A + \frac{a^3}{24} \sin. 3 A = (a - \frac{1}{8}a^3) \sin. A + \frac{a^5}{24} \sin. 3 A$ , en négligeant les puissances ultérieures de  $a$ , qui est supposée une petite fraction.

3318. On trouveroit par une méthode semblable, la valeur du cosinus de  $a \sin. A$ , qui est  $1 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^4}{4} \cos. 2 A$ . On a besoin de ces valeurs pour faire les calculs & les approximations que j'ai indiquées ( 3294, 3338 ), & qui sont d'un usage fréquent pour la théorie de la lune.

3319. On déduit de l'article 3315, une manière d'exprimer en secondes la différence d'un arc à son sinus. Supposons un arc  $a$  fort petit , par exemple , égal à 1° ou 3600'' ; on divisera d'abord cet arc par 57° ou 206265'' qui est la longueur du rayon exprimé en secondes , & l'on aura l'arc exprimé en décimales du rayon ( 3359 ), dont le logarithme est 8,24188 ; le triple de ce logarithme est 4,72564, logarithme de  $a^3$  ; on en ôtera celui de 6 , & l'on aura le logarithme d'une fraction du rayon qui est égale à  $\frac{a^3}{6}$  ; c'est-à-dire , à l'excès de l'arc  $a$  sur son sinus en parties du rayon ; si l'on veut exprimer

Différence  
d'un arc à son  
sinus.

cet excès en secondes on le multipliera par  $57^{\circ}$  (en ajoutant le logarithme  $5,31442$ ), & l'on aura  $0'' 18$ ; c'est pour cela que j'ai supposé ( $1629$ ) le sinus de la parallaxe de la lune égal à la parallaxe elle-même; il faudroit que l'arc fût de  $3^{\circ} 12' 49''$  pour que la différence entre l'arc & le sinus fût seulement de  $5''$ . J'ai supposé de même dans le calcul de l'équation du centre, que les petits arcs étoient égaux à leurs sinus ( $1247$ ).

3320. La règle précédente pour trouver la différence d'un arc à son sinus se réduit à cette autre règle plus simple: du triple du logarithme de l'arc en secondes: ôtez le logarithme  $1,4070053$  vous aurez celui de la différence cherchée; c'est ainsi qu'on pourroit construire la table de l'article 1248 ou la prolonger. Enfin on peut se servir des tables des sinus, en disant l'arc égal au rayon est à l'unité, comme l'arc donné est à sa valeur en parties du rayon; on la retranchera du sinus de cet arc pris dans les tables, & l'on aura la différence en décimales, on la multipliera par  $206265''$ , & l'on aura cette différence en secondes.

Calcul des  
segmens.

Fig. 266.

3321. Connoissant l'arc  $PA$  (fig. 266) du cercle circonscrit à une ellipse  $PMH$ , trouver le segment  $PEAP$ , & la surface circulaire  $PSA$  qui se termine au foyer  $S$  de l'ellipse. Soit  $CP=1$ ,  $PS=b$ , l'arc  $AP$  de  $18^{\circ}$  ou  $64800''$ , on réduira cet arc  $AP$  en décimales du rayon en le divisant par l'arc de  $57^{\circ}$ , on aura  $0,3142$  pour l'arc  $AP$  en parties du rayon; si on le multiplie par la moitié du rayon  $CP$ , ou par  $\frac{1}{2}$ , on aura la surface du secteur  $PCA=0,1571$ . La surface du triangle  $CAD$  est égale à la moitié du produit de  $AD$  par  $DC$ , ou du sinus de  $18^{\circ}$  par le cosinus, c'est-à-dire,  $0,1469$ ; le triangle  $APD$  est égal au produit du sinus  $AD$  par la moitié du sinus versé  $PD$ , c'est-à-dire,  $0,0076$ ; ces deux triangles étant ôtés de la surface du secteur  $PCA$ , il reste le segment  $PEAP=0,0026$ . M. Halley, dans la table qu'il a donnée pour faciliter le calcul du mouvement des comètes ( $3101$ ) dans une orbite elliptique, emploie le double de ce segment, qu'il trouve  $0,00514227$ .



3322. La quadrature du cercle, consiste à trouver la surface  $ABD$  (fig. 290), dont la différentielle est le petit rectangle  $FEKD$ ; supposons le rayon  $=a$ ,  $CD$

Fig. 290.

$=x$ ,  $DK = dx$ ,  $BD = \sqrt{aa - xx}$ ,  $FEKD$  sera  $=$

$\sqrt{aa - xx} . dx$ , c'est la différentielle dont il faudroit avoir l'intégrale pour trouver la quadrature du cercle; mais nous ne connoissons aucune quantité qui étant dif-

férentiée (3294) puisse produire  $\sqrt{aa - xx} dx$ . Il faut donc se contenter de trouver la quadrature du cercle par approximation; ce qui est aisé dès qu'on connoît les sinus, ou les segmens par les approximations précédentes. Supposant le diamètre égal à 1, l'on a pour la circonférence le nombre suivant calculé par *Ludoph de Ceulen* :

3, 1415926535897932384626433832795028841971693993751. ( *Histoire de la quadrature du cercle*, par M. Montucla, 1754 ).

Rapport du  
diamètre à la  
la circonfé-  
rence.

3323. IL Y A DES DIFFÉRENTIELLES dont on ne peut avoir l'intégrale, si ce n'est en supposant connue la mesure des arcs de cercle; ces intégrales dépendent donc de la quadrature du cercle; telle est l'intégrale de

Intégrale par  
la quadrature  
du cercle.

Fig. 293.

$\frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$ ; il n'y a aucune quantité qui étant différentiée

(3294 & suiv.) puisse faire  $\frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$ ; mais si l'on fait  $BD$

(fig. 293) égal à  $x$ ,  $CD$  sera  $= \sqrt{1 - xx}$ ; mais  $CD :$

$CB :: BF : BE$ , donc  $BE = \frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$ , c'est la différentielle de l'arc  $BA$ ; ainsi l'intégrale fera l'arc dont le sinus

est  $x$ ; si donc on avoit la mesure rigoureuse & exacte d'un arc dont le sinus est  $x$ , on auroit par la même intégrale exacte de  $\frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$ .

Quoiqu'on ne l'ait que par approximation, on ne laisse pas de regarder comme résolu un problème que l'on a réduit ainsi à la quadrature ou à la rectification du cercle; & il y en a un très-grand nombre.

(V. le *Calcul Intégral* de M. de Bougainville). Nous ferons usage plusieurs fois de cette manière d'intégrer (3568).

3324. On réduit à la quantité  $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$  beaucoup d'autres différentielles; comme  $\sqrt{1-xx} dx$  qui exprime un segment de cercle, l'intégrale s'en trouvera par le moyen d'un arc dont  $x$  est le sinus. En effet,  $\sqrt{1-xx} dx = \frac{\sqrt{1-xx} dx + \sqrt{1-xx} dx}{2} = \frac{\sqrt{1-xx}}{2} dx + \frac{dx}{2\sqrt{1-xx}} - \frac{xx dx}{2\sqrt{1-xx}}$ ; mais  $\sqrt{1-xx} dx - \frac{xx dx}{\sqrt{1-xx}}$  est la différ. de  $x\sqrt{1-xx}$  (3298), &  $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$  est la différentielle d'un arc dont  $x$  est le sinus (3323), donc nommant cet arc  $z$ , l'intégrale des trois termes précédens ou de  $\sqrt{1-xx} dx$  sera  $\frac{z}{2} + \frac{x}{2} \sqrt{1-xx}$ . Nous en ferons usage (3568).

3325. L'intégrale de  $\frac{xx dx}{\sqrt{1-xx}}$  dépend également de la rectification du cercle, c'est-à-dire, que si l'on avoit l'intégrale de  $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$  on auroit celle de  $\frac{xx dx}{\sqrt{1-xx}}$ ; & voici la manière de les ramener l'une à l'autre. On choisit une troisième quantité  $x\sqrt{1-xx}$ , dont la différentielle renferme celle qui est donnée, & celle d'un arc de cercle ou d'un segment; cette nouvelle quantité étant différenciée (3294 & 3298) donnera  $dx \sqrt{1-xx} - \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-xx}}$ ; réduisant à même dénominateur, on aura  $\frac{dx(1-xx)}{\sqrt{1-xx}} - \frac{xx dx}{\sqrt{1-xx}}$ , qui est égale à la différentielle de  $x\sqrt{1-xx}$ ; cette quantité revient aussi à  $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} - \frac{xx dx}{\sqrt{1-xx}} - \frac{xx dx}{\sqrt{1-xx}}$  ou  $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} - \frac{2xx dx}{\sqrt{1-xx}}$ ; ainsi les intégrales seront égales, & l'on aura  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} - 2 \int \frac{xx dx}{\sqrt{1-xx}} = x\sqrt{1-xx}$ ; donc  $\int \frac{xx dx}{\sqrt{1-xx}} = -\frac{x}{2} \sqrt{1-xx} + \int \frac{dx}{2\sqrt{1-xx}}$ ; c'est-à-dire, que l'inté-

grale cherchée est composée de deux quantités dont l'une  $-\frac{x}{2}\sqrt{1-xx}$  est une quantité algébrique finie, l'autre  $\int \frac{dx}{2\sqrt{1-xx}}$ , est une quantité qui est donnée seulement par la quadrature du cercle (3323); c'est la moitié de l'arc même dont  $x$  est le sinus, & si cet arc s'appelle  $z$ , l'on aura  $\frac{z-x\sqrt{1-xx}}{2}$  pour l'intégrale de  $\frac{x^2 dx}{\sqrt{1-xx}}$ . Nous en ferons usage (3560).

3326. On trouvera par une méthode semblable, l'intégrale de  $xx\sqrt{aa-xx} dx$ , en supposant connue celle de  $dx\sqrt{aa-xx}$  (3322); on choisit une fonction de  $x$  dont la différentielle renferme ces deux différentielles proposées; telle est la quantité  $x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$ , ou  $(aa-xx)\sqrt{aa-xx}$ , ou bien  $aa x\sqrt{aa-xx}-x^3\sqrt{aa-xx}$ ; on en prend la différentielle  $aa dx\sqrt{aa-xx}-\frac{aa x^2 dx}{\sqrt{aa-xx}}-3x^2\sqrt{aa-xx} dx+\frac{x^3 dx}{\sqrt{aa-xx}}$ ; les trois derniers termes se réduisent à l'expression suivante,

$$\frac{-aa x^2 dx - 3x^2(aa-xx) dx + x^3 dx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{-aa x^2 dx - 3a^2 x^2 dx + 3x^3 dx + x^3 dx}{\sqrt{aa-xx}}$$

$$= \frac{-4a^2 x^2 dx + 4x^3 dx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{-4x^2(aa-xx) dx}{\sqrt{aa-xx}} = -4xx\sqrt{aa-xx} dx;$$

donc la différentielle de  $x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$  est  $aa\sqrt{aa-xx} dx - 4xx\sqrt{aa-xx} dx$ ; donc  $x(aa-xx)^{\frac{3}{2}} = \int aa\sqrt{aa-xx} dx - \int 4x^2\sqrt{aa-xx} dx$ , ainsi l'intégrale cherchée  $\int xx\sqrt{aa-xx} dx = \frac{1}{4}aa\int\sqrt{aa-xx} dx - \frac{x}{4}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$ . Si dans l'intégrale on fait  $x=a$  &  $\int\sqrt{aa-xx} dx=A$ , qui est la valeur d'un quart-de-cercle, le terme  $\frac{x}{4}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$  dispa- roît & l'on trouve  $\frac{aaA}{4}$  pour l'intégrale cherchée; c'est sous cette forme que nous en ferons usage (3538).

3 3 2 7. La surface d'un segment parabolique est les deux tiers du produit de l'ordonnée & de l'abscisse ; car le petit rectangle élémentaire , dont la surface est  $y dx$  ou  $\frac{2y^2 dy}{3p}$  étant intégré , donne  $\frac{2}{3} \frac{y^3}{p}$  , & mettant  $px$  pour  $y^2$  , il se réduit à  $\frac{2}{3} xy$  , comme nous l'avons supposé (3033).

Mais on a souvent besoin dans les calculs de l'attraction de trouver  $\int y dx$  , sans avoir  $y$  exprimée en  $x$  , & sans pouvoir réduire la formule à une fonction de  $x$  & de  $dx$  ; il faut alors calculer arithmétiquement un grand nombre de fois la valeur de  $y$  . Pour cela on considère ces valeurs comme les ordonnées d'une courbe dont  $x$  est l'abscisse , &  $y$  l'ordonnée ; la surface de cette courbe est  $\int y dx$  , & cette surface calculée ainsi par des opérations arithmétiques , donne à très-peu-près l'intégrale cherchée. Supposons que  $PM$ ,  $SN$ ,  $TV$  (fig. 289) , représentent trois valeurs de  $y$  , qui exprimées en nombres , soient  $a$  ,  $b$  ,  $c$  ;  $PS$  &  $ST$  étant chacune égales à 1 , la surface  $PMVT$  supposée rectiligne , fera  $\frac{a+b}{2} + \frac{c+b}{2}$  , & s'il y avoit un grand nombre d'ordonnées  $d$  ,  $e$  ,  $f$  , &c. on auroit pour les espaces suivans  $\frac{d+e}{2} + \frac{e+f}{2}$  , &c. Cela suppose que les arcs  $MN$ ,  $NV$  soient sensiblement rectilignes ; mais si la ligne  $MNV$  qui joint trois ordonnées consécutives , est un arc de courbe parabolique déterminé par ces trois ordonnées , le calcul en fera plus exact : voici la manière de trouver la surface du segment  $PMVT$  dans ce cas-là.

3 3 2 8. Dans une courbe parabolique , c'est-à-dire , dont l'équation générale est  $y = m + nx + px^2 + qx^3$  , &c. Si l'on a trois ordonnées  $a$  ,  $b$  ,  $c$  , répondantes aux abscisses 0 , 1 , 2 , la surface  $PMVT$  fera  $= \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c$ . Substituons pour  $m$  ,  $n$  ,  $p$  des fonctions de  $a$  ,  $b$  ,  $c$  , qui soient telles que mettant zéro à la place de  $x$  , comme cela doit avoir lieu au point  $P$  l'on ait  $y = a$  , que mettant 1 à la place de  $x$  , l'on ait  $y = b$  , ce qui a lieu en  $S$  , & qu'en mettant 2 à la place de  $x$  , l'équation devienne  $y = c$  , comme au point  $T$  ; ces conditions sont remplies en supposant

Pl. XXXIX.  
Fig. 289.

Equation des  
courbes para-  
boliques.

supposant  $y = a + (b - a)x + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)x(x - 1)$  ; l'élément de la surface de la courbe , ou le petit trapèze  $PMmp$  fera  $ydx = adx + (b - a)xdx + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)(xxdx - xdx)$  , dont l'intégrale  $\int ydx = PMVT = ax + \frac{b-a}{2}x^2 + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)$  ; dans cette expression de l'aire  $PMVT$  l'on substituera  $PT = 2$  , à la place de  $x$  , & l'on aura la surface dans le cas des trois ordonnées ,  $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$  .

3329. Si l'on avoir une suite d'ordonnées  $a, b, c, d, e, f, g, k$  , dans une courbe plus étendue , on trouveroit l'aire de la courbe en la divisant en plusieurs arcs de même espèce , on auroit le segment compris entre les ordonnées  $a$  &  $c$  ,  $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$  ; le segment compris entre les ordonnées  $c, d, e$  , seroit  $\frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d + \frac{1}{3}e$  , le segment compris entre les ordonnées  $e, f, g$  , seroit  $\frac{1}{3}e + \frac{4}{3}f + \frac{1}{3}g$  , &c. Ainsi la somme seroit égale à un tiers de la première & de la dernière , plus  $\frac{4}{3}$  de la seconde , de la quatrième , &c. c'est-à-dire , de tous les termes pairs , plus  $\frac{2}{3}$  de la troisième , de la cinquième , &c. c'est-à-dire , de tous les nombres impairs : par-là nous chercherons la surface des courbes qui expriment des intégrales qu'on ne pourroit avoir autrement (3502).

3330. LE CALCUL INTÉGRAL sert à trouver la surface & la cubature des solides , aussi bien que la quadrature des courbes , mais le seul usage que nous en faisons dans l'astronomie consiste à trouver la solidité , ou le volume de la terre , en la supposant produite par la rotation d'une ellipse autour de son petit axe.

Soit une ellipse  $PLQO$  (fig. 304) , qui tourne autour de l'axe  $CP$  pour engendrer un sphéroïde aplati ; soit  $QM = x$  ,  $ML = y$  ,  $CQ = a$  ,  $CP = b$  ; on aura par la propriété de l'ellipse (3254)  $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - xx)$   $a^2y^2 = 2ab^2x - b^2x^2$  , & prenant la différentielle (3294) ,  $2a^2ydy = 2ab^2dx - 2b^2xdx$  ;  $dx = \frac{2a^2ydy}{2ab^2 - 2b^2x} =$

*Planc. XL.  
Fig. 304.*

$$\frac{a^2 y dy}{b^2 (a-x)}; dx^2 = \frac{a^4 y^2 dy^2}{b^4 (a-x)^2} = \frac{a^4 y^2 dy^2}{b^4 (aa - \frac{aa}{b} y^2)} (3255); =$$

$$\frac{a^2 y^2 dy^2}{b^4 - b^2 y^2}; \text{ ainsi l'arc } Ll = \sqrt{dx^2 + dy^2} (3314) = \sqrt{\frac{a^2 y^2 dy^2 + b^4 dy^2 - b^2 y^2 dy^2}{b^4 - b^2 y^2}} = \frac{dy}{b} \sqrt{\frac{a^2 y^2 + b^4 - b^2 y^2}{b^2 - y^2}}; \& \text{ si}$$

l'on appelle  $e$  l'excentricité, enforte que l'on ait  $ee = aa - bb$ , on aura  $Ll = \frac{dy}{b} \sqrt{\frac{b^4 + eey^2}{b^2 - y^2}}$ . Nommant  $p$

la circonférence pour le rayon 1 (3322), l'on aura pour le rayon  $CM = a - x$  ou  $\frac{a}{b} \sqrt{bb - yy}$  (3255) la cir-

conférence  $\frac{p}{b} \sqrt{bb - yy}$ , qui multipliée par l'élément de l'ellipse ou par  $Ll$  donnera la différentielle de la surface du sphéroïde,  $= \frac{dy}{b} \frac{p}{b} \sqrt{b^4 + eey^2} = \frac{ep}{bb} dy$

$\sqrt{\frac{b^4}{e^2} + y^2}$  qu'il faut intégrer. On réduit d'abord le radical

$$\text{en série (3287); \& l'on a } \sqrt{\frac{b^4}{e^2} + y^2} = \frac{b^2}{e} + \frac{ey^2}{2b^2} - \frac{e^3 y^4}{8b^5} + \frac{e^5 y^6}{16 \cdot b^{10}} - \frac{5e^7 y^8}{128 \cdot b^{14}} + \frac{7e^9 y^{10}}{256 \cdot b^{18}} - \frac{21e^{11} y^{12}}{1024 \cdot b^{22}}, \&c. \text{ multipliant}$$

$$\text{par } dy \& \text{ intégrant chaque terme, on trouve } \frac{b^2 y}{e} + \frac{ey^3}{6b^2} - \frac{e^3 y^5}{40b^5} + \frac{e^5 y^7}{112b^{10}} - \frac{5e^7 y^9}{1152b^{14}} + \frac{7e^9 y^{11}}{2816b^{18}} - \frac{21e^{11} y^{13}}{13312b^{22}}, \&c.$$

On fera  $y=b$  pour avoir le demi-sphéroïde, on doublera le tout & l'on multipliera par  $\frac{ep}{bb}$ , l'on aura  $\frac{2ep}{bb} (\frac{b^3}{e} + \frac{eb}{6} - \frac{e^3}{40b} + \frac{e^5}{112b^3} - \frac{5e^7}{1152b^5} + \frac{7e^9}{2816b^7} - \frac{21e^{11}}{13312b^9} \&c.)$  dont

les premiers termes sont  $2pab + \frac{pae^2}{3b} - \frac{e^4 pa}{20b^3} + \frac{e^6 pa}{56b^5} \&c.$  C'est la surface du sphéroïde; nous en avons donné la valeur (2693).

Solidité de  
la terre.

3331. LA SOLIDITÉ ou le volume du sphéroïde est le produit des deux tiers du grand axe par la surface du méridien. En faisant  $CM=x$  l'on aura  $\frac{p}{b} \sqrt{bb - yy}$  pour la circonférence décrite par le mouvement du point

$M$  autour du centre  $C$ , multipliant par  $\frac{a}{2b} \sqrt{bb - yy}$ , on aura la surface du cercle décrit par  $RL = \frac{p a^2}{2bb} (bb - yy)$ ; multipliant par  $dy$  & intégrant, l'on trouve  $\frac{p a^2 y}{2} - \frac{p a^2 y^2}{6bb}$ , valeur du solide décrit par le segment  $CQLR$ . Si l'on fait  $y = b$ , l'on a  $\frac{2}{3} p a^2 b$ , qu'il faut doubler pour avoir la valeur du sphéroïde entier  $\frac{4}{3} p a^2 b$ ; ou ce qui revient au même  $\frac{p b a}{2} \cdot \frac{4}{3} a$ . Mais la surface de l'ellipse est  $\frac{p b a}{2} (3267)$ ; si l'on appelle  $A$  cette surface, l'on aura le sphéroïde  $= \frac{4}{3} a A$ . On en verra l'usage à l'occasion de la précession des équinoxes (3541 & 3552). Nous avons déjà même employé l'expression de la solidité du sphéroïde (2693).

3332. La solidité que nous avons trouvée  $\frac{p b a}{2} \cdot \frac{4}{3} a$ ; ou  $\frac{2}{3} p b a^2$  seroit  $= \frac{2}{3} p b^3 a$ , dans le cas du sphéroïde allongé que produit une ellipse en tournant autour de son grand axe, parce que le carré de  $b$  qui devient le diamètre tournant, prend la place du carré de  $a$ . Dans le cas de la sphère où  $b = a$ , l'on a pour la solidité  $\frac{2}{3} p a^3$ . Nous en ferons usage en parlant des marées (3598).

3333. Supposons maintenant une sphère qui par une force étrangère se change en un ellipsoïde allongé, en conservant la même quantité de matière; supposons le demi-diamètre de la sphère  $= b$ , la différence des deux demi-axes du nouvel ellipsoïde  $= \beta$ , & cherchons le rapport de ces deux demi-axes; soit la différence entre le rayon de la sphère, qui est égale au sphéroïde, & le demi-petit axe  $= x$ , on aura  $b - x$  pour le demi-petit axe du sphéroïde, &  $b + \beta - x$  pour le demi-grand axe, donc la solidité de l'ellipsoïde sera  $\frac{2}{3} p (b + \beta - x) (b - x)^2$  & négligeant les produits ou les puissances des quantités  $\beta$  &  $x$  qui sont fort petites; cette solidité  $= \frac{2}{3} p (b^3 - 3b^2 x + b^2 \beta)$  qu'il faut égaler à  $\frac{2}{3} p b^3$  qui est la solidité de la sphère, & l'on a  $3 b^2 x = b^2 \beta$ ; donc  $x = \frac{1}{3} \beta$ . Nous

nous servirons de cette proposition quand il s'agira du flux & du reflux de la mer (3598).

*Expressions analytiques de l'Anomalie vraie & du Rayon vecteur.*

3334. LES calculs de l'attraction, & ceux où l'on fait usage des anomalies ou des rayons vecteurs, exigent que ces quantités soient exprimées analytiquement, ainsi que M. Clairaut l'a fait dans sa théorie de la lune : voici les formules qu'il a données pour cet effet, mais dont il n'a pas publié les calculs ; on en verra l'usage ci-après (3496).

Fig. 285. Soit le demi-axe  $CA$  (fig. 285) = 1, le rayon vecteur  $SM = r$ , l'anomalie vraie  $ASM = u$ , l'anomalie moyenne  $= z$ , l'excentricité  $CS = c$ , l'angle  $MSm = du$  ; on aura le petit secteur elliptique  $MSm = \frac{rr du}{2}$ , parce que le petit arc qui mesure l'angle  $du$  est  $r du$  (3357). Soit  $p$  la circonférence pour le rayon  $CA = 1$ , &  $\frac{p}{2}$  la surface, on aura  $\frac{p}{2} \sqrt{1-c^2}$  pour la surface de l'ellipse (3267) ;  $\frac{dz}{2}$  est la surface du secteur circulaire qui représente l'anomalie moyenne, dans le cercle (1235), comme  $\frac{rr du}{2}$  est celle du secteur elliptique ; ainsi l'on aura cette proportion,  $\frac{rr du}{2} : \frac{dz}{2} :: \frac{p}{2} \sqrt{1-c^2} : \frac{p}{2}$ , donc  $dz = \frac{rr du}{\sqrt{1-c^2}}$  ; c'est l'élément de l'anomalie moyenne, & l'intégrale donnera d'abord l'anomalie moyenne, par le moyen de l'anomalie vraie.

Élément de  
l'anomalie.  
moyenne.

3335. Le rayon vecteur  $r = \frac{1-c^2}{1-c \cos u}$  (3279), donc  $rr du = (1-c^2)(1-c \cos u)^{-2} du$ ,  $dz = \frac{rr du}{\sqrt{1-c^2}} = (1-c^2)^{\frac{1}{2}} (1-c \cos u)^{-2} du$ . Ainsi pour avoir la



valeur de l'anomalie moyenne  $z$  il faut commencer par trouver celle de  $(1 - c \cos u)^{-2}$  par la formule du binôme (3287), & ce sera aussi la valeur de  $\frac{rr}{(1 - c \cos u)^2}$ ; on aura donc  $1 + 2c \cos u + 3c^2 \cos^2 u + 4c^3 \cos^3 u + 5c^4 \cos^4 u$ ; nous négligerons les puissances supérieures à  $c^4$ . On substituera pour  $\cos u$  sa valeur  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u$  (3627), pour  $\cos^2 u$  sa valeur (3631), & pour  $\cos^3 u$  sa valeur (3632), l'on aura celle de  $(1 - c \cos u)^{-2}$  ou de  $\frac{rr}{(1 - c \cos u)^2}$ . Voici cette valeur multipliée par  $du$ , c'est-à-dire,  $\frac{rr du}{(1 - c \cos u)^2} = (1 + \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{8} c^4) du + (2c + 3c^3) \cos u du + (\frac{3}{2} c^2 + \frac{1}{2} c^4) \cos 2u du + c^3 \cos 3u du + \frac{5}{8} c^4 \cos 4u du$ , dont l'intégrale (3309) fera la valeur de  $\int \frac{rr du}{(1 - c \cos u)^2} = (1 + \frac{1}{2} c^2 + \frac{1}{8} c^4) u + (2c + 3c^3) \sin u + (\frac{3}{4} c^2 + \frac{1}{4} c^4) \sin 2u + \frac{1}{3} c^3 \sin 3u + \frac{5}{32} c^4 \sin 4u$ ; mais ce n'est pas  $\int \frac{rr du}{(1 - c \cos u)^2}$  qui est l'anomalie moyenne, c'est  $\int \frac{rr du}{(1 - c \cos u)^{\frac{3}{2}}}$ ; ainsi pour avoir la valeur de l'anomalie moyenne, il faut multiplier  $\int \frac{rr du}{(1 - c \cos u)^2}$  par  $(1 - c \cos u)^{\frac{1}{2}}$ , ou diviser chacun des termes de sa valeur par  $1 + \frac{1}{2} c \cos u + \frac{1}{8} c^2$ , &c.  $= (1 - c \cos u)^{-\frac{1}{2}}$  (3287); par ce moyen  $u$  se trouvera dégagée, & l'on aura  $\int \frac{rr du}{(1 - c \cos u)^{\frac{3}{2}}} = z = u + 2c \sin u + (\frac{3}{4} c^2 + \frac{1}{8} c^4) \sin 2u + \frac{1}{3} c^3 \sin 3u + \frac{5}{32} c^4 \sin 4u$ , &c. En divisant chaque terme nous avons négligé les  $c^5$ , comme étant d'une extrême petitesse, même pour l'orbite de Mercure. C'est ainsi que nous avons l'expression de l'anomalie moyenne par le moyen de l'anomalie vraie; cette série donneroit la solution du problème, que nous avons déjà résolu d'une autre manière (1240); mais nous avons cherché cette expression pour parvenir à celle de l'anomalie vraie, ou de la quantité  $u$ .

Valeur de  
l'anomalie  
moyenne.

3336. *CONNOISSANT l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie par une expression analytique.* On a vu

Valeur indé-  
terminée de  
l'anom.  $u$ ,

ci-devant la valeur de  $z$  exprimée en  $u$ , si l'on en tire la valeur de  $u$  exprimée en  $z$  par le retour des suites, on aura l'anomalie vraie. Pour y parvenir par approximation, nous supposons une valeur indéterminée de  $u$  en  $z$ , telle que  $u = z - 2mc \sin. z + nc^2 \sin. 2z + pc^3 \sin. 3z + q c^4 \sin. 4z$ ; nous en tirerons les valeurs de  $\sin. u$ ,  $\sin. 2u$ , &c. que nous substituerons dans la série  $u + 2c \sin. u$ , &c. & nous aurons une nouvelle série pour la valeur de  $z$ , dans laquelle on égalera à  $m$  tous les termes qui multiplieront  $2c \sin. z$ ; & ainsi des autres coefficients indéterminés,  $n$ ,  $p$ ,  $q$  (3342); cette méthode des indéterminées est d'un grand secours dans ces sortes d'approximations, & nous en avons déjà fait usage (3291, 3292).

Méthode  
des indétermi-  
nées.

Pour comprendre l'esprit de cette méthode des indéterminées, il faut considérer que puisque  $z = u + 2c \sin. u$ , on aura  $u = z - 2c \sin. u$ , mais si au lieu de  $\sin. u$  on vouloit avoir  $\sin. z$  dans le second terme, comme cela nous est nécessaire, il faudroit au lieu de  $-2c$  avoir un autre coefficient, c'est celui que j'appelle  $-2cm$ , en attendant qu'il soit connu. Pour connoître la valeur de cette indéterminée  $m$ , je prends  $u = z - 2cm \sin. z$ , j'en déduis la valeur de  $\sin. u$  que je substitue dans l'équation  $u = z - 2c \sin. u$ , & il me vient une équation, dans laquelle au lieu de  $\sin. u$  j'ai  $\sin. z$ , avec un coefficient qui tient la place de celui que j'avois appelé  $2cm$ , & qui lui est égal par la supposition; donc en les égalant je trouverai la valeur de  $m$  en  $c$ ; il en est de même des autres coefficients indéterminés, comme on le verra par le calcul.

3337. La valeur de  $u$  étant composée de  $z$ , & de  $2mc \sin. z + nc^2 \sin. 2z$ , &c. on aura  $\sin. u = \sin. z \cos. (2mc \sin. z - nc^2 \sin. 2z, \&c.) - \cos. z \sin. (2mc \sin. z - nc^2 \sin. 2z, \&c.)$ , car le sinus de la différence de deux arcs est égal au cosinus de l'un par le sinus de l'autre, moins le cosinus du second par le sinus du premier (3619). Il faut calculer séparément ces deux parties de  $\sin. u$ .

Première  
partie de  $u$ .

Pour avoir la première partie,  $\sin. z \cos. (2mc \sin. z$

—  $n c^2 \sin. 2z$ ), on la réduit à celle-ci (3620),  $\sin. z$  [cof. ( $2 m c. \sin. z$ ) cof. ( $n c^2 \sin. 2z$ ) +  $\sin. (2 m c. \sin. z) \sin. (n c^2 \sin. 2z)$ ]; mais dans ces sortes d'approximations. on suppose que le cosinus d'un petit arc, comme  $n c^2 \sin. 2z$ , est égal au rayon, ou  $= 1$ , & que le sinus d'un petit arc, comme  $n c^2 \sin. 2z$  est égal à l'arc lui-même; ainsi l'expression précédente deviendra  $\sin. z$  [cof. ( $2 m c. \sin. z$ ) +  $2 m c. \sin. z. n c^2 \sin. 2z$ ]. Mais cof. ( $2 m c. \sin. z$ )  $= 1 - m^2 c^2 + m^2 c^2 \cos. 2z$  (3318); c'est une des deux quantités qu'il faudra multiplier par  $\sin. z$ ; l'autre quantité est  $2 m c. \sin. z. n c^2 \sin. 2z = (3622), m n c^3 \cos. z - m n c^3 \cos. 3z$ ; donc  $\sin. z. \cos. (2 m c. \sin. z, \&c.) = (1 - m^2 c^2) \sin. z + m^2 c^2 \sin. z. \cos. 2z + m n c^3 \sin. z. \cos. z - m n c^3 \sin. z. \cos. 3z$ ; or,  $m^2 c^2 \sin. z. \cos. 2z = \frac{1}{2} m^2 c^2 \sin. 3z - \frac{1}{2} m^2 c^2 \sin. z$  (3621); de même  $m n c^3 \sin. z. \cos. z = \frac{1}{2} m n c^3 \sin. 2z$ ; &  $- m n c^3 \sin. z. \cos. 3z = -\frac{1}{2} m n c^3 \sin. 4z + \frac{1}{2} m n c^3 \sin. 2z$ ; donc la première partie de la valeur de  $\sin. u$ , ou  $\sin. z$ . [cof. ( $2 m c. \sin. z - \&c.$ )] fera  $(1 - m^2 c^2) \sin. z + \frac{1}{2} m^2 c^2 \sin. 3z - \frac{1}{2} m^2 c^2 \sin. z + \frac{1}{2} m n c^3 \sin. 2z - \frac{1}{2} m n c^3 \sin. 4z + \frac{1}{2} m n c^3 \sin. 2z = (1 - \frac{1}{2} m^2 c^2) \sin. z + m n c^3 \sin. 2z + \frac{1}{2} m^2 c^2 \sin. 3z - \frac{1}{2} m n c^3 \sin. 4z$ .

3338. Il faut trouver aussi la seconde partie de sinus  $u$ , c'est-à-dire, — cof.  $z. \sin. (2 m c \sin. z - n c^2 \sin. 2z - p c^3 \sin. 3z)$ ; considérons d'abord  $\sin. (2 m c. \sin. z - n c^2 \sin. 2z - p c^3 \sin. 3z)$ , en supposant que le cosinus des deux derniers termes soit égal à l'unité, & que le sinus soit égal aux termes eux-mêmes, cette expression (égale au sinus de  $2 m c. \sin. z$  par le cosinus des deux autres termes, moins le cof. de  $2 m c. \sin. z$ , par le sinus des deux autres) fera  $= \sin. (2 m c. \sin. z) - n c^2 \sin. 2z - p c^3 \sin. 3z$ ; c'est la quantité qu'il faudra multiplier par cof.  $z$ , & retrancher ensuite de la première partie.

Mais puisqu'en général  $\sin. (a. \sin. A) = (a - \frac{1}{8} a^3) \sin. A + \frac{a^2}{24} \sin. 3A$  (3317), on aura pour la quantité précédente :  $\sin. (2 m c - m^3 c^3) \sin. z + (\frac{1}{3} m^3 c^3 - p c^3) \sin. 3z - n c^2 \sin. 2z$ . On multipliera par cof.  $z$ , & l'on

Première  
partie de  $\sin. u$ .

aura la seconde partie de  $\sin. u = \cos. z (2mc - m^3 c^3)$   
 $\sin. z - n c^2 \sin. 2z. \cos. z + (\frac{1}{3} m^3 c^3 - p c^3) \sin. 3z.$   
 Seconde partie de  $\sin. u.$   $\cos. z$ ; ou développant ces produits de sinus (3625, 3621),  $-\frac{1}{2} n c^2 \sin. z + (mc - \frac{1}{3} m^3 c^3 - \frac{1}{2} p c^3) \sin. 2z - \frac{1}{2} n c^2 \sin. 3z + (\frac{1}{6} m^3 c^3 - \frac{1}{2} p c^3) \sin. 4z.$  En rassemblant ces deux parties de la valeur de  $\sin. u$ , dont la seconde est négative, l'on aura  $\sin. u = (1 - \frac{1}{2} m^2 c^2 + \frac{1}{2} n c^2) \sin. z - (mc - \frac{1}{3} m^3 c^3 - mn c^3 - \frac{1}{2} p c^3) \sin. 2z + (\frac{1}{2} m^2 c^2 + \frac{1}{2} n c^2) \sin. 3z - (\frac{1}{2} mn c^3 + \frac{1}{6} m^3 c^3 - \frac{1}{2} p c^3) \sin. 4z$ ; cette quantité étant multipliée par  $2c$ , donnera le second terme  $2c. \sin. u$  de la série  $z = u + 2c. \sin. u$ , &c. (3335), que nous avons à exprimer en  $z$ .

3339. Passons à  $\sin. 2u$  qui donnera le second terme. Nous avons supposé  $u = z - 2mc. \sin. z$ , &c. (3336); ainsi  $2u = 2z - 4mc. \sin. z + 2nc^2 \sin. 2z$ , donc  $\sin. 2u$  (3619)  $= \sin. 2z. \cos. (4mc. \sin. z) - \cos. 2z (4mc. \sin. z - 2nc^2. \sin. 2z)$ , mais  $\cos. (4mc. \sin. z)$  (3318)  $= 1 - 4m^2 c^2 + 4m^2 c^2 \cos. 2z$ ; donc  $\sin. 2z. \cos. (4mc. \sin. z) = (1 - 4m^2 c^2) \sin. 2z + 2m^2 c^2 \sin. 4z$ , c'est la première partie de  $\sin. 2u$ .

Valeur de  
 $\sin. 2u.$

La seconde partie de la valeur de  $\sin. 2u$  est  $\cos. 2z (4mc. \sin. z - 2nc^2 \sin. 2z) = 4mc. \sin. z. \cos. 2z - 2nc^2 \sin. 2z. \cos. 2z = 2mc. \sin. 3z + 2mc. \sin. z - nc^2 \sin. 4z$  (3624, 3625); rassemblant les deux parties de  $\sin. 2u$ , & changeant les signes de la seconde, on a  $\sin. 2u = + 2mc. \sin. z + (1 - 4m^2 c^2) \sin. 2z - 2mc. \sin. 3z + (2m^2 c^2 + nc^2) \sin. 4z$ . Cette quantité multipliée par  $\frac{3}{4} c^2 + \frac{1}{8} c^4$ , donnera le second terme de la série (3335). Pour avoir le troisième terme de cette série, c'est-à-dire,  $\frac{1}{3} c^3 \sin. 3u$ , je considère que par la valeur indéterminée de  $u$  l'on a  $3u = 3z - 6mc. \sin. z$ ; donc  $\sin. 3u = \sin. (3z - 6mc. \sin. z) = \sin. 3z - 6mc. \sin. z. \cos. 3z$  (3619), en prenant  $6mc. \sin. z$  pour son sinus, & supposant son cosinus  $= 1$ ; mais  $6mc. \sin. z. \cos. 3z = 3mc. \sin. 4z + 3mc. \sin. 2z$  (3624); donc  $\sin. 3u = \sin. 3z - 3mc. \sin. 4z + 3mc. \sin. 2z$ . Il faut multiplier cette valeur par  $\frac{1}{3} c^3$  pour avoir le troisième terme de la série (3335).

3340. L'anomalie moyenne  $z = u + 2c \sin. u$ , &c. (3335), donc  $u = z - 2c \sin. u - (\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4) \sin. 2u - \frac{1}{3}c^3 \sin. 3u - \frac{5}{32}c^4 \sin. 4u$ ; il faut substituer à la place de  $\sin. u$ ,  $\sin. 2u$ , &c. les valeurs que nous avons trouvées; mais ne prenons d'abord que les termes qui renferment  $\sin. z$ , nous aurons l'équation suivante,  $u = z - 2c(1 - \frac{3}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}nc^2 + \frac{3}{4}c^2.2mc) \sin. z$ ; la somme de tous ces coefficients doit être égale à  $2mc$ , puisque  $u = z - 2mc \sin. z$ , &c. par la supposition. Egalant donc le coefficient indéterminé  $-2mc$ , avec celui que nous avons trouvé, l'on aura  $m = 1 - \frac{3}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}nc^2$ ; on pourra prendre l'unité à la place de  $m$  pour la substituer dans les termes où sera  $c^2$ , parce que les termes suivans donneroient des  $c^4$ , que nous négligeons ici; nous verrons bientôt l'usage de cette équation.

Expressions  
des coefficients  
indéterminés.

3341. Examinons actuellement les termes où est  $\sin. 2z$ , pour avoir le 3<sup>e</sup> terme de la série indéterminée qui est la valeur de  $u$ , savoir  $nc^2 \sin. 2z$ ; la première partie vient de  $\sin. u$ , & ce fera  $-(mc - \frac{1}{3}m^3c^3 - mn c^3 - \frac{1}{2}p c^3)$  à multiplier par  $2c$ . La seconde partie vient de  $\sin. 2u$ , & c'est  $(\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4)(1 - 4m^2c^2)$  (on néglige  $c^4$ ). La troisième partie vient de  $\sin. 3u$ , dans lequel on trouve  $3mc \sin. 2z$ , qu'il faut multiplier par  $\frac{1}{3}c^3$  (3339).

Ainsi en rassemblant ces trois parties qui multiplient  $\sin. 2z$ , on aura la quantité qui doit être égale au troisième terme  $nc^2 \sin. 2z$  (3336), donc  $n = 2m - \frac{3}{4} - \frac{2}{3}m^3c^2 - 2mn c^2 - p c^2 - \frac{1}{8}c^2 + 3m^2c^2 - m c^2$ , & faisant  $m = 1$  dans les termes où il y a  $c^2$ , on aura  $n = 2m - \frac{3}{4} + (\frac{2}{3} - 2n - p)c^2$ ; nous en ferons usage ci-après.

On rassemblera de même dans les valeurs de  $\sin. u$ ,  $\sin. 2u$ ;  $\sin. 3u$ , tous les termes où il y a  $\sin. 3z$ ; ceux de  $\sin. u$  se multiplieront par  $2c$ , & ainsi des autres, la somme devant être égale au quatrième terme  $p c^3 \sin. 3z$  de la valeur supposée de  $u$ , l'on aura  $p c^3 = 2c(\frac{1}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}n c^2) - 2mc(\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4) + \frac{1}{3}c^3$ ; d'où il suit que la valeur de  $p$ , en changeant les signes, parce que dans l'expression de  $u$  tous les termes sont négatifs (3340),

& négligeant  $-\frac{1}{4} m^2 c^2$ , fera  $p = -m^2 - n + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ , dont nous trouverons plus bas la valeur.

Les termes où il y a  $\sin. 4z$ , pris dans les valeurs de  $\sin. u$ ,  $\sin. 2u$ ,  $\sin. 3u$ , & multipliés chacun par leur coefficient, doivent être égalés avec  $q c^4$ , ce qui donnera  $+ q c^4 = + c^4 (-mn - \frac{1}{3} m^3 + p + \frac{1}{2} m^2 + \frac{1}{4} n - m)$ ; d'où il est aisé de tirer la valeur de  $q$ . C'est ici le dernier des quatre coefficients  $m, n, p, q$ , que nous avons à déterminer. Passons à la manière de trouver leurs valeurs par les quatre équations où ces coefficients sont mêlés.

Valuers des  
coefficiens  
séparées.

3 3 4 2. On a d'abord  $m = 1 - \frac{1}{2} m^2 c^2 + \frac{1}{2} n c^2$  (3340); à la place de  $n$  on mettra  $2m - \frac{1}{3}$ , en négligeant les termes ultérieurs, & à la place de  $m$ , dans les termes où il y a  $c^2$ , ce qui donnera  $m = 1 - \frac{1}{8} c^2$ . On cherchera ensuite la valeur de  $p = -m^2 - n + \frac{1}{2} m - \frac{1}{3}$ , & faisant  $m = 1, n = \frac{1}{3}$ , on aura  $p = -\frac{1}{12}$ . De même  $n = \frac{1}{4} + (\frac{1}{12} - 2n - p) c^2 = \frac{1}{4} + (-\frac{1}{24} - p) c^2$  où l'on pourroit mettre pour  $p$  sa valeur  $-\frac{1}{12}$ .

Enfin l'on auroit la valeur de  $q$ , en substituant dans sa valeur tirée de l'équation ci-dessus,  $m = 1, n = \frac{1}{4}$  &  $p = -\frac{1}{12}$ ; mais ne voulant pas pousser l'approximation plus loin que  $c^3$ , nous avons  $u = z - (2c - \frac{1}{4} c^3) \sin. z + (\frac{1}{4} c^2) \sin. 2z - \frac{1}{12} c^3 \sin. 3z$ .

3 3 4 3. Telle est la formule que j'ai annoncée dans l'article 1247, & dont j'ai employé le premier terme (1291). M. Jeaurat a donné une semblable formule, (*Mém. prés. T. IV. pag. 535*) où il a employé même  $c^6$  &  $\sin. 6z$ ; mais ayant voulu détailler ici le procédé du calcul, il eût été trop long d'y employer autant de termes; voici seulement l'expression entière d'après M. Jeaurat:  $u = z + (-2c + \frac{1}{4} c^3 - \frac{1}{96} c^5) \sin. z + (\frac{1}{4} c^2 - \frac{1}{24} c^4 + \frac{1}{192} c^6) \sin. 2z + (-\frac{1}{12} c^3 + \frac{4}{64} c^5) \sin. 3z + (\frac{1}{96} c^4 - \frac{4}{480} c^6) \sin. 4z - \frac{1}{960} c^5 \sin. 5z + \frac{1}{960} c^6 \sin. 6z$ .

Expression  
de l'anoma-  
lie vraie.

Les calculs précédens que je n'ai fait qu'indiquer, pourront servir d'exemple, & exercer ceux qui auront envie de faire des progrès dans ce genre de calcul, qui

## Remarques pour les calculs de l'Attract. 499

est d'un usage continuel & indispensable dans toutes les théories d'astronomie.

On voit par-là que le terme principal de l'équation est  $2c \sin. z$ , c'est-à-dire, la double excentricité multipliée par le sinus de l'anomalie moyenne. Si au lieu de  $2c$  on mettoit la plus grande équation elle-même, en la nommant  $e$ , comme nous l'avons fait (1291); on auroit l'équation dans tout autre point, égale à  $e \sin. z$ , en négligeant les termes suivans, qui sont ordinairement fort petits. En effet, pour calculer la valeur de  $2c \sin. z$ , il faudroit réduire en secondes la double excentricité  $2c$  (1242), & ce feroit à peu-près la plus grande équation.

3344. On trouveroit, par une méthode semblable, la valeur  $r$  du rayon vecteur; voici celle que M. Jeurat a donnée dans le même livre (pag. 605);  $r = 1 + \frac{1}{2}c^2 + (c - \frac{3}{8}c^3 + \frac{5}{12}c^5 - \frac{5}{9216}c^7) \cos. z + (-\frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{3}c^4 - \frac{1}{16}c^6 + \frac{1}{180}c^8) \cos. 2z + (\frac{3}{8}c^3 - \frac{4}{128}c^5 + \frac{5}{5120}c^7) \cos. 3z + (-\frac{1}{3}c^4 + \frac{2}{3}c^6 - \frac{8}{45}c^8) \cosin. 4z + (\frac{1}{32}c^5 - \frac{4}{9216}c^7) \cos. 5z + (-\frac{2}{80}c^6 + \frac{1}{1440}c^8) \cos. 6z + \frac{1}{46080}c^7 \cos. 7z - \frac{1}{315}c^8 \cos. 8z$ . Ces formules peuvent servir à résoudre le problème de Képler; je préfère ordinairement la méthode indirecte (1238), mais celle-ci a son avantage, quand il s'agit de construire des tables. Rayon vecteur.

3345. M. l'Abbé Boffut dans un mémoire sur l'orbite des planètes imprimé en 1766, à la fin de ses *Recherches sur les altérations du mouvement moyen*, qui remportèrent le prix de l'académie en 1762, a donné une solution analytique, très-élégante & très-simple de ce problème de Képler.

## Remarques pour les calculs de l'Attraction.

3346. LES élémens du calcul des perturbations célestes que je vais bientôt expliquer, ont été si peu connus de la plupart des auteurs élémentaires, & si négligés par ceux qui pouvoient les donner, que je me crois obligé d'être long dans mon Introduction; voici donc encore

plusieurs propositions élémentaires qu'il est nécessaire de bien entendre pour passer au livre suivant.

3347. Deux quantités finies qui ne diffèrent entre elles que d'un infiniment petit, sont égales, même dans le calcul différentiel, où il ne s'agit cependant que du calcul des quantités infiniment petites : en effet, le calcul différentiel ne consiste que dans les rapports qu'ont entre elles des quantités infiniment petites (3300) ; ainsi une quantité infiniment petite ne peut pas se négliger par rapport à une autre quantité de même espèce ; mais par rapport à une quantité finie elle est totalement nulle, elle n'y ajoute rien & n'en peut rien ôter. Soit un triangle rectiligne  $BKL$  rectangle en  $B$  (fig. 292), dont l'angle  $B$  & le côté  $KL$  sont infiniment petits, l'angle  $L$  ne diffère de l'angle droit que de la quantité de l'angle infiniment petit  $B$  ; dès-lors il peut être pris également pour un angle droit sans qu'il puisse en résulter de l'inexactitude dans le calcul des infiniment petits. Pour en sentir la vérité tirons  $LD$  parallèle à  $BK$  &  $ED$  parallèle & égale à  $KL$ ,  $ED$  sera égale à  $KL$ , soit qu'on prenne l'angle  $DLK$  qui est évidemment un angle droit, soit qu'on prenne l'angle  $FLK$  qui en diffère d'un angle infiniment petit  $FLD$ , car la ligne  $EF$  ne diffère de  $LD$  que d'une quantité  $FD$  qui est un infiniment petit du second ordre (3349), & par conséquent absolument négligeable, même dans le calcul des infiniment petits.

3348. Il en est même dans les triangles sphériques ; l'arc  $CBF$  (fig. 327), étant infiniment voisin de l'arc  $CEG$ , si l'on tire  $BE$  perpendiculaire à  $CB$ , elle sera également perpendiculaire sur  $CE$ , parce que l'angle  $E$  ne diffèrera de l'angle  $B$  que d'un infiniment petit, & ce qui pourroit en résulter dans les rapports des quantités infiniment petites comme  $ED$ ,  $DB$ ,  $BE$ , ne seroit qu'un infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire, infiniment plus petit que les infiniment petits ; comme je l'ai supposé (3746, & suiv.).

3349. DANS UN TRIANGLE  $BGH$  (fig. 292), dont l'angle  $B$  est infiniment petit, &  $BH$  un côté infiniment petit,  $GH$  est toujours un infiniment petit du second ordre.

Fig. 292.

Planche XL1.

Fig. 327.

Fig. 292.



DÉMONSTRATION. Si l'on prenoit une quantité finie, comme  $BL$ , l'arc  $KL$  qui mesure l'angle  $B$  seroit de même ordre, c'est-à-dire, un infiniment petit du premier ordre; mais  $BH$  est infiniment plus petit que  $BL$ , donc  $GH$  est infiniment plus petit que  $KL$ , ou que l'angle  $B$  dont  $KL$  est la mesure; donc si l'angle  $B$  est infiniment petit, aussi bien que le côté  $BH$ , la ligne  $GH$  fera un infiniment petit du second ordre.  $C. Q. F. D.$

3350. COROLLAIRE. Si à l'angle  $B$  qui est infiniment petit du premier ordre, on ajoutoit un infiniment petit du second ordre, il n'en résulteroit sur  $GH$  qu'un infiniment petit du troisième, car puisque  $B$  étant infiniment petit du premier, n'a produit pour  $GH$  qu'un infiniment petit du second; si vous l'augmentez d'un infiniment petit du second vous n'aurez fait sur  $GH$  qu'une augmentation infiniment plus petite, c'est-à-dire, du troisième ordre.

3351. Il faut aussi considérer que  $BG$  ne diffère de  $BH$  que d'une quantité infiniment plus petite que  $GH$ , car  $BG$  étant pris pour sinus total,  $BH$  fera le cosinus de l'angle  $B$ , mais le cosinus d'un arc infiniment petit diffère du rayon d'une quantité infiniment plus petite que l'arc (3316), ou qui est par rapport au rayon un infiniment petit du second ordre; donc en supposant  $GH$ , perpendiculaire sur  $BH$ ,  $BG$  ne diffère de  $BH$  que d'un infiniment petit du troisième ordre, si  $BG$  est lui-même un infiniment petit, ainsi nous les prendrons l'un pour l'autre (3390, &c.).

3352. Delà il suit que si l'on tire une tangente  $PA$  (fig. 291) à un arc  $PB$  infiniment petit, le petit écart de la tangente, ou la quantité  $AB$  ne différera du sinus versé  $PC$  de l'arc  $PEB$ , que d'une quantité infiniment plus petite que  $AB$ . Soit tirée  $BG$  parallèle & égale à  $CP$ ; l'angle  $ABG = PSA$  est infiniment petit, donc les lignes  $AB$  &  $BG$  diffèrent d'une quantité infiniment plus petite que n'est  $AG$ , c'est-à-dire, infiniment petite du second ordre par rapport à  $AB$ , & infiniment petite du quatrième ordre, dans le cas où  $AB$  est elle-même un infiniment petit du second (3353).

Fig. 291.

Valeur du  
sinus versé.  
Fig. 315.

3353. LE SINUS VERSE  $AE$  (fig. 315), d'un arc infiniment petit  $AP$  est égal à  $\frac{AP^2}{AD}$ ; car par la propriété connue du cercle,  $EP^2 = AE \cdot ED$ , donc  $AE = \frac{EP^2}{ED}$ , mais  $ED$  ou  $ED + EA$ , c'est-à-dire,  $AD$  sont absolument la même chose, puisque  $AE$  est infiniment petite (3347), donc  $AE = \frac{EP^2}{AD}$ ; à la place de  $EP$  nous pouvons mettre l'arc  $AP$ , qui n'en diffère que d'un infiniment petit du troisième ordre (3315), donc nous aurons  $AE = \frac{AP^2}{DA}$ .

Ecart de la  
tangente.

Si dans la figure 291, on suppose l'arc  $PB$  infiniment petit, on aura  $PC = \frac{PB^2}{2PS} = BG$ ; mais on a vu que  $BG$  ne diffère pas de  $BA$  (3352); donc l'écart de la tangente, ou la petite ligne  $AB = \frac{PB^2}{2PS}$ , qui est un infiniment petit du second ordre. On verra dans le livre suivant que cette expression est du plus grand usage pour la théorie des forces centrales (3391, 3396, 3416).

Comment on  
choisit les uni-  
tés dans le cal-  
cul.

3354. LE CHOIX DES UNITÉS, ou l'usage des équations qui n'expriment que des rapports, est une manière utile de simplifier les calculs; nous en avons fait un usage fréquent dans ce livre; mais de crainte que cela ne paroisse embarrassant, ou même suspect à quelques lecteurs, je vais en expliquer le principe de la façon la plus élémentaire.

Fig. 291.

Toutes les fois qu'on a une proportion on peut la réduire à une équation; par exemple, si l'on a deux arcs très-petits  $PE$  &  $PB$  (fig. 291), l'on aura cette proportion  $PD : PC :: PE^2 : PB^2$  (3353), d'où l'on tirera l'équation  $PC = \frac{PD \cdot PB^2}{PE^2}$ . Supposons que l'abscisse  $PD$  soit d'une ligne & l'arc  $PE$  d'une seconde, & qu'on veuille exprimer toutes les abscisses comme  $PC$  en lignes, & tous les arcs  $PB$  en secondes, on a  $PD = 1$  &  $PE = 1$ , donc l'équation précédente  $PC = \frac{PD \cdot PB^2}{PE^2}$  se réduit à celle-ci,  $PC = PB^2$ , qui m'apprend que quand  $PB$  fera de deux

seconde ou égale à 2, l'abscisse  $PC$  sera  $= PE^2$  ou égale à 4, c'est-à-dire, de 4 lignes, & ainsi de toutes les autres valeurs de  $PC$ . Donc au moyen de ce qu'on a pris  $PD$  pour unité des abscisses, &  $PE$  pour unité des arcs, on aura  $PC = PB^2$ , quoique la ligne  $PC$  soit hétérogène à l'arc  $PB$ , ou d'une espèce toute différente.

3355. Lorsqu'on a des temps  $t$  &  $T$ , des espaces  $e$  &  $E$ , des vitesses  $u$  &  $V$  à comparer ensemble, on fait par la nature du mouvement que l'espace  $e$  est à l'espace  $E$  en raison composée de la vitesse  $u$  à la vitesse  $V$ , & du temps  $t$  au temps  $T$ ; car les corps parcourent d'autant plus d'espace que leur vitesse est plus grande & dure plus long-temps; on aura donc  $e : E :: tu : TV$ , mais si l'on prend le temps  $t$  d'une seconde pour unité, l'espace  $e$  d'un pied pour unité des espaces, & la vitesse  $u$  d'un pied par seconde pour unité des vitesses, l'on aura simplement  $E = TV$ , qui nous apprend que quand la vitesse  $V$  sera de deux pieds par seconde, le temps  $T$  de deux secondes, on aura l'espace  $E$  de 4 pieds; cette équation  $E = TV$  exprime ainsi le rapport qu'il y a de  $E$  à  $e$  par le moyen de celui de  $tu$  à  $TV$ , car elle revient au même que s'il y avoit  $\frac{E}{e} = \frac{TV}{tu}$ , équation qui marque l'égalité entre le rapport des espaces  $E, e$ , & celui des produits  $TV, tu$ , de la vitesse & du temps; ainsi l'équation  $E = TV$  est aussi exacte que l'autre, dès qu'on suppose que chacune des lettres  $E, T, V$  exprime une fraction d'une certaine unité, d'espace, de temps, & de vitesse. Il en est de même de l'expression des forces attractives (3386).

3356. La même fraction peut appartenir à différentes unités, en changeant le nombre des parties: deux lignes sont  $\frac{1}{6}$  de pouce, si l'on veut qu'elles soient une fraction de pied, ou de 12 pouces, il faut les multiplier par 12, l'on aura 24 lignes ou deux pouces qui sont également  $\frac{1}{6}$ , mais  $\frac{1}{6}$  de pied, & la fraction n'a point changé. En général lorsqu'une quantité donnée  $a$  est une fraction d'une autre quantité  $A$ , si on veut qu'elle soit

une fraction de  $m A$ , il n'y a qu'à multiplier  $a$  par  $m$ , &  $ma$  sera exprimée en parties de  $m A$ , sans que la fraction change; car  $a : A :: ma : mA$ ; nous ferons usage de cette remarque à l'occasion de la précession (3359).

Un petit arc  
est égal à l'an-  
gle multiplié  
par le rayon.

Fig. 292.

3357. Par une suite de ces principes (3354) nous disons souvent qu'un arc infiniment petit est égal au rayon de l'arc, multiplié par le petit angle dont il est la mesure (2202, 3448, 3520, 3588, &c.). Il est évident que plus on augmentera le rayon  $BK$  (fig. 292), d'un petit arc  $KL$ , & plus on augmentera l'angle  $KBL$ , plus aussi le petit arc  $KL$  augmentera; ainsi les petits arcs comme  $KL$ ,  $GH$  sont en raison composée de leurs rayons, & des angles dont ils sont la mesure. Appellons  $r$  le rayon,  $du$  le petit angle  $KBL$ , &  $dx$  le petit arc  $KL$ ; supposons que pour un rayon d'une perche, on ait un arc d'une ligne & un angle d'une minute, si tous les rayons sont exprimés en perches, les arcs en lignes, & les angles en minutes, on aura toujours  $rdu = dx$ , par exemple, lorsque  $r = 2$  perches &  $du = 2'$  on aura  $dx = 4$  lignes.

3358. On peut concevoir encore autrement la vérité de cette équation  $rdu = dx$ : supposons que l'arc  $dx$  soit exprimé en parties du rayon  $r$ , enforte que  $\frac{dx}{r}$  soit le sinus du petit angle  $du$  (3613); c'est-à-dire, une fraction du rayon (3609); nous aurons précisément la même fraction si nous comparons le petit angle  $du$  avec l'angle de  $57^\circ$  qui est égal au rayon, car le sinus d'un arc infiniment petit est de même longueur que l'arc; ainsi le petit sinus comparé au rayon, ou le petit arc comparé avec l'arc égal au rayon, donneront exactement le même rapport ou la même fraction; donc si nous convenons d'exprimer tous les angles ou arcs en parties de l'arc de  $57^\circ$  comme cela se fait souvent, nous aurons véritablement  $du = \frac{dx}{r}$  ou l'arc égal au sinus, c'est-à-dire,  $rdu = dx$ , parce que  $du$  &  $\frac{dx}{r}$  sont alors des fractions égales.

Lorsque

Lorsque dans ces cas-là, on est obligé de faire du égal à la circonférence entière du cercle pour avoir une intégrale ( 3567, 3585 ), on met le double du nombre 3, 14 pour la circonférence ( 3322 ), c'est-à-dire, 6, 28 qui suppose aussi que l'arc de  $57^{\circ}$  où le rayon du cercle est l'unité.

3359. Les petits arcs dont on fait un usage si fréquent dans les calculs peuvent s'exprimer en secondes, ou en décimales du rayon; quand je dis qu'un arc est d'une seconde, cela veut dire qu'il est  $\frac{1}{1296000}$  de la circonférence entière, puisque l'on divise le cercle en  $360^{\circ}$  ou 1296000"; mais il est souvent plus commode pour le calcul de dire que cet arc est  $\frac{1}{206265}$  du rayon, & l'on y est obligé pour avoir une mesure commune entre les lignes droites & les petits arcs; cela revient au même, puisque la longueur du rayon équivaut à 206265", comme il est aisé de le trouver, en disant : La circonférence ( 3322 ) est à un demi, comme 1296000" est à un quatrième terme, qui sera 206264", 80624.

Les arcs exprimés en décimales du rayon.

Nous avons déjà vu plusieurs occasions où les arcs étoient exprimés en parties du rayon (art. 1242, 1291, 1631 & 2567), au lieu d'être en sec.; nous en verrons encore davantage dans le livre suivant, car dans tous les calculs de l'attraction l'on prend pour unité la distance moyenne de la planète qui est attirée, toutes les autres quantités qu'on trouve sont des parties ou des fractions de celle-ci. Quand on veut à la fin du calcul les avoir en secondes, on les multiplie par 206265" ( 3466, 3471, 3494 ); j'en ai fait sentir la raison ( 1242 ), & j'aurai soin de faire voir dans la suite que toutes les quantités trouvées par le calcul de l'attraction sont des fractions du rayon de l'orbite de la planète ( 3466 ); or il est évident ( puisque la deux cent millièmes partie du rayon vaut une seconde ), que j'aurai autant de secondes qu'il y aura de deux cent millièmes du rayon dans une fraction donnée; donc pour avoir le nombre de secondes il faudra diviser la fraction donnée par la deux cent millième partie du rayon; cela nous apprendra combien cette deux

cent millièrne partie du rayon, c'est-à-dire, une seconde ; est comprise de fois dans la fraction donnée ; ainsi en divisant une fraction du rayon par  $\frac{1}{206265}$ , ou ce qui revient au même, en la multipliant par 206265, nous aurons la quantité de secondes qu'elle contient : il est aisé de sentir que puisque le rayon est 200 mille fois plus petit que les secondes, les parties de secondes seront 200 mille fois plus grandes que les parties du rayon.

Les détails contenus dans ce XXI<sup>e</sup> livre étoient absolument nécessaires pour servir d'introduction au livre suivant, & j'aurai soin de citer les articles précédens toutes les fois que j'en supposerai l'usage ; j'y ai renfermé une espèce d'introduction à la géométrie nouvelle & à l'analyse des Infinis : mais comme le plus bel usage qu'on puisse faire de la géométrie transcendante, est la recherche des mouvemens planétaires, j'ai borné mon introduction aux articles qui peuvent servir dans ce genre de théorie. Je passe donc à l'explication de cette importante loi de l'attraction ; je tâcherai de faire voir d'abord par quels degrés on est parvenu à une aussi belle découverte ; & comme elle a été contestée assez long-temps, je la démontrerai d'une manière à lever tous les doutes, même pour ceux qui ne veulent point d'algèbre ; enfin, j'y appliquerai le calcul, pour faire voir d'une manière convaincante l'accord du principe de l'attraction avec les principaux phénomènes de l'univers. Ce petit Traité fut expliqué au collège Royal en 1761, & j'eus pour lors occasion de le rendre aussi élémentaire & aussi clair qu'on avoit paru le desirer.



# LIVRE VINGT-DEUXIEME.

## DE LA PESANTEUR, OU DE L'ATTRACTION DES PLANETES.

**L**A PESANTEUR est cette force que nous éprouvons à chaque instant, par laquelle tous les corps tiennent au globe de la terre, & y retombent d'eux-mêmes aussi-tôt qu'on les en éloigne & qu'ils sont libres.

3360. Cette pesanteur est l'effet d'une force universelle répandue dans toute la Nature, & qui réside dans tous les corps aussi bien que dans le globe de la terre, comme nous le démontrerons bientôt (3374); mais il faut commencer par examiner ses effets sur la terre, avant de la considérer dans le reste de l'univers.

3361. Le premier phénomène qu'on observe dans la pesanteur des corps terrestres, c'est la vitesse avec laquelle ils tombent vers la terre: tous les corps, grands ou petits, quels que soient leur étendue, leur volume, leur densité & leur masse, commencent à tomber avec une vitesse de 15 pieds par seconde (ou plus exactement, 15,0515 sous l'équateur); mais après avoir parcouru 15 pieds dans la première seconde de temps, ils en parcourent trois fois autant dans la suivante, cinq fois autant dans la troisième; les espaces parcourus sont comme les nombres impairs, 1, 3, 5, 7, 9, &c. Galilée reconnut le premier cette loi, confirmée ensuite par toutes les expériences.

Accélération  
des graves.

3362. De là il résulte évidemment que les espaces parcourus sont comme les carrés des temps; car le corps qui n'avoit parcouru qu'une perche à la fin de la première seconde, se trouve en avoir parcouru quatre au bout de deux secondes, neuf après trois secondes, seize, &c. donc les espaces parcourus dans la chute des corps sont comme les carrés 1, 4, 9, 16 des temps 1, 2, 3, 4, que la chute a duré.

Les espaces  
sont comme  
les carrés des  
temps.

Fig. 292.

3363. Ce fait qui est prouvé par expérience est indiqué par la nature même de la chose ; la gravité étant une force continue , agit sans interruption sur le corps qui y est soumis , pendant la durée de sa chute ; dès-lors les espaces qu'elle lui fait parcourir doivent être comme les carrés des temps. En effet , exprimons les instans que dure la chute par les portions d'une ligne  $BK$  (fig. 292), croissante également , & divisée en parties égales  $BG$ ,  $GM$  ; les vitesses du corps qui tombe croissent dans la même proportion , puisque à chaque instant il survient un nouveau degré de vitesse égal au précédent , qui ne le déçoit point , mais qui se joint avec lui ; ces vitesses peuvent donc s'exprimer légitimement par les ordonnées  $GH$ ,  $IL$  du triangle , puisque ces ordonnées croissent uniformément , ou comme les temps  $BG$ ,  $BK$ . Les espaces parcourus à chaque instant doivent être d'autant plus grands que l'instant est plus long & la vitesse plus grande ; mais puisque les instans sont exprimés par  $BG$  ou  $BK$ , & les vitesses par  $GH$  ou par  $KL$ , la valeur absolue des espaces parcourus pourra être exprimée par le produit des lignes  $BG$  &  $GH$ , ou par celui des lignes  $BK$  &  $KL$ , c'est-à-dire , dans chaque cas par la surface du triangle ; mais la surface du petit triangle est à celle du grand , comme le carré de  $LG$  est à celui de  $BK$  ; donc les espaces parcourus sont comme les carrés des temps.

3364. Les espaces étant comme les carrés des temps , & les vitesses comme les temps pendant lesquels elles ont été acquises , les espaces sont comme les carrés des vitesses ; donc les vitesses sont comme les racines des espaces parcourus , c'est-à-dire , des hauteurs d'où les graves doivent tomber pour acquérir ces vitesses. On peut dire également que les vitesses sont comme les racines des hauteurs doubles , c'est-à-dire , des espaces qui seroient parcourus uniformément avec les mêmes vitesses acquises.

Cela est commun à toutes les forces.

3365. On doit étendre cette proposition à toute force attractive constante , c'est-à-dire , à toute force qui agit uniformément , constamment , & sans interruption ; les espaces parcourus sont nécessairement alors comme



les carrés des temps ; nous ferons souvent usage de cette remarque, nous supposerons toujours que si  $f$  est la force,  $dt$  le petit intervalle de temps, &  $de$  le petit espace, on doit avoir  $fdt^2 = de$  ; ainsi pour comparer la force d'une planète quelconque avec la force que la terre exerce sur les corps graves,  $f$  étant supposée la force accélératrice d'une autre planète, comme la lune, en sorte que  $f$  soit  $\frac{1}{7}$  de la force de la terre, à pareille distance, &  $dt$  un nombre de secondes comme  $4''$ , on aura l'espace que cette force  $f$  feroit parcourir en  $4''$  égal à  $fdt^2 = \frac{1}{7} \cdot 16$ , ou  $\frac{16}{7}$  des 15 pieds que la terre fait parcourir aux corps terrestres (3361). Si la force n'est pas constante & uniforme, l'augmentation de la vitesse est à chaque moment en raison composée de la force, & du temps pendant lequel cette force s'exerce, comme nous l'avons supposé (2198).

3366. De ce que toutes les forces accélératrices constantes font parcourir des espaces qui sont comme les carrés des temps, j'ai aussi conclu que les équations séculaires doivent être comme les carrés des temps (1166), & cela suit des mêmes raisonnemens ; car si la cause agit toujours également, & que son effet ne soit jamais détruit, cet effet croitra comme les carrés des temps.

3367. La même loi s'observe dans les mouvemens célestes ; une planète ne se meut dans une orbite, que parce qu'elle est sans cesse retenue par une force centrale, (1231 & suiv.) ; aussi l'écart de la tangente, ou la petite ligne  $AB$  (fig. 291) qui marque l'effet de la force centrale, & la quantité dont cette force retire la planète du mouvement rectiligne, est comme le carré des temps qui sont exprimés par les petits arcs décrits (3353).

3368. La force accélératrice qui agit continuellement sur les graves, & qui fait parcourir à chaque instant un petit espace  $de$ , est proportionnelle à cet espace ; si cet espace  $de$  parcouru à chaque instant étoit double, nous dirions que la force est double ; car nous n'avons pas d'autre manière d'exprimer une force que par l'espace qu'elle fait décrire en un temps donné ; ainsi nous

Fig. 291.

Mesure de  
la force accé-  
lératrice.

supposérons toujours que la force accélératrice est proportionnelle à l'espace qu'elle fait parcourir, dans un petit espace de temps.

Pl. XLII.  
Fig. 331.

3369. Quand un corps au lieu de descendre verticalement descend le long d'un plan incliné, sa vitesse est moindre le long du plan, parce qu'il n'y a qu'une partie de la gravité naturelle qui soit employée à agir le long du plan. Soit le plan  $NA$  (fig. 331); supposons la gravité naturelle exprimée par la ligne verticale  $BA$ , elle se décompose en deux forces  $BN$  &  $NA$  (1232), & il n'y a que la force  $NA$  qui soit employée à faire descendre le corps  $N$  le long du plan  $NA$ ; si donc  $NA$  n'est que la moitié de  $BA$ , la force accélératrice du corps  $N$  sera diminuée de moitié; & le corps emploiera le même temps à parcourir le plan incliné  $NA$ , ou la ligne verticale  $BA$ ; ainsi dans un cercle  $BNMA$ , toutes les cordes telles que  $MA$ ,  $NA$ ,  $BA$ , sont parcourues exactement dans le même espace de temps.

Fig. 332.

3370. Si deux corps descendent l'un dans une courbe  $KI$  (fig. 332), & l'autre dans une ligne droite verticale  $CDEF$ , qu'ils soient à mêmes hauteurs par rapport aux points d'où ils sont partis, & sur une même ligne horizontale  $EI$ , ces corps ont la même vitesse ou la même quantité d'accélération. En effet, que  $DE = IN$  exprime la force centripète, qui est la même pour tous les deux; la force  $NI$  se décompose, suivant  $NT$  &  $TI$ , & la force  $TI$  est la seule qui concoure à augmenter le mouvement; donc les accélérations des deux corps sont comme les forces accélératrices  $DE$  &  $TI$ , & comme les temps pendant lesquels elles durent (3368); ces temps sont ::  $DE : KI$  (3369), donc les accélérations sont comme  $DE^2 : TI.KI$ ; mais ces deux quantités sont égales, parce que les triangles semblables  $KNI$ ,  $TNI$  donnent cette proportion  $KI : NI$  ou  $DE :: NI : TI$ ; donc les accélérations des deux corps sont égales.

Mouvement  
d'oscillation.

Delà il suit que lorsqu'un pendule  $CF$  oscille dans un arc de cercle  $KF$  en partant du point  $G$ , sa vitesse accélératrice en  $K$  est égale à celle du corps libre qui seroit tombé de

$C$  en  $D$ ; c'est-à-dire, qu'elle est comme la racine de la hauteur  $CD$  (3364).

3371. TROUVER la durée de l'oscillation du pendule  $CN$  (fig. 331), dans un arc  $AN$  supposé infiniment petit. Fig. 331.

Considérons le corps qui décrit l'arc  $NMI$ , lorsqu'il est au point  $M$  de sa chute; tirons les cordes  $AM$ ,  $AN$ ; ces cordes étant infiniment proches l'une de l'autre, leur différence pourra être prise pour l'arc  $NI$ , il n'en différerait que d'un infiniment petit du troisième ordre (3315). Soit  $AC=a$ ,  $AQ=b$ ,  $AP=x$ , & ayant décrit sur  $AQ$  un demi-cercle  $AKQ$ , soit l'arc  $AR=z$ . A cause des triangles semblables  $ANB$ ,  $ANQ$ , l'on a  $AB:AN::AN:AQ$ , ou  $AN=\sqrt{2ab}$ ; de même à cause des triangles  $AMB$ ,  $AMP$ , l'on aura  $AB:AM::AM:AP$ , ou  $AM=\sqrt{2ax}$ , donc la différence de ces deux lignes ou l'arc  $NI=\sqrt{2ab}-\sqrt{2ax}$ ; prenons la différentielle  $Mm$  de cet arc  $NI$ , afin d'avoir un mouvement uniforme pendant le temps que le corps parcourra  $Mm$ ; cette différentielle (3298) est  $\frac{2adx}{2\sqrt{2ax}}$  ou

$\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{2x}}$ ; c'est le petit espace parcouru, c'est-à-dire,  $Mm$ .

La vitesse acquise par le corps depuis  $N$  jusqu'en  $M$  est comme la racine de la hauteur, ou  $\sqrt{2(b-x)}$  (3364), donc le temps  $dt$  employé à parcourir  $Mm$ , ou l'espace divisé par la vitesse, sera  $=\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{2(b-x)}\sqrt{2x}}=\frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{bx-xx}}$ .

Dans un arc  $AM$  dont le rayon est  $\frac{1}{2}b$ , & l'abscisse  $b-x$  la différentielle de l'arc est à celle du cosinus, ou à celle de  $AP$ , comme le rayon est au sinus qui est  $\sqrt{bx-xx}$ , donc  $dz=\frac{-bdx}{2\sqrt{bx-xx}}$ ,  $\frac{2dz}{b}=\frac{-dx}{\sqrt{bx-xx}}$ ; donc  $dt$ , ou

$\frac{dx}{\sqrt{bx-xx}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{2dz}{b} \cdot \frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{dz\sqrt{a}}{b}$ , dont l'intégrale  $t=z$   
 $\frac{\sqrt{a}}{b}=\frac{\text{arc } AR}{AQ} \cdot \sqrt{AC}$ . Si l'on fait  $AR=180^\circ$ , &  $c$  égal

à la circonférence pour le diamètre 1, l'on aura  $\frac{c}{2}=\frac{\text{arc } R}{AQ}$ , &  $t=\frac{c}{2}\sqrt{AC}$ . Le temps par  $AB=2a$  est  $=$

*Fig. 331.*  $\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$ , & le temps de l'oscillation entière  $c\sqrt{AC} = c\sqrt{a}$ , donc le temps par  $BA$  est à celui de l'oscillation entière ::  $2\sqrt{a} : c\sqrt{a} :: 2 : c :: 1 : \frac{c}{2}$ . Les espaces parcourus étant comme les carrés des temps, un espace quatre fois moindre se parcourt dans la moitié du temps; donc les oscillations entières sont au temps par la moitié du pendule  $CA$ , ou le quart du diamètre  $BA$  comme la circonférence est au diamètre. C'est le théorème de M. Huygens, (*Horol. oscill.*), dont nous ferons usage pour déterminer la distance de la lune à la terre (3421).

Dela il suit 1°, que la durée de chaque oscillation augmente comme la racine de la longueur du pendule, ou que la longueur du pendule est en raison inverse du carré du nombre d'oscillations, 2°, que si la pesanteur varie en différens points de la terre, la longueur du pendule à secondes est comme le carré du nombre des oscillations (2699).

Il ne fera pas inutile de résoudre une difficulté qui peut se présenter naturellement sur la durée de cette oscillation le long de l'arc  $NMA$ ; on suppose l'arc égal à la corde, cependant la corde seroit parcourue dans un temps égal à celui de la chute  $BA$ , qui est de  $38'''$ , & l'arc  $NMA$  est parcouru dans l'espace de  $30'''$ , quantité qui est sensiblement différente de la première; cela vient de ce que la distribution de la vitesse accélérée du corps qui tombe le long de l'arc ou le long de la corde est fort différente; le point  $M$  de l'arc & le point  $D$  de la corde, situés sur la ligne horizontale  $MDP$  sont ceux où la vitesse acquise est la même, or  $NM$  &  $ND$  diffèrent entre elles d'une quantité qui leur est comparable, & qui ne peut point se négliger, parce que l'angle  $D$  est un infiniment petit du second ordre, étant opposé au sinus versé  $PA$  qui est du même ordre (3353), lorsqu'on suppose  $AM$  un infiniment petit du premier. (*Mém. acad.* 1744, pag. 386.).

Espace parcouru en une seconde.

3372. L'espace que les corps graves parcourent en une seconde par l'effet de la pesanteur se trouve avec beaucoup

beaucoup de précision, & à un quart de ligne près, par le moyen du pendule à secondes; si l'on appelle  $p$  la longueur du pendule à secondes (2699), &  $c$  la circonférence (c'est à peu-près le nombre 3), on aura pour l'espace parcouru en  $1''$ ,  $\frac{p c^2}{2}$ . En effet la circonférence est au diamètre, comme le temps d'une petite oscillation ou d'une seconde est au temps qui répondroit à la descente perpendiculaire sur la moitié du pendule à secondes ou d'environ 18 pouces, en sorte que ce temps est de  $19'''$ , car  $355 : 113 :: 60''' : 19'''$ ; mais les espaces parcourus sont comme les carrés des temps, donc  $(19''')^2 : (60''')^2 :: 18 \text{ pou.} : 15 \text{ pieds}$ , ::  $(113)^2 : (355)^2$  ou  $1 : c^2 :: \frac{p}{2} : \frac{p c^2}{2}$ ; Sous l'équateur.  
 cette quantité est de 15 pieds, 0515 sous l'équateur où le pendule est de 36 pou. 7 lig. 21. Il suffit d'ajouter le log. constant 8,5349074 avec celui du pendule en un lieu quelconque, réduit à la température dans le vide, & a des arcs très-petits, exprimé en lignes pour avoir l'espace parcouru en une seconde, exprimé en pieds.

3373. Ainsi la longueur du pendule, observée sous l'équateur & sous le cercle polaire (2699), nous ayant fait connoître que l'espace parcouru en une seconde est 15,0515 sous l'équateur au niveau de la mer, & 15,117 dans le nord, ces espaces étant entre eux comme 230 est à 231, on en conclut que la pesanteur est plus grande sous le cercle polaire de  $\frac{1}{130}$  que sous l'équateur.

3374. Après avoir vu l'effet de la pesanteur sur la terre, examinons si cette force a lieu dans les autres corps célestes. Leur figure ronde suffit d'abord pour démontrer qu'il y a dans chaque planète une pesanteur semblable à celle qu'on éprouve sur notre globe. La terre s'est arrondie dès l'instant de sa formation, & la mer qui l'environne s'arrondit également, parce que toutes les parties tendent vers un centre commun, autour duquel elles se disposent & s'arrangent pour trouver l'équilibre : nous faisons abstraction de la petite différence produite par la force centrifuge (3582). Cet équilibre ne pourroit avoir lieu si une partie

La pesanteur est universelle.

de l'océan étoit plus éloignée du centre que l'autre (2660); voilà pourquoi la pesanteur mutuelle des parties d'un corps, doit nécessairement y produire la rondeur.

3375. Il y a donc dans toutes les planètes une pesanteur semblable à celle qu'on éprouve sur la terre; ainsi la matière de la terre n'est pas la seule qui soit douée de cette faculté de retenir & d'attirer les corps environnans; de là il étoit naturel de conclure qu'il y avoit dans la matière en général une force attractive, & que par-tout où il y avoit de la matière, il y avoit une attraction. Suivons donc le progrès de nos connoissances, & voyons comment a dû se découvrir cette fameuse loi de l'attraction universelle, source de tant d'autres découvertes, & d'où l'on tire encore chaque jour les conséquences les plus singulières & en même temps les plus conformes à l'observation.

Les anciens  
l'avoient com-  
prise.

3376. ANAXAGORE, Démocrite, Epicure admettoient déjà cette tendance générale de la matière vers les centres communs, soit sur la terre, soit ailleurs; Plutarque en parle d'une manière bien claire, dans l'ouvrage sur la cessation des oracles (pag. 471. édition de Francfort, 1600); où il explique comment chaque monde a son centre particulier, ses terres, ses mers, & la force nécessaire pour les assembler & les retenir autour du centre.

Elle est ad-  
mise par Co-  
pernic, Ty-  
cho & Képler.

COPERNIC avoit la même idée de l'attraction générale, car il attribuoit la rondeur des corps célestes à la tendance qu'ont leurs différentes parties à se réunir (*de Revolut. c. 9*), d'où il suivoit que cette tendance avoit lieu dans chaque planète, aussi bien que sur la terre. TYCHO lui-même admettoit une force centrale dans le soleil (1097), pour retenir les planètes dans leurs orbites autour de lui, quoique cette attraction fut difficile à concilier avec son système. KÉPLER, génie plus vaste & plus hardi que tous ceux qui l'avoient précédé, porta ses idées plus loin, il sentit que l'attraction étoit générale & réciproque, & que l'attraction du soleil devoit s'étendre jusqu'à la terre (*De Stella Maris, 1609. Epist. astron. Cop. 1618, pag. 555. Hist. des Math. par M. MONTUCLA, 1758, Tom. II, pag. 213, 527,*

538) ; dans la préface de ce livre fameux , où il démontra le premier que les orbites des planètes n'étoient point circulaires ( 1206 ) ; il dit précisément que si la lune & la terre n'étoient pas en mouvement , elles s'approcheroient l'une de l'autre , & se réuniroient à leur centre de gravité commun. Il dit ailleurs que l'action du soleil produit les inégalités de la lune ; que l'action de la lune produit le flux & le reflux de la mer ; que le soleil attire les planètes , & en est attiré.

Et comment ne pas tirer cette conséquence des phénomènes que l'on observoit ; la pesanteur des corps terrestres s'étend sur le sommet des montagnes , elle s'étend jusqu'au plus haut des airs , d'où la grêle tombe avec violence aussi-tôt que le froid l'a formée ; il étoit donc évident que cette pesanteur devoit s'étendre plus loin que la terre , & au-delà des nuages qui l'environnent ; la lune n'est pas fort éloignée de la terre , dut dire Képler , elle tourne autour de la terre , elle y présente toujours le même côté , n'y auroit-il point vers la lune un reste de cette pesanteur qui ramène tout à la terre ? Les corps qui tournent en rond s'échappent bientôt par la tangente , s'ils ne sont retenus ( 1231 ) ; la lune devoit s'échapper de son cercle , ( comme une goutte d'eau s'échappe de dessus une meule ) , si la terre n'avoit assez de force pour l'en empêcher. Ce même raisonnement fit trouver ensuite à Newton quelle étoit la loi de cette pesanteur ( 3381 ).

3377. Képler ayant une fois conçu que la lune étoit attirée par la terre , & considérant que chaque planète a sa pesanteur ( 3374 ) , devoit en conclure que la lune attiroit aussi la terre ; mais en considérant les eaux de la mer qui se soulèvent tous les jours quand la lune passe au méridien , il ne douta plus que ce ne fût - là un effet de l'attraction lunaire.

C'est sur-tout dans sa nouvelle physique céleste ( 1206 ) , que Képler s'exprime sur la gravité , d'une façon bien remarquable pour ce temps-là. Il voyoit d'une manière frappante & lumineuse pour lui , toutes les planètes affujetties au soleil , & la lune à la terre , comme les corps

terrestres que nous avons continuellement sous les yeux ; il sentoît que l'attraction étoit générale entre tous les corps de l'univers ; que deux pierres se réuniroient par leur attraction mutuelle si elles étoient hors de la sphère d'activité de la terre ; que les eaux de la mer s'éléveroient vers la lune si la terre ne les attiroit , & que la lune retomberoit vers la terre sans la force avec laquelle elle décrit son orbite. J'abrège ma traduction pour faire place à ce texte singulier , qui est à la cinquième page de son introduction.

Passage de  
Képler sur  
l'attraction.

*Vera igitur doctrina de Gravitate his innotuit axiomatibus... Si duo lapides in aliquo loco mundi collocarentur propinqui invicem, extra orbem virtutis tertii cognati corporis ; illi lapides, ad similitudinem duorum magneticorum corporum, coirent loco intermedio, quilibet accedens ad alterum tanto intervallo quanta est alterius moles in comparatione. Si luna & terra non retinerentur vi animali, aut alia aliquâ equipollenti, quælibet in suo circuitu, terra ascenderet ad lunam quinquagesimâ quartâ parte intervalli ; luna descenderet ad terram quinquaginta tribus partibus intervalli, ibique jungerentur : posito tamen quod substantia utriusque sit unius & ejusdem densitatis. Si terra cessaret attrahere ad se aquas suas, aquæ marinæ omnes elevarentur & in corpus lunæ influerent. ( Introd. pag. 5 ). Il explique ensuite très-bien les marées par l'attraction de la lune sur l'Océan ( 3590 ).*

La comparaison entre les attractions célestes & celle de l'aimant paroissoit d'autant plus naturelle à Képler , qu'un Physicien Anglois venoit de faire voir que le globe de la terre étoit comme une espèce de grand aimant. *Perbellum equidem attrigi exemplum magnetis, & omnino rei conveniens, ac parum abest quin res ipsa dici possit. Nam quid ego de magnete tanquam de exemplo? Cum ipsa tellus, Gulielmo Gilberto, Anglo, demonstrante, magnus quidam sit magnes; ( cap. 34, pag. 176 ) (a).*

(a) Les découvertes de Képler | bres, Copernic, Tycho & Gilbert ,  
avoient été préparées & annoncées | il leur rend lui-même ce témoignage :  
par les écrits de trois hommes célè- | *Veritatis in me sit amor, an gloria, lo-*



3378. La lecture des ouvrages de Képler suffisoit pour persuader aux savans, que cette attraction de la matière étoit universelle; aussi voyons-nous qu'en Angleterre & en France, même avant Newton, plusieurs auteurs en parlèrent disertement.

On trouve dans Fermat le passage suivant; (*Var. op. Math. pag. 24*). « La commune opinion est que la pesanteur est une qualité qui réside dans le corps même qui tombe; d'autres sont d'avis que la descente des corps procède de l'attraction d'un autre corps qui attire celui qui descend, comme la terre. Il y a une troisième opinion qui n'est pas hors de vraisemblance, que c'est une attraction mutuelle entre les corps, causée par un desir naturel que les corps ont de s'unir ensemble, comme il est évident au fer & à l'aimant; lesquels sont tels que si l'aimant est arrêté, le fer ne l'étant pas l'ira trouver, & si le fer est arrêté, l'aimant ira vers lui; & si tous deux sont libres ils s'approcheront réciproquement l'un de l'autre, enforte toute fois que le plus fort des deux fera le moins de chemin ».

Passage de  
Fermat sur  
l'attraction.

3379. BACON, dans ce livre fameux qui a pour titre *Instauratio magna* ou *Novum organum* (*Liv. II. art. 36, 45 & 48*), parle souvent de l'attraction magnétique de la terre sur les corps graves, de la lune sur les eaux de la mer, du soleil sur Mercure & Vénus; il propose des expériences propres à vérifier ces attractions; & quoiqu'il n'ait paru à la lecture de cet ouvrage que l'auteur n'étoit point au fait de l'astronomie, on voit cependant que ce qu'il dit des attractions célestes étoit propre à fournir des idées très-lumineuses & très-physiques sur la gravité universelle.

Elle est  
adaptée par  
Bacon.

Galilée reconnoissoit aussi cette sympathie de la lune

Par Galilée  
& Hévélius.

quantur dogmata mea, quæ pleraque aliis accepta fero: Totam astronomiam Copernici hypothesebus de mundo, Tycho-nis vero Brahei observationibus, denique Guilielmi Gilberti Anglimagneticæ philosophiæ inædifico. Epit. Astr. Cop. pag. 429. L'ouvrage dont parle ici Képler a pour titre: *Guilielmi Gilberti Colcestr. medici Londinensis tractatus de magnete, & de magno magnete Tellure*, Lond. 1600 Sediti, 1633, in-4°.

## 518 ASTRONOMIE, Liv. XXII.

avec la terre ( 3176 ) : Hévelius attribuoit au soleil une force semblable ( 3017 ).

Par Roberval. L'attraction générale étoit sur-tout le principe fondamental du livre que Roberval publia en 1644, intitulé *Aristarchi Samii de mundi systemate liber* ; il attribue à toutes les parties de matière dont l'univers est composé, la propriété de tendre les unes vers les autres ; c'est pour cela, dit-il, qu'elles se disposent sphériquement, non par la vertu d'un centre, mais par leur attraction mutuelle, & pour se mettre en équilibre les unes avec les autres.

Passage de  
Hook.

3380. On voit encore l'attraction mutuelle de tous les corps célestes indiquée d'une manière positive dans un livre du Docteur Hook, ( 548 ) que j'ai cité ( 2773 ). « J'expliquerai, dit-il, ( pag. 27 ), un système du monde » qui diffère à plusieurs égards, de tous les autres, mais » qui s'accorde parfaitement avec les règles ordinaires de » la mécanique ; il est fondé sur ces trois suppositions ; 1°. » Que tous les corps célestes, sans en excepter aucun, » ont une attraction ou gravitation vers leur propre centre, par laquelle, non-seulement ils attirent leurs propres » parties & les empêchent de s'écarter, comme nous le » voyons sur la terre ; mais attirent encore les autres corps » célestes qui sont dans la sphère de leur activité. .... » 2°. Que tous les corps qui ont reçu un mouvement simple & direct, continuent à se mouvoir en ligne droite » jusqu'à ce que par quelqu'autre force effective ils en » soient détournés & forcés à décrire un cercle, une » ellipse ou quelqu'autre courbe composée ; 3°. Que les » forces attractives sont d'autant plus puissantes dans leurs » opérations, que le corps sur lequel elles agissent est plus » près de leur centre. Pour ce qui est de la *proportion*, » suivant laquelle ces forces diminuent à mesure que la » distance augmente, j'avoue que je ne l'ai pas encore » vérifiée. .... Je donne cette ouverture à ceux qui ont » assez de loisir & de connoissances pour cette recherche ». Cette loi qu'il proposoit de trouver, fut précisément celle que chercha Newton ; aussi voyons-nous qu'il cite

Il propose  
de chercher  
la loi de l'attraction.

le Docteur Hook, au commencement de son livre de *Mundi Systemate*, (*Newtoni, Opuscula*, 1744. II, 6). Voyez la traduction de Newton par Madame du Châtelet, & l'*Histoire des Math.* de M. Montucla, 1758, tom. II, pag. 527.

3381. Il ne manquoit donc plus à l'attraction qu'un Géomètre qui découvrit la loi suivant laquelle elle décroît, Pythagore l'avoit donnée (suivant M. *Dutems*; mais elle étoit oubliée; elle n'étoit point démontrée, il falloit la découvrir de nouveau, & Newton étoit plus que personne en état de le faire; s'il n'eût pas trouvé cette loi, je crois qu'avant la fin du dernier siècle d'autres Géomètres l'auroient apperçue; les choses étoient trop avancées pour qu'on pût l'ignorer plus long-temps; mais Newton en eut la gloire. Je vais tracer l'histoire de cette découverte, en traduisant un passage d'Henri Pemberton, contemporain & ami de Newton.

« LES PREMIERES idées qui donnèrent naissance au livre » des principes de Newton, lui vinrent en 1666, lorsqu'il » eut quitté Cambridge à l'occasion de la peste. Il se pro- » menoit seul dans un jardin, méditant sur la pesanteur, » & sur ses propriétés : cette force ne diminue pas sensi- » blement quoiqu'on s'élève au sommet des plus hautes » montagnes; il étoit donc naturel d'en conclure que cette » puissance devoit s'étendre beaucoup plus loin. Pourquoi, » disoit-il, ne s'étendrait-elle pas jusqu'à la lune? Mais » si cela est, il faut que cette pesanteur influe sur le mou- » vement de la lune; peut-être sert-elle à retenir la lune » dans son orbite? Et quoique la force de la gravité ne » soit pas sensiblement affoiblie par un petit changement » de distance, tel que nous pouvons l'éprouver ici-bas, » il est très-possible que dans l'éloignement où se trouve » la lune, cette force soit fort diminuée. Pour parvenir à » estimer quelle pouvoit être la quantité de cette dimi- » nution, Newton songea que si la lune étoit retenue dans » son orbite par la force de la gravité, il n'y avoit pas » de doute que les planètes principales ne tournassent au- » tour du soleil en vertu de la même puissance. En com-

Histoire de  
la découverte  
de Newton.

» parant les périodes des différentes planètes avec leurs  
 » distances au soleil, il trouva que si une puissance sem-  
 » blable à la gravité les retenoit dans leurs orbites, sa  
 » force devoit diminuer en raison inverse du carré de la  
 » distance (3396). Il supposa donc que le pouvoir de la  
 » gravité s'étendoit jusqu'à la lune & diminuoit dans le  
 » même rapport, & il calcula si cette force seroit suffisante  
 » pour retenir la lune dans son orbite. Il faisoit ces calculs  
 » dans un temps où il n'avoit point sous sa main les livres  
 » qui lui auroient été nécessaires; & il supposoit, suivant  
 » l'estime commune employée par les Géographes & par  
 » nos Marins, avant la mesure de la terre faite par  
 » Norwood (2632), que 60 milles d'Angleterre (2639)  
 » faisoient un degré de latitude sur la terre; mais comme  
 » cette supposition étoit très-défectueuse, (puisque cha-  
 » que degré doit contenir  $69\frac{1}{2}$  milles), le calcul ne ré-  
 » pondit point à son attente; il crut alors qu'il y avoit au  
 » moins quelqu'autre cause jointe à la pesanteur qui agit  
 » sur la lune, & il abandonna ses recherches sur cette ma-  
 » tière. Quelques années après, une lettre du Docteur  
 » Hook lui fit rechercher quelle est la vraie courbe dé-  
 » critte par un corps grave qui tombe, & qui est entraîné  
 » par le mouvement de la terre sur son axe. Ce fut une  
 » occasion pour Newton de reprendre ses premières idées  
 » sur la pesanteur de la lune. Picard venoit de mesurer en  
 » France le degré de la terre (2633), & en se servant de  
 » ses mesures, il vit que la lune étoit retenue dans son  
 » orbite par le seul pouvoir de la gravité (3398), d'où il  
 » suivoit que cette gravité diminuoit en s'éloignant du  
 » centre de la terre, de la même manière que notre au-  
 » teur l'avoit autrefois conjecturé. D'après ce principe,  
 » Newton trouva que la ligne décrite par la chute d'un  
 » corps étoit une ellipse dont le centre de la terre occu-  
 » poit un foyer; or les planètes principales décrivent aussi  
 » des ellipses autour du soleil (1220); il eut donc la satis-  
 » faction de voir que cette solution, qu'il avoit entreprise  
 » par pure curiosité, pourroit s'appliquer aux plus gran-  
 » des recherches. En conséquence, il composa une dou-

» zaine de propositions relatives au mouvement des planètes principales autour du soleil. Plusieurs années après, le Docteur Halley étant allé voir Newton à Cambridge, l'engagea dans la conversation à reprendre ses méditations à ce sujet, & fut l'occasion du grand Ouvrage des *Principes* qui parut en 1687, (*à l'Œuvre of Sir Isaac Newton's Philosophy*, London 1728 in-4°. *Préface*) ».

3382. J'ajouterai que Newton avoit dès-lors sous les yeux plusieurs indications de cette attraction ; la diminution du pendule observée à Cayenne (2657) ; l'aplatissement de Jupiter observé par M. Cassini ; la libration de l'apogée de la lune observée par Horoccius, &c.

Depuis ce temps-là les effets de l'attraction se sont tellement multipliés, cette attraction universelle des planètes, la tendance réciproque de l'une à l'autre a été prouvée par les faits de tant de façons différentes, elle se retrouve dans des circonstances si éloignées ; enfin toutes les conséquences qu'on en tire sont si bien d'accord avec les phénomènes, qu'il n'est plus possible de la révoquer en doute.

3383. VOICI une énumération succincte des phénomènes observés, qui chacun séparément suffiroit pour prouver l'attraction, quand on ignoroit tous les autres, & qui fournissent au moins quinze espèces de preuves différentes de cette attraction universelle. I. Le flux & le reflux de la mer, qui fournit deux fois le jour la preuve la plus palpable, & la plus frappante, pour tous les yeux, de l'attraction lunaire, & dont tous les phénomènes s'accordent réellement avec le calcul des attractions du soleil & de la lune, comme nous l'expliquerons bientôt (3590). II. Les inégalités de la lune qui dépendent visiblement du soleil (1433). III. Le mouvement des planètes autour du soleil (1231) avec cette loi que les cubes des distances sont comme les carrés des temps (3396). IV. La figure elliptique des orbites de la lune autour de la terre, & de toutes les planètes, & même des comètes autour du soleil (3425). V. La précession des équinoxes (3561). VI. La nutation de l'axe de la terre, produite par l'ac-

Quinze effets  
de l'attraction.

tion de lune (3569). VII. Les inégalités que Jupiter , Saturne & toutes les planètes éprouvent dans leurs différentes positions (3430). VIII. Les inégalités prodigieuses de la comète de 1759 , dont la dernière révolution s'est trouvée de 585 jours plus longue que la précédente, suivant le calcul des attractions de Jupiter & de Saturne (3115). IX. L'aplatissement de Jupiter & de la terre (3589). X. L'attraction des montagnes sur le pendule (2695). XI. Le changement de latitude & de longitude des étoiles fixes (2742). XII. La diminution de l'obliquité de l'écliptique (2715). XIII. Les mouvemens des apsidés des planètes (1312 & suiv. 3509) , sur-tout de l'apogée de la lune (1432) , qui s'observe incontestablement dans le ciel. XIV. Le mouvement des nœuds de toutes les planètes (1337) , sur-tout des nœuds de la lune , qui est si considérable & si sensible que dans neuf ans l'orbite de la lune se renverse , & qu'elle passe à 10° des étoiles qu'elle couvroit auparavant (1487). XV. Les inégalités des satellites de Jupiter (2969).

Réfutation  
des tourbillons.

De ces quinze espèces de phénomènes , la plupart sont inexplicables dans le système des tourbillons & du plein , & c'est avoir démontré d'une manière complète l'impossibilité du système des Cartésiens , que d'avoir prouvé l'existence de ces phénomènes & la manière dont ils résultent de l'attraction. Il ne peut y avoir actuellement un géomètre ou un seul astronome passablement instruit des phénomènes & des nouvelles théories , qui croie encore aux systèmes des tourbillons & du plein , ou qui rejette l'attraction Newtonienne.

3384. Plusieurs Physiciens célèbres se sont efforcés d'expliquer la loi universelle de l'attraction , par une cause impulsive , par un fluide , par le mouvement des atômes , &c. (a). Mais en seroit-on plus avancé ? il resteroit à expliquer la cause de ce mouvement primitif ; or les causes premières sont au-dessus de notre entendement.

(a) Voyez sur-tout l'*Essai de Chymie Mécanique*, par M. le Sage , Ci-toyen de Genève , qui a remporté le prix de l'académie de Rouen , & la lettre du même auteur , dans le Mercure de Mai 1756.

L'attraction  
paroît une  
propriété de  
la matière.

Pour moi je pense avec M. de Maupertuis & la plupart des Métaphysiciens Anglois, que l'attraction dépend d'une propriété intrinsèque de la matière. Si cette propriété étoit métaphysiquement impossible, dit M. de Maupertuis (a),  
 » les phénomènes les plus pressans de la nature ne pour-  
 » roient pas la faire recevoir ; mais si elle ne renferme ni  
 » impossibilité, ni contradiction, on peut librement exa-  
 » miner si les phénomènes la prouvent ou non ; car dès lors  
 » l'attraction n'est plus qu'une question de fait, & c'est  
 » dans le système de l'univers qu'il faut aller chercher si elle  
 » est un principe qui ait effectivement lieu dans la nature.  
 » Or certainement il n'y a point d'impossibilité métaphysi-  
 » que ni de contradiction dans la loi de l'attraction ; c'est-à-  
 » dire, que rien ne démontre la proposition contradictoire :  
 » *Les corps célestes ne s'attirent point.* Je me flatte qu'on ne  
 » m'objectera pas que cette propriété dans les corps, de  
 » peser les uns vers les autres, est moins concevable que  
 » celles que tout le monde y reconnoît. La manière dont  
 » les propriétés résident dans un sujet est toujours incon-  
 » cevable pour nous ; on ne s'étonne point de voir un  
 » corps en mouvement communiquer ce mouvement à  
 » d'autres corps, l'habitude qu'on a de voir ce phéno-  
 » mène empêche qu'on n'en voie le merveilleux ; mais  
 » au fond la force impulsive est aussi peu concevable que  
 » l'attractive. Qu'est-ce que cette force impulsive ? com-  
 » ment réside-t-elle dans les corps ? Qui eut pu deviner  
 » qu'elle y réside, avant que d'avoir vu les corps se cho-  
 » quer ?

» L'existence des autres propriétés dans les corps n'est  
 » pas plus aisée à concevoir, & nous sommes par-tout  
 » obligés de supposer des loix primitives, dont nous ne con-  
 » noissons ni la cause, ni l'origine ; leur existence est la  
 » seule chose qui soit du ressort de l'esprit humain, mais  
 » sur-tout de la géométrie».

3385. Supposons donc l'existence de l'attraction uni-  
 verselle, & cherchons les effets qui doivent en résulter ;

(a) Discours sur les différentes figures des Astres, par M. de Mau-  
 pertuis, 1732, in-8°.

leur accord avec les phénomènes observés & connus nous fera voir par-tout la certitude & l'évidence de cette loi.

L'attraction  
est propor-  
tionnelle à  
la masse.

Nous supposérons, comme on a coutume de le faire, que l'attraction est proportionnelle à la masse ou à la quantité de matière qui attire; on ne peut pas le démontrer par les faits, car nous ne pouvons juger de la quantité de matière que par le poids ou l'attraction; mais à moins qu'on ne pût démontrer le contraire, il est très-naturel de supposer que chaque particule de matière est douée de la même propriété; c'est-à-dire, que l'attraction de deux particules sera double de l'effet d'une seule, & qu'en général l'attraction est proportionnelle à la matière qui attire.

La force avec laquelle une planète est attirée ne dépend point de la masse de cette planète attirée; car si une seule particule de matière est attirée avec une force  $f$ , toutes les particules que vous placerez près d'elle seront attirées chacune avec la même force  $f$ ; il n'y a aucune raison pour que la seconde soit attirée moins que la première; & la présence de la seconde ne change rien à la force qui agissoit sur la première; donc la force attractive ne dépend que de la masse qui attire, & non pas de celle qui est attirée.

Expression  
des forces.

3386. Il y a dans la géométrie nouvelle des expressions abrégées, qu'un usage fréquent dispense les géomètres d'expliquer, mais qui embarrassent néanmoins ceux qui entrent dans la carrière; telle est l'expression qu'on emploie, en disant que  $\frac{S}{r^2}$  est la force que le soleil, dont la masse est supposée  $S$ , exerce à la distance  $r$  sur une planète quelconque; il s'agit d'une force attractive, & on la suppose égale à une masse  $S$  divisée par le carré d'une distance: or les forces, les masses & les distances sont des choses fort hétérogènes & de natures fort différentes; on ne voit pas d'abord comment il peut y avoir égalité entre des choses si disparates.

Pour le concevoir, il faut se rappeler ce que avons dit



sur le choix des unités (3354), on verra que cette expression de forces est une proportion réduite en équation. On ne calcule l'effet d'une force qu'en la comparant avec une autre force; ainsi en prenant la terre pour terme de comparaison, la masse  $\delta$  du soleil étant supposée 307800 fois plus considérable que celle de la terre, & son rayon  $r$  107 fois plus grand que le rayon de la terre,  $\frac{S}{r^2}$  fera  $\left(\frac{307800}{107^2}\right) = 27$ ; cela veut dire que l'attraction du soleil sur les corps solaires placés à sa surface est 27 fois plus grande que celle de la terre sur les corps terrestres, & qu'au lieu de parcourir 15 pieds en une seconde, ils en parcourront 408; car la masse seule à distance égale feroit parcourir 4648000 pieds, mais à une distance 107 fois plus grande l'attraction agit 11400 fois moins (3396), donc le soleil fera parcourir vers sa surface 408 pieds par seconde, au lieu de 15, & la force  $\frac{S}{r^2}$  vaut 27 en supposant que celle de la terre est l'unité (3411).

Si l'on cherche les dérangemens que la force du soleil cause à la lune, c'est en examinant le rapport qu'il y a entre la force du soleil pour tirer la lune de son orbite, & la force de la terre pour l'y retenir, ou la quantité dont la force du soleil peut balancer ou contrarier celle-ci. En faisant cette comparaison des forces, on prend pour unité la masse d'une planète & l'on exprime les autres masses en parties de cette unité; on prend aussi une distance pour unité & l'on exprime toutes les autres distances en unités ou en fractions de cette première distance, c'est-à-dire, qu'on compare une fraction avec une autre (3354). Par exemple, on peut faire cette proportion, la force du soleil sur la lune, que nous appellerons  $S$ , est à la force de la terre sur la lune dans sa moyenne distance, en raison composée de la masse du soleil à la masse de la terre, & du carré de la distance moyenne de la lune à la terre, au carré de la distance moyenne du soleil à la lune, c'est-à-dire, comme la masse du soleil divisée par le carré de sa distance à la lune, ou par  $r^2$ , est à la masse de

Exemple  
pour la lune.

## 526 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

la terre divisée par le carré de sa distance moyenne à la lune. Prenons pour l'unité des masses, la masse de la terre; pour unité des distances, celle de la lune à la terre, & pour unité des forces celle que la terre exerce sur la lune dans ses moyennes distances. Alors la proportion précédente donnera pour la force du soleil sur la lune l'expression  $\frac{S}{r^2}$ .

Autre exem-  
ple. 3387. Lorsqu'il s'agit des troubles qu'une planète éprouve par l'attraction d'une autre, on emploie les mêmes expressions; par exemple, la masse du soleil qui est 1, retient la terre dans son orbite à une distance qui est 1. Jupiter trouble cette action avec une masse environ 1000 fois plus petite que celle du soleil (3405); ainsi sa masse ou sa force peut s'appeler  $\frac{1}{1000}$ ; & comme il agit encore à une distance environ 5 fois plus grande que le soleil (1222), son action est 25 fois plus petite que celle du soleil, ainsi il faut encore rendre 25 fois plus petite la force  $\frac{1}{1000}$ , c'est-à-dire, qu'il faut écrire  $F = \frac{1}{25000}$ , pour avoir la force de Jupiter sur la terre; cette force n'est autre chose qu'une vingt-cinq millième partie de la force du soleil sur la terre; c'est la force dont nous chercherons l'effet dans la suite (3485 & suiv.), c'est-à-dire, que nous chercherons combien le mouvement de la terre doit être altéré par une force qui est  $\frac{1}{25000}$  de celle qui retient la terre dans son orbite.

3388. On a vu ci-devant que dans toute force accélératrice les espaces parcourus sont comme les carrés des temps (3365); si la force est  $\frac{S}{r^2}$ , on aura  $\frac{S dr^2}{r^2} = de$ , c'est l'espace que cette force feroit parcourir dans un espace de temps infiniment petit  $dt$ ; & il seroit aisé de comparer cet espace à celui de 15 pieds que la gravité naturelle fait parcourir à tous les corps terrestres.

D E L A F O R C E C E N T R A L E  
D A N S L E S O R B I T E S C I R C U L A I R E S .

3389. Les orbites des planètes sont des ellipses (1220), mais les loix de l'attraction auroient lieu de la même manière dans des mouvemens circulaires, car les cercles sont aussi des ellipses dont l'excentricité est infiniment petite ; & comme la considération des orbites circulaires est beaucoup plus facile, je commencerai par celles-là. Si une planète  $P$  (fig. 291), décrit autour du soleil  $S$  l'orbite circulaire  $P\dot{E}B$ , ce n'est qu'à raison de la force ou de l'attraction du soleil qui l'oblige à se courber en  $B$ , au lieu de suivre la ligne droite  $PA$  (1231). C'est un principe reconnu même autrefois par Anaxagore (comme l'observe M. Du Tems) qu'un corps en mouvement continue de se mouvoir sur une même ligne droite, s'il ne rencontre aucun obstacle, & qu'un corps mù circulairement s'échappe par la tangente aussi-tôt qu'il cesse d'être contraint & assujetti à tourner dans le cercle (1231) ; ainsi la planète décrirait  $PA$  si elle n'étoit forcée par l'attraction du centre  $S$  à descendre de  $A$  en  $B$  ; donc  $AB$  est l'effet ou la mesure de la force centripète, pendant le temps que mesure l'arc  $P\dot{E}B$  ; cela est également vrai quelle que soit la nature de cet arc  $P\dot{E}$ , circulaire, parabolique, &c. puisque c'est la quantité dont la planète est détournée de la ligne droite, ou approchée du centre, & qu'elle seroit également rapprochée si la planète destituée de toute force de projection eût descendu directement vers le soleil : la force de projection perpendiculaire au rayon solaire ne peut empêcher que l'attraction du soleil n'ait tout son effet, ne lui étant pas opposée.

3390. En effet, si la planète  $P$  n'avoit reçu aucun mouvement de projection de  $P$  en  $A$ , ou que ce mouvement qui tend à lui faire parcourir  $PA$  vint à être détruit, la planète  $P$  livrée à la seule force centrale qui agit de  $P$  en  $S$  descendroit avec la même vitesse  $PC$  ; égale à  $BG$  ou à  $BA$  (3351) : car si l'on conçoit le côté  $P\dot{E}$  de la

Fig. 291.

Effet de la  
force cen-  
trale.

*Fig. 291.* courbe comme infiniment petit, il fera la diagonale du parallélogramme  $CA$ ;  $BA$  est l'espace que feroit décrire la force centrale si elle agissoit seule, donc le sinus versé  $PC$  de l'arc  $PB$  décrit en une seconde de temps exprime la force centrale, dont il est l'effet. Le sinus versé est comme le carré de l'arc  $PB$  (3353); donc la force centrale est comme le carré de la vitesse, c'est-à-dire, que pour retenir une planète dans la même orbite, si la vitesse doubloit il faudroit une force quadruple.

Effet de la  
force centri-  
fuge.

3391. La quantité  $BA$  est aussi l'effet de la force centrifuge, c'est-à-dire, la force par laquelle les corps qui tournent autour d'un centre tendent à s'en écarter (1231); puisque c'est l'espace que le corps parcourroit en s'éloignant du centre  $S$  s'il étoit libre: or  $BA = PC, = \frac{CB^2}{2CS} = \frac{BP^2}{2PS}$  (3353), donc le mouvement circulaire produit une force centrifuge qui est égale au carré de la vitesse, divisé par le diamètre du cercle, la force de projection étant prise pour unité; ainsi la force centrifuge, aussi bien que la force centripète, est comme le carré de la vitesse.

Attention  
qu'on doit  
avoir.

3392. Dans le calcul différentiel on regarde les courbes comme des polygones d'une infinité de côtés, & l'on trouve la quantité  $BA$  double de ce que nous venons de trouver en considérant le cercle comme une courbe rigoureuse; car alors la force centrifuge est  $\frac{PB^2}{PS}$  (3451); quoique cette expression soit double de la précédente, elle donnera le même résultat, si l'on a soin de suivre la même règle dans les expressions de toutes les forces que l'on comparera l'une à l'autre; mais il faut prendre garde à ne pas supposer tantôt une courbe rigoureuse & tantôt un polygone, comme l'observe M. d'Alembert (*Traité de Dynamique* 1743, pag. 21); Newton s'y trompa dans la première édition de ses principes (*Œuvres de J. Bernoulli*, tom. 1, pag. 505. Hist. de l'acad. 1722), & j'ai vu d'autres géomètres s'y tromper également.

Force des  
corps terrestres.

3393. On emploie pour exprimer la vitesse d'une planète un arc infiniment petit, parce que c'est le seul qui soit

soit parcouru uniformément, & que l'uniformité est nécessaire pour la mesure du mouvement. Or un arc infiniment petit ne se courbe que d'un infin. petit du second ordre *AB* ou *BG*, ainsi la force centrale ne peut être exprimée que par un infin. petit du second ordre, ce qui prouve la nécessité des secondes différences (3294).

Fig. 221.

3394. Si l'on examine les forces centrifuges des différentes parties d'une sphère qui tourne sur son axe, on verra qu'elles sont proportionnelles aux rayons de chaque parallèle; car la vitesse de chaque partie est alors comme le rayon du cercle qu'elle décrit, c'est-à-dire, que *PB* est proportionnel à *PS*; donc la force centrifuge est proportionnelle à  $\frac{P S^2}{2 PS}$ , c'est-à-dire, à *PS*, qui devient l'ordonnée parallèle au grand axe de l'ellipse du méridien, quand on suppose la terre aplatie.

Force des  
corps terre-  
stres.

3395. La force centrifuge sous l'équateur de la terre est  $\frac{1}{187}$  de la pesanteur qu'on y éprouve; car cette pesanteur fait parcourir en une seconde de temps moyen 15,051 pieds (3372); la force centrifuge est mesurée par le petit écart de la tangente qui pour un arc de 15'', est suivant les tables (3904) = 0,00000002644249; mais qu'il faut augmenter dans le rapport du carré des heures solaires moyennes & des heures du premier mobile, & multiplier par le rayon de la terre (2690) réduit en lignes; on aura 7 lignes 5581 qui sont contenus 286,77 fois dans les 15 pieds, & environ 288 fois dans l'espace total que les corps graves décriroient sous l'équateur, sans la force centrifuge. Newton trouvoit la force centrifuge sous l'équateur, 289 fois plus petite que la gravité totale sous la latitude de Paris (III. 79). Pour faire ce calcul on ajoute (3372) le log. de la longueur du pendule en lignes, avec le double de celui de la circonférence ou de 0,49715; on ajoute le logarithme du sinus versé d'un arc de 15'' qui est 1,42230 avec le double de la différence des logarithmes de 24<sup>h</sup> & de 23<sup>h</sup> 56' 4'' 1, & celui du rayon de la terre en lignes 9,45373; on retranche la dernière somme de la première, & l'on a enfin le logarithme de 286,77.

Force cen-  
trifuge sous  
l'équateur.

Ainsi un corps qui se trouveroit dégagé de la force de pesanteur, s'échapperoit à l'instant par la tangente, & s'éloigneroit de 7 lignes de la surface de la terre dans la première seconde; & cette tendance à s'échapper, qui vient de la rotation de la terre diminuée de  $\frac{1}{188}$ , la pesanteur qui auroit lieu sous l'équateur. De là il suit que si les corps graves parcourent en une seconde 15,0515 pieds par seconde, ils en parcourroient sans le mouvement de rotation 15,104.

Quand on parvient à d'autres latitudes, cette force centrifuge diminue dans le même rapport que la grandeur des parallèles diminue, c'est-à-dire, comme le cosinus de la latitude, quand on la considère dans le plan de chaque parallèle (3394); mais elle diminue comme le carré du cosinus de la latitude, quand on la considère dans la direction du centre de la terre; soit  $TM$  (fig. 320) l'axe de la terre,  $BG$  l'effet de la force centrifuge sous le parallèle  $BC$ ; cette force suivant  $BG$  décomposée dans la direction  $BT$  devient plus petite encore dans le rapport du sinus de  $BN$  au sinus total, ou de  $BC$  à  $BT$ , donc elle est à la force qui a lieu sous l'équateur, comme  $BC^2$  est à  $BT^2$ .

Correction  
du pendule à  
secondes.

Cette force centrifuge diminue celle de la pesanteur, & par conséquent rend la longueur du pendule à secondes plus petite qu'elle ne seroit si la terre étoit immobile; par exemple, il faut ajouter une ligne  $\frac{1}{100}$  à la longueur du pendule à secondes, observée sous l'équateur, pour avoir celle qui s'observeroit si la terre étoit immobile. Sous une latitude de  $60^\circ$  où le parallèle n'est que la moitié de l'équateur, la quantité qu'il faut ajouter au pendule observé n'est que le quart de  $1^{\text{lig.}} 53$  ou  $0^{\text{lig.}} 38$ , & si l'on multiplie  $1^{\text{lig.}} 53$  par le carré du cosinus de la latitude, on aura la correction pour toute autre latitude. (M. Bouguer, pag. 346 : *Expos. du Calcul astron.* pag. 203 ).

FIGURE  
D'ATTRACTION.

3396. LA FORCE centrale qui retient les planètes dans leurs orbites est en raison inverse du carré de la distance.

DÉMONSTRATION. La première démonstration que Newton apperçut de cette fameuse loi (3381), est celle qui

se tire de la loi de Képler (1224) ; le Docteur Hook avoit compris que la pesanteur devoit diminuer à mesure qu'on s'éloignoit du centre des graves ; il avoit proposé aux Géomètres de trouver suivant quelle proportion cette force devoit diminuer (3380). Newton avoit eu la même idée, au rapport de Pemberton. Voici la manière dont je crois qu'il dut s'y prendre pour chercher cette proportion, par le moyen de la loi de Képler, & reconnoître, par exemple, que la force du soleil pour retenir Saturne dans son orbite est cent fois plus petite que la force avec laquelle le soleil retient la terre dans la sienne, la distance de Saturne étant dix fois plus grande que la distance de la terre. J'ai fait voir dans un assez grand détail comment Képler découvrit cette loi dont nous allons partir (1224) ; ainsi je crois qu'il ne manquera rien à l'Histoire de cette grande & importante découverte de l'attraction.

Soient deux orbites circulaires & concentriques  $PB$ ,  $TV$ , (fig. 291), dans lesquelles tournent deux planètes, dont les temps périodiques sont  $t$  &  $1$ , par exemple, Saturne & la terre ; supposons les arcs  $PB$  &  $TV$  infiniment petits & semblables, c'est-à-dire, compris entre les rayons  $STP$ ,  $SVB$  ; ces arcs  $PB$  &  $TV$  feroient parcourus en temps égaux, si les révolutions des deux planètes étoient égales ; mais la planète supérieure  $P$  ayant une révolution plus lente que la terre  $T$ , ne décrira qu'un arc  $PE$ , tandis que la terre décrira l'arc  $TV$  ; alors  $PD$  sera l'effet de la force centrale que le soleil exerce sur cette planète, tandis que  $TR$  est l'effet de la force centrale qu'il exerce sur la terre  $T$  (3390) ; & nous n'avons à chercher que le rapport de  $PD$  à  $TR$ . Suivant la proposition démontrée (3353),  $PD : PC :: PE^2 : PB^2$  ; mais la planète supérieure auroit parcouru  $PB$ , si la durée de sa révolution que j'appelle  $t$ , étoit égale à la durée  $1$  de la révolution de la terre ; donc  $PE : PB :: 1 : t$  ; ainsi  $PD : PC :: 1 : t^2$  ; donc  $PD = \frac{PC}{t^2}$ . Or  $PC : TR :: PS : TS :: r : 1$ , puisque les arcs  $PB$  &  $TV$  sont semblables, donc  $PC = r. TR$ , & puisque  $PD = \frac{PC}{t^2}$ ,

Fig. 291.

*Fig. 251.* il est aussi  $= \frac{rTR}{t^2}$ , donc  $\frac{PD}{TR} = \frac{r}{t^2}$ . Mais suivant la loi de Képler (1224)  $t^2 : 1 :: r^3 : 1$ ; ou  $r^3 = t^2$ , donc  $\frac{PD}{TR} (= \frac{r}{t^2})$  fera égal à  $\frac{r}{r^3}$  ou  $\frac{1}{r^2}$ . Donc  $PD : TR :: 1 : r^2$ ; c'est-à-dire, que l'effet de la force centrale est en raison inverse du carré de la distance.

La Lune est  
retenue par la  
même gravi-  
té.

3397. Il étoit donc facile à Newton de reconnoître cette loi dans l'attraction, par le moyen de la loi de Képler; quand il eut trouvé ce rapport dans l'attraction du soleil sur les planètes, il le vérifia bientôt sur la lune (3381), & il reconnut que la force centrale nécessaire pour retenir la lune dans son orbite, n'est autre chose que la gravité naturelle des corps terrestres, diminuée en raison inverse du carré de la distance de la lune à la terre. En effet, les corps graves parcourent 15 pieds en une seconde de temps (3372), la lune décrit un arc de son orbite qui est de  $0''5490163$ , ou environ  $33'''$ , & dont le sinus versé est à peu-près  $\frac{1}{140}$  de pied (3316); donc la lune est retenue vers la terre, ou rapprochée de la terre 360 fois moins que les corps terrestres; or elle est environ 60 fois plus loin, donc la force qui agit sur la lune diminue comme le carré de la distance.

3398. On s'est ensuite servi de ce principe reconnu vrai d'ailleurs pour trouver la distance de la lune, & sa parallaxe, avant qu'elle eût été observée avec exactitude. Soit  $e$  le demi-diamètre de l'équateur terrestre réduit en pieds,  $x$  le rapport entre ce rayon & la distance moyenne de la lune, égal environ à 60, en sorte que la distance de la lune soit  $e/x$ ;  $f$  la force de la terre, exprimée par les 15 pieds qu'elle fait parcourir en une seconde, à sa surface;  $u$  le sinus versé de l'arc décrit par la  $\odot$  en une seconde de temps où la quantité dont la lune descend & se rapproche de nous en une seconde; cet espace est exprimé en pieds par  $ue/x$ . A cause du principe des forces centrales, le même espace est aussi égal à  $\frac{f}{x^2}$  (3397), donc égalant ces deux quantités on a  $\frac{1}{x} = \sqrt[3]{\frac{ue}{f}}$ , c'est



le sinus de la parallaxe horizontale de la lune sous l'équateur. Pour le réduire en nombres, je prens le logar. du sinus versé de l'arc décrit par la lune en une seconde de temps (3316), j'y ajoute celui du rayon de l'équateur (2690) réduit en pieds, & j'ai le log. de  $eu = 5,8434190$ ; j'en ôte celui de 15 p. 0515 qui est 1,1775796; le tiers du reste est 8,2219565, sinus de  $57' 18'' 3$ ; c'est la parallaxe sous l'équateur, qui ne surpasse que de 6 ou  $7''$ ; celle qui résulte des meilleures observations (1714), & qui prouve par-là même, la loi de l'attraction. On néglige ici l'effet de l'attraction de la lune sur la terre; mais en l'y faisant entrer M. Murdoch trouvoit  $56' 44''$ . (*Philos. transf.* 1764, pag. 30). Nous donnerons bientôt une méthode plus rigoureuse pour parvenir à ces résultats (3483).

3399. Ainsi la loi de l'attraction, ou ses changemens en raison inverse du carré de la distance furent prouvés de deux manières très-différentes & très-bien d'accord entr'elles. Elle se vérifioit également dans les satellites de Jupiter (2900); ceux de Saturne vinrent ensuite à l'appui de cette loi (2997). Un autre considération différente dut encore apprendre à Newton qu'il falloit que l'attraction fût en raison inverse du carré de la distance: toutes les qualités sensibles, comme les émanations, la lumière, diminuent de densité & de force en raison inverse du carré de la distance. Enfin la suite de ses calculs lui en donna de nouvelles preuves.

3400. Si l'attraction étoit en raison inverse du cube de la distance, au lieu d'être en raison inverse du carré, les planètes ne pourroient pas décrire des ellipses, car aussi-tôt qu'elles auroient commencé à s'approcher du centre des forces, elles s'en approcheroient toujours, sans pouvoir jamais s'en éloigner (Voy. Mac-laurin, *Expos. des découvertes de Newton*, pag. 332. *Traité des fluxions I.* pag. 308, *II.* pag. 276). Si l'attraction étoit en raison inverse de la distance, les planètes au lieu d'arriver de l'apside supérieure à l'apside inférieure dans l'espace d'une demi-révolution, ou après avoir décrit  $180^\circ$ , y arrive-

Autres hypothèses d'attraction.

roient après avoir décrit  $\frac{180}{\sqrt{\frac{1}{2}}}$ , ou un peu plus de  $127^{\circ}$ , comme Newton l'a démontré (*Princ. math. L. 1. Propr. 45*). Dans ce cas, on n'auroit jamais retrouvé l'aphélie de Mars au même point du ciel, mais à des points différens de plus de  $50^{\circ}$  chaque année, ce qui prouvoit clairement à Newton que l'attraction planétaire étoit en raison inverse du carré de la distance, & non point dans aucune autre loi.

Attraction  
des corps ter-  
restres.

3401. Il est vrai qu'on a soupçonné dans les corps terrestres une attraction en raison inverse du cube des distances, mais cela n'est point de mon sujet; on peut voir ce qu'ont dit là-dessus M. de Maupertuis (*Mém. ac. 1732, pag. 362*). M. Keill dans un petit traité composé de 30 propositions, qui se trouve à la fin de ses ouvrages; M. d'Alembert dans l'Encyclopédie au mot attraction, *tom. 1, pag. 850*. Le P. Bosovich dans l'ouvrage qui a pour titre, *Philosophiæ naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium. Vienne, 1758 in-4°. & Venetia, 1764*. Ce dernier ouvrage contient des idées très-ingénieuses & très-singulières; l'attraction, la répulsion, la cohésion, l'élasticité y sont déduites d'une seule loi; je voudrois qu'il me fût permis de m'étendre sur ce sujet; mais il faut consulter l'ouvrage même de cet illustre Auteur.

Attraction  
des cubes ca-  
pillaires.

3402. L'élévation des fluides dans les tubes capillaires est encore une suite nécessaire de l'attraction des corps terrestres; dans un mémoire sur les tubes capillaires inséré dans le Journal des Savans, du mois d'Octobre 1768, & imprimé séparément (chez Defaint, 1770); j'ai fait voir que l'attraction du tube capillaire qui a plus de densité que l'eau, en souleve les parties placées au dessous du tube, & celles qui sont à l'entrée du tube, que la colonne d'eau renfermée dans le tube considérée au niveau de l'eau du vase est attirée encore de bas en haut par la partie extérieure du tube, parce que sa partie inférieure occupe la place d'une certaine quantité d'eau qui attiroit déjà cette colonne de haut en bas, & qu'elle

ne détruit pas l'attraction de la partie supérieure, en sorte qu'il y a trois causes évidentes de l'ascension des fluides dans les tubes capillaires. ; ainsi quoi qu'en dise le P. Gerdil, (*Dissertation sur l'incompatibilité de l'attraction*, à Paris, 1754, chez Desaint) ce phénomène est une preuve de l'attraction universelle. V. Mussenbroëk, cours de physique, tom. II. pag. 1. édition de 1769. Le Dictionnaire de Chymie de M. Macquer, au mot pesanteur & l'essai de M. le Sage, (3384).

3403. La masse des planètes, c'est-à-dire, leur quantité de matière, ou leur force attractive, se déduit du principe de l'attraction, & l'on en conclut aisément leur densité intérieure, ou leur pesanteur spécifique. Cette découverte qui paroît d'abord bien singulière, est cependant une suite naturelle de la loi d'attraction, puisque la force attractive est un indice certain de la quantité de matière. Prenons pour terme de comparaison la masse ou la force attractive de la terre dont les effets nous sont connus & familiers, & cherchons quelle est la masse de Jupiter par rapport à celle de la terre. Le premier satellite de Jupiter fait sa révolution à une distance de Jupiter qui est la même que celle de la lune à la terre (du moins elle n'est que d'un douzième plus petite). Si ce satellite tournoit aussi autour de Jupiter dans le même espace de temps que la lune tourne autour de la terre, il s'ensuivroit évidemment que la force de Jupiter pour retenir ce satellite dans son orbite, seroit égale à celle de la terre pour retenir la lune, & que la quantité de matière dans Jupiter, ou sa masse, seroit la même que celle de la terre; dans ce cas-là il faudroit que la densité de la terre fut 1246 fois plus grande que celle de Jupiter, car la grosseur (ou le volume) de Jupiter contient 1246 fois la grosseur de la terre (1398); or si le poids est le même, la densité est d'autant plus grande que le volume est plus petit. Mais si le satellite tourne 16 fois plus vite que la lune, il faut pour le retenir 256 fois plus de force ( $16 \text{ fois } 16 = 256$ ), car la force centrale est comme le carré de la vitesse (3390), une vitesse double exige & suppose une

Méthode  
pour trouver  
les densités.

## 536 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

force centrale quadruple à distances égales ; & la vitesse du fatellite 16 fois plus grande que celle de la lune, quoique dans une orbite égale, suppose dans Jupiter une énergie ou une masse 256 fois plus grande que celle de la terre ; dans ce cas l'on trouve un volume 1200 fois plus grand & une pesanteur seulement 256 fois plus grande que celle de la terre, donc le volume de Jupiter considéré par rapport à celui de la terre est quatre fois plus grand que la quantité de matière réelle & effective, par rapport à celle de la terre ; donc la densité de la terre est quatre fois plus grande que celle de Jupiter.

3404. Tel est l'esprit de la méthode par laquelle Newton a calculé les masses & les densités des planètes ( 1398 ) : plus un fatellite est éloigné de sa planète, & plus il tourne rapidement, plus aussi il indique de force & de matière dans la planète principale qui le retient ; je vais y appliquer le calcul rigoureux, & je prendrai le soleil pour terme de comparaison, parce que nous en aurons besoin pour le calcul des attractions célestes.

Soit la distance de Jupiter au soleil, prise pour unité, = 1.

La durée de la révolution de Jupiter, = 1.

La force du soleil sur Jupiter, = 1.

La distance d'un de ses satellites, =  $r$ .

La durée de la révolution du même fatellite, =  $t$ .

La force actuelle de Jupiter sur son fatellite sera  $\frac{r^3}{t^2}$ , comparée à celle du soleil sur Jupiter ( 3396 ). Si ce fatellite étoit aussi éloigné de Jupiter que Jupiter l'est du Soleil, il faudroit que la force dans ce cas-là fût à la force actuelle qui est  $= \frac{r^3}{t^2}$ , comme  $r^2 : 1$ , c'est-à-dire, en raison inverse du carré de la distance ; donc alors à pareille distance, la force seroit  $\frac{r^3}{t^2}$  ; telle est donc en effet la force absolue de Jupiter ( par rapport à celle du soleil, considérée à pareille distance ), c'est-à-dire, sa masse totale ou la quantité de matière qu'il contient ; donc en général pour connoître la masse d'une planète, en prenant celle du soleil pour unité, il suffit de diviser le cube de la distance d'un

Règle pour  
trouver la  
masse.

d'un satelite de cette planète par le carré du temps qu'il emploie à tourner, pourvu que l'on ait pris l'unité des distances & des temps, dans l'une des planètes qui tournent autour du soleil.

3405. **EXEMPLE.** La révolution de Vénus autour du soleil, qui est de  $5393^h$ , est 13 fois plus longue que celle du 4<sup>e</sup> satelite de Jupiter qui est  $400^h \frac{1}{2}$  (29<sup>2</sup>), donc  $t = 0,0742716$ ; la distance du 4<sup>e</sup> satelite à Jupiter vue du soleil, est de  $8' 16''$ , d'où il est aisé de conclure la distance du satelite à Jupiter, celle de Vénus au Soleil étant prise pour unité, ou la valeur de  $r = 0,017290$  (art. 2885). Si l'on prend le cube de  $r$  & le carré de  $t$ , qu'on divise  $r^3$  par  $t^2$ , on trouve  $0,0009370$ , ou  $\frac{1}{1067}$ , qui est la masse de Jupiter, celle du soleil étant = 1. Masse de Jupiter.

Si l'on vouloit trouver de même le rapport des masses du soleil & de la terre, on auroit  $r = \frac{9''}{57' 3''}$ ; c'est le rapport des parallaxes, ou celui des distances,  $t = \frac{27j}{365} = \frac{129597736''}{1732559381''}$ , c'est le rapport des révolutions; donc  $\frac{r^3}{t^2} = \frac{1}{307831}$ ; c'est la masse de la terre, celle du soleil étant prise pour unité; comme je l'ai rapportée dans la table de l'article 1398; elle diffère de celle de Newton, qui est  $\frac{1}{169182}$ ; mais les élémens que je viens d'employer sont plus exacts que les siens.

3406. La masse de Saturne diffère encore sensiblement; car Newton la suppose  $= \frac{1}{3021}$  de celle du soleil, & je trouve environ  $\frac{1}{3927}$ , en y faisant entrer les cinq satelites de Saturne, qui donnent des résultats assez différens entre eux, à cause du peu de précision qu'il y a dans les observations des satelites de Saturne.

3407. Il suit des calculs précédens que la masse du soleil divisée par le cube de sa distance à la terre, dont nous ferons usage pour les inégalités de la lune (3471, 3525), est égale à  $t^2$ , car la masse du soleil (en prenant pour unité celle de la terre) est  $\frac{t^2}{r^3}$ ; mais si la distance de la lune est prise pour unité, celle du soleil est

$\frac{1}{r}$ , dont le cube est  $\frac{1}{r^3}$ , & divisant la masse  $\frac{1}{r^3}$  par le cube de cette quantité, l'on a  $r^3$ , comme je l'ai supposé.

Densités de  
trois planètes.

3408. Cette force ou cette masse d'une planète étant divisée par le volume, exprimé de même en prenant pour unité le volume du soleil, donne la densité de la planète cherchée par rapport à la densité du soleil; c'est ainsi que Newton trouva que la terre étoit environ quatre fois plus dense que le soleil, quatre fois & un quart plus dense que Jupiter, & six fois plus dense que Saturne. (Newton, *L. I. I. prop. 8.* ou Mac-laurin, *Expos. des déc. de Newton, pag. 309*). Ces densités sont calculées plus exactement dans la table de l'article 1398. Nous pouvons comparer ces densités avec des objets familiers : on sait que l'antimoine est quatre fois plus dense que l'eau, & six fois plus dense que le bois de prunier; ainsi en supposant que les substances du soleil & de Jupiter aient la densité de l'eau, la terre aura celle de l'antimoine, & Saturne aura la légèreté du bois; il me paroît même que ces substances répondent assez bien à ce que j'ai voulu exprimer par leur moyen. On trouveroit à peu-près le même rapport entre l'acier, l'ivoire & le bois le plus pesant, comme l'ébène; il suffira de consulter la table des pesanteurs spécifiques, donnée par M. l'Abbé Nollet dans ses Leçons de Physique, ou celle de Mussenbroëk.

3409. Képler avoit présumé que les densités des planètes les plus voisines du soleil devoient être les plus considérables; mais il se trompoit sur celle du soleil : *Consentaneum est ut quodque corpus ut soli vicinius, ita & densius esse : nam & sol ipse est omnium corporum totius mundi densissimum ; cujus rei testimonium perhibet immensa multiplex vis quæ non potest esse sine subiecto proportionato ; & loca ipsa centro vicina ideam quantam angustia gerunt, qualis est in condensatione materiae multæ in locum angustum.* (Képler, *1<sup>re</sup> partie, pag. 487*).

Densités de  
Vénus, de  
Mars & de  
Mercure.

3410. Les densités de Vénus, de Mercure & de Mars ne peuvent se trouver par la méthode précédente, puisque ces planètes n'ont point de satellites, qui puissent nous

indiquer l'intensité de leur attraction ; mais voyant dans les trois planètes dont les densités sont connues , une augmentation de densité quand on approche du soleil , il est très probable que cet accroissement a lieu également pour les trois autres planètes : en essayant de reconnoître une loi dans ces augmentations , on voit que les densités sont presque proportionnelles aux racines des moyens mouvemens ; par exemple , le mouvement de la terre est environ 11 , 86 , celui de Jupiter étant 1 , la racine est  $3\frac{1}{2}$  , & la densité de la terre est en effet 3 fois  $\frac{1}{2}$  celle de Jupiter , ou environ , ( 1398 ). On peut donc supposer la même proportion dans les autres planètes ; c'est ainsi que j'ai calculé les densités rapportées dans la table de l'art. 1398 , où l'on voit que celle de Vénus est un peu plus grande que celle de la terre , ainsi que je l'ai supposé en parlant de la masse de Vénus ( 2158 ).

3411. Connoissant la masse & le diamètre d'une planète , il aisé de trouver l'effet de la pesanteur à sa surface , c'est-à-dire , la force accélératrice des graves dans la planète , car cette force est en raison de la masse & en raison inverse du carré du rayon. C'est ainsi que j'ai calculé la table ( 1398 , *T. II. pag. 158* ) , qui contient la vitesse des graves dans chaque planète en pieds & centièmes de pieds ; ce n'est autre chose que la vitesse des corps terrestres sous l'équateur 15 pieds , 104 ( 3395 ) multipliée par la masse de chaque planète , & divisée par le carré du rayon , en prenant pour unités la masse & le rayon de la terre. Par exemple , la masse de Jupiter est 288 fois plus considérable que celle de la terre ( 1398 ) , ainsi les corps graves y feroient attirés 288 fois plus qu'ils ne sont sur la terre , & décriroient 288 fois 15 pieds , si le rayon de Jupiter n'étoit environ 11 fois plus grand que celui de la terre , & le carré de la distance du centre à la surface 116 fois plus grand , ce qui rend la pesanteur 116 fois moindre ; or 288 diminué 116 fois , ou divisé par 116 , donne un peu moins de  $2\frac{1}{2}$  , ainsi la pesanteur des corps situés à sa surface est presque deux fois & demi celle des nôtres : au lieu de décrire 15 pieds par

seconde, ils en décrivent 37. Suivant Newton la pesanteur n'étoit guères que double dans Jupiter, mais cela vient de ce qu'il faisoit la parallaxe du soleil trop grande, il rendoit le diamètre de Jupiter seulement septuple de celui de la terre, tandis que suivant mes calculs il faut  $10\frac{3}{4}$  diamètres terrestres pour faire le diamètre de Jupiter. Je fais abstraction de la force centrifuge (3395) produite par la rotation de Jupiter & des autres planètes.

3412. La masse de la lune, & par conséquent sa densité sont difficiles à déterminer exactement, parce qu'elles se manifestent par des phénomènes que nous ne pouvons mesurer avec assez d'exactitude; les hauteurs des marées, & la quantité de la nutation de l'axe de la terre. Si les hauteurs des marées dans les syzygies s'étant trouvées de 7 pieds, ne sont que de 3 pieds dans les quadratures, en supposant des circonstances pareilles (3595), c'est-à-dire, si les grandes marées sont aux petites comme  $3\frac{1}{2}$  est à  $1\frac{1}{2}$ , la somme des forces de la lune & du soleil doit être à leur différence, comme  $3\frac{1}{2}$  est à  $1\frac{1}{2}$ ; ces forces seront donc entre elles comme 5 est à 2 (car la somme de 5 & de 2 est à la différence, comme  $3\frac{1}{2}$  est à  $1\frac{1}{2}$ ); c'est le rapport auquel s'en tient M. Bernoulli (3595).

3413. Supposons donc la force du soleil 1, celle de la lune  $2\frac{1}{2}$ ; pour avoir la masse de la lune il suffit de savoir quelle est sa force, en la supposant à la distance du soleil. La force diminue en raison inverse du cube de la distance, quand on la décompose sur une direction différente de sa direction primitive (3444, 3468); il faut donc multiplier la force actuelle de la lune par le cube de  $\frac{9''}{57'3''}$ , & l'on aura la masse de la lune, celle du soleil étant prise pour unité; mais la masse de la terre est seulement  $\frac{1}{37831}$  de celle du soleil (3405); il faut donc encore diviser la masse trouvée par cette fraction, & l'on aura  $\frac{1}{71}$  qui est la masse de la lune, celle de la terre étant prise pour unité, à peu près comme je l'ai supposée (1717). On verra ci-après que la nutation même paroît donner à peu près le même résultat (3576).



3414. La masse de la terre (3405) est  $(\frac{9''}{57'})^3 \cdot (\frac{365}{27})^2$ , celle du soleil étant l'unité; la masse de la lune est  $(\frac{9''}{57'})^3 \cdot 2\frac{1}{2}$ , elles sont donc comme  $\frac{2}{3} (\frac{365}{27})^2 : 1$ ; donc le carré de la durée de l'année 365, divisé par celui de la durée du mois 27, & multiplié par  $\frac{2}{3}$  qui est la force de la lune, donnera le nombre 71,49 qui exprime combien de fois la terre contient la lune; ainsi la masse de la lune sera 0,013991.

La masse de la lune  $\frac{1}{71}$ , ou 0,013991, étant divisée par son volume qui est  $\frac{1}{49}$ , ou 0,0644 (1717), donne sa densité 0,68706; c'est-à-dire, que la densité de la lune est seulement  $\frac{7}{10}$  de celle de la terre, comme je l'ai mis dans la table des densités (1398). M. Simpson dit que la densité de la lune est à celle du soleil, comme  $2\frac{1}{2}$  est à 1, mais c'est en supposant que leurs diamètres apparens sont égaux, ce qui n'est pas exact.

Densité de  
la lune.

3415. M. d'Alembert se sert du phénomène de la nutation (2860, 3575), pour déterminer la masse de la lune, (*Précession des Equinoxes*, pag. 62), & supposant la nutation de 9'' exactement, il trouve la force de la lune  $\frac{7}{5}$  au lieu de  $\frac{2}{3}$ , ce qui rendroit la masse de la lune seulement  $\frac{1}{85}$  de celle de la terre; mais M. d'Alembert observe avec raison, qu'une seule seconde d'erreur dans la nutation donneroit pour la masse de la lune un résultat très-différent, & nous verrons ci-après qu'on peut supposer la nutation de 9''  $\frac{1}{2}$ , & la force de la lune =  $2\frac{1}{2}$ , sans faire violence aux observations (3575).

3416. La masse du soleil, ou la force attractive qu'il exerce sur la terre, peut se comparer avec une autre force qui a lieu dans les corps terrestres, je veux dire la force centrifuge d'un corps placé sous l'équateur à la surface de la terre, & qui tourne avec la terre en 24 heures (3395). Cette force par laquelle un corps tend à s'éloigner de la terre, & celle qu'a le soleil pour retenir la terre dans son orbite, ou du moins les effets de ces forces, sont les petits écarts des tangentes de la circonférence de la terre

## 542 ASTRONOMIE, Liv. XXII.

Fig. 291.

& de l'orbite terrestre, qui correspondent à un même intervalle de temps (3386, 3391). Soit  $TV$  (a. 291), la circonférence de l'équateur terrestre.  $PEB$  un cercle égal à l'orbite de la terre, l'arc  $PE$  étant supposé décrit dans le même temps que l'arc  $TV$ ; soit  $T = a$ ,  $\lambda = r$ , & la durée de la rotation qui est de 24 heures,  $T$  la durée de la révolution qui est de 365 jours, l'on aura (336)  $TR : PD :: \frac{a}{r} : \frac{r}{T}$ , donc  $PD = TR \cdot \frac{r^2}{aT}$ ; c'est la force centrale que la terre éprouve par l'action du soleil; mais si l'orbite  $PB$  de la terre devenoit aussi petite que le cercle  $TV$ , la force du soleil deviendroit plus grande en raison inverse du carré de la distance, donc elle seroit alors  $= TR \cdot \frac{r^3}{a^3 T}$ , c'est cette force qu'il faut comparer avec la force centrifuge, pour avoir le rapport de la masse du soleil avec la force centrifuge; car il faut supposer que l'une & l'autre agissent à pareilles distances, ou sur des cercles égaux, pour comparer les espaces qu'elles font parcourir, toutes choses égales; c'est-à-dire, pour comparer leur énergie; ainsi l'on trouve la masse du soleil en multipliant  $TR$ , qui est l'effet de la force centrifuge sur la terre, par  $\frac{r^3}{a^3 T}$ ; & si l'on appelle  $S$  cette force centrifuge, on pourra appeler la masse du soleil  $\frac{S r^3}{a^3 T}$ . Nous en ferons usage pour la précession des équinoxes (531).

Autre expression de la masse du soleil.

Elle entre dans l'expression du temps.

3417. La masse du soleil entre aussi dans l'expression du temps qu'une planète emploie à décrire un arc quelconque de son orbite. Supposons cet arc  $z$  exprimé en parties de la circonférence, le carré du temps qui répond à cet arc, est d'autant plus grand que le cube de la distance est plus grand, & que la masse attractive est plus petite; car si la masse attractive doubloit, son effet  $PC$  doubleroit, & le carré de la vitesse  $PB$  augmenteroit en même proportion (3391); ainsi la masse  $S = \frac{1}{t^2}$  ou  $t = \frac{1}{\sqrt{S}}$ ; mais puisque les carrés des temps sont comme les cubes des distances  $t^2 = r^3$  ou  $t = r^{\frac{3}{2}}$ , donc  $t = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{S}}$ ; de plus

le temps est proportionnel à l'espace  $z$ , toutes choses égales; donc enfin le temps qui répond à un arc  $z$  est  $\frac{r^{\frac{1}{2}} z}{\sqrt{s}}$ ;  $S$  doit être plus exactement la somme des masses du

soleil & de la planète attirée (3435). M. Clairaut a fait usage de cette expression, dans la *Théorie de la Lune*.

3418. LA VITESSE de projection, telle que  $PA$ , nécessaire pour décrire un cercle  $PB$ , est en raison inverse de la racine du rayon  $SP$ .

DÉMONSTRATION. Supposons que deux planètes  $P$  &  $T$  décrivent autour du soleil  $S$  les cercles  $PE$ ,  $TV$ , & que  $SP$  soit quadruple de  $ST$ , je dis que la vitesse  $PE$  fera la moitié de la vitesse  $TV$ . En effet  $PC$  sera quadruple de  $TR$ , parce que les figures  $PBC$ ,  $TVR$  sont comme les rayons; mais la gravité en  $P$  étant 16 fois moindre qu'en  $T$ , il faut prendre  $PD$  16 fois moindre que  $TR$ , ou 64 fois moindre que  $PC$ , pour avoir l'espace  $PE$  que la planète  $P$  pourra décrire, étant retenue par la force centrale du soleil; alors  $Pe$  sera un huitième de  $PB$ , puisque les sinus versés sont comme les carrés des arcs (3353); donc  $P$  fera la moitié de  $TV$ , dans un même espace de temps; c'est-à-dire, que la vitesse d'une planète doit être en raison inverse de la racine de sa distance, pour que la force centrale, qui est en raison inverse du carré de la distance, puisse la retenir. Voilà pourquoi Jupiter qui a une orbite cinq fois plus grande que celle de la terre, emploie 12 fois plus de temps à la parcourir, sa vitesse absolue n'étant pas la moitié de celle de la terre.

3419. Si la vitesse de projection qu'une planète a reçue primitivement en partant de son aphélie, s'est trouvée plus petite que celle qui étoit nécessaire pour décrire un cercle  $PB$ , la force centrale étant trop grande, a dû prendre le dessus, & la planète se rapprocher du soleil: voilà pourquoi les planètes en partant de leur aphélie se rapprochent du soleil; mais nous démontrerons bientôt qu'après avoir parcouru  $180^\circ$ , la même planète doit s'éloigner du soleil autant qu'elle s'en étoit rapprochée, parce que la force centrifuge devient plus grande que la

Fig. 291.

De la vitesse des planètes à différentes distances.

Les planètes les plus éloignées ont moins de vitesse.

*Fig. 291.* force centripète, à mesure que la planète se rapproche du soleil. On a vu que la vitesse périhélie est à la vitesse aphélie en raison inverse des distances ( 1227 ); il s'ensuit que la force centrifuge augmente plus que la force centripète; c'est ce que je-vais démontrer.

Force cen-  
trifuge des  
planètes.

3420. *LA FORCE CENTRIFUGE augmente en raison inverse du cube de la distance, lorsque la vitesse est en raison inverse des distances.*

DÉMONSTRATION. Supposons que  $SP$  soit double de  $ST$ ; l'arc  $PB$  sera doublé de l'arc  $TV$ , la ligne  $PC$  double de  $TR$ , & la force centrifuge en  $P$  double de la force centrifuge en  $T$ <sup>(a)</sup>; mais si la vitesse en  $P$ , au lieu d'être double de la vitesse en  $T$ , n'en est que la moitié, c'est-à-dire, si  $PE$  est 4 fois moindre que  $PB$ , le sinus verse  $PD$  sera 16 fois moindre que  $PC$ , puisqu'il est comme le carré de l'arc ( 3353 ); donc  $PD$  sera 8 fois moindre que  $TR$ , c'est-à-dire, que la force centrifuge est en raison inverse des cubes des distances  $SP$  &  $ST$ , que nous avons supposées être comme 1 à 2.

En général, on voit que  $PB : TV :: SP : ST$ , à cause des arcs semblables; donc si  $TV : PE :: SP : ST$  ( 1227 ), l'on aura en multipliant terme à terme,  $PB : PE :: SP^2 : ST^2$ ; or  $PC : PD :: PB^2 : PE^2$ ; donc  $PC : PD :: SP^4 : ST^4$ ; mais  $PC : TR :: SP : ST$ ; donc divisant terme à terme,  $TR : PD :: SP^3 : ST^3$ ; ce qui fait voir en général que l'effet de la force centrifuge est en raison inverse du cube de la distance, quand la vitesse est en raison inverse des distances. C'est le cas d'une planète, quand on la considère dans son aphélie & dans son périhélie; & cette proportion nous servira bientôt ( 3427 ) à faire voir pourquoi les planètes s'éloignent du soleil après s'en être approchées quoiqu'elles soient toujours attirées vers le soleil.

3421. LE NOMBRE DE SECONDES qu'un corps emploieroit à tourner dans une orbite d'un rayon  $r$  égal à celui de la terre, avec une force centripète égale à celle

(a) C'est le premier des Théorèmes de la force centrifuge, que M. Huygens donna en 1673, dans son Livre de *Horolog. oscillatorio*.

que

que la terre exerce sur les corps graves placés à sa surface, est égal à  $2 \sqrt{\frac{r}{p}}$ , en supposant  $p$  égal à la longueur du pendule à secondes (2699).

DÉMONSTRATION. Soit  $ST$  le rayon de la terre;  $TR$  l'effet de la force centrale dans une seconde, ou la quantité dont un corps tournant dans le cercle  $TV$  feroit rapproché du centre en une seconde par l'attraction qui le retient dans son orbite;  $TR$  est aussi égal à l'espace que les corps parcourent en une seconde par la gravité naturelle  $= \frac{p c^2}{2}$  (3372); mais  $RV^2$  égal au produit des deux segmens du diamètre,  $= 2r \cdot \frac{p c^2}{2}$ ; donc  $RV$  ou  $TV$ , qui lui est égal (car il n'en diffère que d'un infiniment petit du second ordre) fera  $c \sqrt{rp}$ ; c'est la valeur de l'arc parcouru en une seconde. Pour trouver le temps qui répond à la circonférence entière  $2rc$ , on fera cette proportion,  $TV$  ou  $c \sqrt{rp}$  est à  $1''$ , comme la circonférence entière  $2rc$  est à un nombre de secondes, qui sera  $\frac{2r}{\sqrt{rp}}$  ou  $2'' \sqrt{\frac{r}{p}}$  qui est la durée de la révolution. Nous en ferons usage (3483).

3422. Si la force de projection qui anime les planètes & leur fait décrire des orbites, étoit détruite lorsqu'elles sont dans leurs moyennes distances au soleil, la force centrale les précipiteroit vers le soleil; Mercure y arriveroit en 15 jours & 13 heures; Vénus en 39 jours 17<sup>h</sup>; la terre en 64j 10<sup>h</sup>; Mars en 121 jours; Jupiter en 290j; Saturne en 767j. La comète la plus éloignée que nous connoissons en 66 mille jours; la lune tomberoit sur la terre en 4j 20<sup>h</sup>; les satellites de Jupiter tomberoient sur leur planète en 7<sup>h</sup>, 15<sup>h</sup>, 30<sup>h</sup> & 71<sup>h</sup>; & ceux de Saturne en 8<sup>h</sup>, 12<sup>h</sup>, 19<sup>h</sup>, 68<sup>h</sup>, 336<sup>h</sup>, respectivement; une pierre tomberoit au centre de la terre, si le passage étoit libre, en 21' 9". (Whiston, *Astronomical principles of religion*, p. 66). La règle qui sert à faire ces calculs, consiste à dire, 2828 est à 1000, c'est-à-dire, la racine carrée du cube de 2 est à 1, comme la demi-durée de la révo-

Durée de la chute des planètes.

lution d'une planète, est au temps de sa chute jusqu'au centre de l'attraction (*Frisi de gravitate*, pag. 100).

### *Du Mouvement elliptique des Planètes.*

3423. LA FORCE CENTRALE en raison inverse du carré de la distance, ne peut avoir lieu dans des orbites planétaires, à moins qu'elles ne soient des sections coniques. Newton, dans le premier livre de ses principes, prop. 11, 12 & 13, démontra que si les planètes décrivoient des sections coniques, la force centrale dont elles étoient animées, devoit être en raison inverse du carré de la distance; mais M. J. Bernoulli démontra le premier que la proposition inverse est également vraie, & que la force centrale étant supposée en raison inverse du carré de la distance, l'orbite est nécessairement une section conique (*Mém. acad.* 1710 & 1711. *Œuvres de J. Bernoulli*, tom. 1. pag. 469). Ces deux sortes de démonstration pour les forces centrales dans les sections coniques en général, n'étant pas nécessaires pour le calcul des perturbations célestes, je les supprime, & je renvoie aux auteurs où l'on trouve l'une ou l'autre, tels que Newton, *L. I. propos.* 11. Herman, Cotes, Euler, Moivre (*Miscel. analyt.*). Le P. Frisi, *de Gravitate univ. corporum*, 1768, pag. 104. Le P. Boscovich, *de inæqu. Jovis & Satur.* prop. I. François Zanotti, *de Viribus centralibus*. Gregori, *Astronomie elementa* tom. 1. pag. 66. M. de la Caille, *Leçons d'astr.* pag. 104. Je me contenterai d'en donner la démonstration pour la parabole & pour l'ellipse.

3424. La force centrale dans une parabole est en raison inverse du carré de la distance au foyer. Soit *OD*

Fig. 262.

(fig. 262) un arc de parabole infiniment petit (3393), décrit par une comète (3025), *DG* une portion du diamètre qui passe par le point *D*, & qui est parallèle à l'axe *PR*, *OG* l'ordonnée, & *DG* l'abscisse pour l'arc *OD*, *OH* parallèle à *SD* exprime la quantité dont la comète s'écarte de la tangente *DX* en décrivant l'arc

Les orbites  
sont des sec-  
tions con-  
iques.

*DO*; ainsi la ligne *OH* est un infiniment petit du second ordre (3393), de même que *DN* qui lui est égale & parallèle, & *DG* qui lui est aussi égale, puisque *GD* & *DS* font avec la tangente *DT* des angles égaux, par la propriété la plus connue de la parabole (3252). Le paramètre du diamètre *DG* est quadruple de *SD*, ainsi l'on a  $OG^2$  ou  $ON^2$  (qui n'en diffère que d'un infiniment petit d'un ordre inférieur) égal à  $4SD \cdot DG = 4SD \cdot OH$ . Ayant tiré les perpendiculaires *OE* & *SX*, les triangles *ONE*, *SDX* font semblables; d'ailleurs la perpendiculaire *SX* est moyenne proportionnelle entre *SP* & *SD*, donc  $ON:OE::SD: SX::SX: SP$ , ainsi  $ON^2:OE^2::SD: SP::4SD: 4SP$ ; mais  $ON^2=4SD \cdot OH$ , donc  $OE^2=4SP \cdot OH$ . Ainsi  $OH=\frac{OE^2}{4SP}$  ou  $\frac{OE^2}{4SP} \cdot \frac{SD^2}{SD^2}$ ; mais en supposant que le temps soit le même, ou que l'aire soit constante, on aura  $OE^2 \cdot SD^2$  constant, donc *OH* fera proportionnel à  $\frac{1}{SD^2}$ ; c'est-à-dire, que l'effet de la force centrale est en raison inverse du carré de la distance.

Fig. 261.

Force centrale dans la parabole.

3425. La force centrale dans l'ellipse est aussi en raison inverse du carré de la distance. Soit *VL* (fig. 285) un arc d'ellipse infiniment petit, *VN* la tangente, *CI* & *Fh* parallèles à *VN*, *LQ* perpendiculaire à *VS*; la portion *VX* du rayon vecteur *VS* égal à l'écart *LN* de la tangente, est l'effet de la force centrale. A cause des triangles semblables *VEX*, *VqC*, l'on a  $VE: VX:: Vq: VC$ ; mais  $Vq=AC$  (3272), donc l'abscisse *VX* du diamètre *VCn*, qui répond à l'ordonnée *LEX*, est  $\frac{VC \cdot LN}{AC}$ . Par la propriété des diamètres de l'ellipse (3257)  $VX \cdot Xn: XL^2:: VC^2: CI^2$  ou  $VX \cdot 2VC: LE^2:: VC^2: CI^2$ , donc  $LE^2=\frac{2VC \cdot VX \cdot CI^2}{VC^2}$ , & mettant pour *VX* sa valeur  $\frac{VC \cdot LN}{AC}$ ,  $LE^2=\frac{2LN \cdot CI^2}{AC}$ . Les triangles semblables *LEQ*, *VYq* donnent cette proportion  $LE^2: LQ^2:: Vq^2: VY^2:: AC^2: VY^2$ , (3272); mais  $AC \cdot CG=CI \cdot VY$  (3262) ou  $AC^2: VY^2:: CI^2: CG^2$ , donc  $LE^2: LQ^2::$

Force centrale dans l'ellipse.

Fig. 285.

# 548 ASTRONOMIE, Liv. XXII.

$CI^2 : CG^2$  ou  $AC \cdot \frac{p}{2}$ ;  $LQ^2 = \frac{LE^2 \cdot AC \cdot p}{2 CI^2}$ ; substituant pour  $LE^2$  sa valeur  $\frac{2 LN \cdot CI^2}{AC}$ ,  $LQ^2 = p \cdot LN$ ; mais l'effet de la force centrale est exprimé par  $LN$ , il est donc proportionnel à  $\frac{LQ^2}{p}$ . L'effet d'une force centrale  $f$  est aussi en général  $f dt^2$  (3365); donc  $LN = f dt^2$  ou  $f = \frac{LN}{dt^2} = \frac{LN}{SV^2 \cdot LQ^2}$ , & mettant pour  $LQ^2$  sa valeur  $p \cdot LN$ ,  $f = \frac{1}{p \cdot SV^2}$ ; c'est-à-dire, que la force centrale est en raison inverse du carré de la distance  $SV$  au foyer de l'ellipse.

Difficulté sur  
le mouv. el-  
liptique,

3426. Expliquons actuellement d'une manière plus palpable la cause de ce mouvement alternatif, qu'on a souvent peine à bien concevoir. Il semble, dit-on, qu'une planète sans cesse attirée vers le soleil, & qui s'en est approchée à un certain point, devrait s'en approcher sans cesse, puisque le soleil ne cesse point de l'attirer; cependant les planètes descendues à leur périhélie, s'éloignent du soleil & retournent à leur aphélie : voici donc la cause de ce mouvement alternatif. Une planète qui a été projetée de son aphélie, avec une vitesse trop petite pour décrire un cercle à une si grande distance (3419), ou avec une force de projection trop petite par rapport à la force centrale, se rapproche du soleil; mais en se rapprochant elle augmente en vitesse, sans quoi les aires ne seroient plus proportionnelles au temps; supposons qu'elle est arrivée à 120° du point de départ, c'est-à-dire, à son périhélie, & que sa distance au soleil est le quart de la distance aphélie; sa vitesse est quadruple de la vitesse aphélie, car la vitesse augmente en raison inverse des distances (1227); mais la vitesse qui seroit nécessaire dans le périhélie pour décrire un cercle, est seulement deux fois plus grande que la vitesse qui étoit nécessaire pour décrire un cercle dans l'aphélie, parce qu'elle augmente seulement en raison inverse de la racine de la distance (3418), donc la planète a acquis, en descendant de  $A$  en  $P$  (fig. 296), une vitesse double de celle qui lui seroit nécessaire pour décrire un cercle du rayon  $SP$ ; elle



fortira donc de ce cercle pour s'écarter du soleil, & remonter vers l'aphélie : cette première raison fait voir qu'il est nécessaire que la planète, après s'être approchée du soleil, s'en éloigne ensuite : voici une seconde manière de démontrer la même chose.

3427. Supposons toujours une planète projetée en *A* avec une vitesse trop petite pour décrire un cercle du rayon *SA*, en sorte qu'elle soit obligée, dès le premier moment, de descendre dans une orbite plus courbée, en se rapprochant du soleil. Lorsqu'elle sera arrivée en un point *P*, à une distance quatre fois moindre, la force centrale ou l'attraction du soleil sera seize fois plus grande (3396), parce qu'elle est en raison inverse du carré de la distance ; mais la force centrifuge sera soixante-quatre fois plus grande (3420), parce qu'elle augmente, soit par le carré de la vitesse, soit par la diminution de la distance ; donc la force centrifuge est alors beaucoup plus grande que la force centrale ; il n'est donc pas étonnant que la planète commence à s'écarter du soleil.

Pourquoi les planètes s'éloignent du soleil,

3428. On croira peut-être que la planète devrait cesser de s'approcher du soleil aussi-tôt que la force centrifuge se trouve égale à la force centripète ; mais il faut considérer que dans cet instant, qui arrive lorsque la planète est vers sa moyenne distance au soleil, la direction *MN* de son mouvement est trop oblique au rayon vecteur *MS*, & fait un angle *NMS*, trop petit pour que cet angle puisse devenir tout de suite un angle droit ; il faut que la planète descende de plus en plus, & que la courbure de sa route se soit arrondie assez pour que le rayon vecteur *SP* soit perpendiculaire au mouvement de la planète ; c'est alors que l'excès de la force centrifuge, sur la force centrale, sera employé tout entier à écarter la planète du soleil, & cela n'arrive que dans le point *P* qui est diamétralement opposé au point *A*. En partant du point *P* la planète emploiera, pour perdre son excès de force centrifuge, autant de temps qu'il lui en a fallu pour l'acquérir ; voilà pourquoi la seconde partie *POA* de

l'ellipse sera égale à la partie descendante *AMNP*, & décrite dans le même intervalle de temps.

3429. La théorie de l'attraction seroit facile à employer dans l'astronomie, si chaque planète, en tournant autour d'un centre, n'éprouvoit d'autre attraction que celle de la force centrale; mais les autres attractions qui s'y joignent rendent les effets très-multipliés; il est temps de nous livrer à ces recherches, les plus importantes & les plus difficiles de toute l'astronomie théorique.

*Des Inégalités produites par les Attractions  
mutuelles des Corps célestes.*

3430. Si chaque planète, en tournant autour d'un centre, n'éprouvoit d'autre force que celle qui la porte vers ce centre, elle décrirait un cercle ou une ellipse dont les aires seroient proportionnelles aux temps (1233); mais chaque planète étant attirée par toutes les autres, dans des directions différentes & avec des forces qui varient sans cesse, il en résulte des inégalités & des perturbations continuelles. C'est le calcul de ces perturbations qui occupe actuellement les géomètres & les astronomes; Newton commença par celles de la lune (1456); plusieurs autres géomètres ont perfectionné cette théorie (1477). M. Euler a calculé les inégalités de Saturne dans une pièce qui a remporté le prix de l'académie en 1748; M. Clairaut & M. d'Alembert ont donné des recherches sur les inégalités de la terre; j'ai examiné moi-même celles de Mars & de Vénus (*Mém. acad.* 1758, 1760 & 1761), qui se sont trouvées assez considérables pour mériter d'être employées dans les calculs astronomiques. Les inégalités de Jupiter ont été calculées par M. Euler dans la pièce qui a remporté le prix en 1752: (*Recueil des pièces qui ont remporté les prix*, T. II.), & ensuite par M. Mayer; M. Wargentin en a fait usage dans les tables de Jupiter, qui par-là se sont trouvées beaucoup plus exactes, de même que celles des satellites (2912).

Perturbations  
des planètes.

Cette théorie des perturbations célestes, qui fait au jourd'hui une partie essentielle de l'astronomie, n'a été donnée jusqu'ici dans aucun livre élémentaire, je vais essayer d'en développer les principes d'une manière intelligible, & qui puisse servir d'introduction à tous les ouvrages qu'on a écrits là-dessus ; j'aurai soin de ne rien supposer que je n'aye démontré.

343 1. Si deux planètes, dont l'une tourne autour de l'autre, étoient attirées également, & suivant des directions parallèles, par une troisième, cette nouvelle attraction ne changeroit rien à leur système, à leur mouvement, à leur situation relative ; ce seroit la même chose que si l'espace même, ou le plan dans lequel se fait le mouvement avoit changé de position ; mais ce qui avoit lieu dans l'espace ou dans le plan que l'on transporte, continue d'avoir lieu comme auparavant, & la planète vue du centre de son mouv. paroît toujours décrire une ellipse.

343 2. Ainsi deux attractions égales & parallèles ne changent jamais rien dans un système de corps ; ce n'est que la différence des attractions qui produit une inégalité ou une différence de mouvement ; la lune n'est troublée dans son mouvement autour de la terre, que parce qu'elle est attirée par le soleil, un peu plus ou un peu moins que la terre ; la mer n'est agitée deux fois le jour par la lune, que parce que la lune attire les eaux plus qu'elle n'attire la terre, quand elle domine sur les eaux, & qu'ensuite elle attire ces mêmes eaux moins que la terre, 12<sup>h</sup> après.

On ne doit  
considérer que  
la différence  
des attrac-  
tions.

343 3. Quand on veut calculer les troubles qu'une attraction étrangère apporte au mouvement d'une planète, dans son orbite autour du soleil, il faut savoir combien elle agit sur le soleil & sur la planète ; c'est la différence des deux actions qui est la force perturbatrice ; c'est cette différence dont on calcule les effets ; car si le soleil, & la planète qui tourne autour de lui, étoient attirés également, & suivant des directions parallèles, la planète ne cesseroit pas de décrire autour du soleil la même ellipse qu'auparavant ; ses longitudes héliocentriques & ses rayons vecteurs seroient les mêmes, & dans l'usage de l'astronomie nous n'aurions

## 552 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

à tenir compte d'aucune différence, l'observation ne nous indiqueroit aucun dérangement.

Objection  
qu'on a faite  
à l'attraction.

3434. Cette considération étant bien méditée, fera sentir pourquoi la pesanteur de la lune sur la terre, c'est-à-dire, la force centrale qui retient la lune dans son orbite est diminuée dans les deux syzygies, soit quand la lune est en conjonction, soit quand elle est en opposition; c'est une chose que les adverfaires de l'attraction n'ont jamais comprise, & qui cependant influe beaucoup dans l'explication des phénomènes; il en est de la lune comme des eaux de la mer, qui s'élèvent deux fois le jour vers notre zénit, une fois quand la lune domine sur les eaux, ou qu'elle est au zénit, & une fois quand elle est au nadir; les observations prouvent que la lune tend à s'éloigner de la terre également (ou à très-peu près) dans les deux syzygies, & à s'en rapprocher dans les deux quadratures; nous le démontrerons par le calcul (3478); mais on le démontre aussi par le raisonnement qui suit. Quand la lune est en conjonction, elle est plus près du soleil que n'est la terre, de  $\frac{1}{380}$ ; elle est donc plus attirée que la terre de  $\frac{1}{190}$  de la force du soleil sur la terre, (car la différence des carrés est double de celle des racines); sa pesanteur vers la terre est donc affoiblie de  $\frac{1}{190}$ . Quand la lune est pleine, ou en opposition, elle est attirée, il est vrai, du même côté, soit par le soleil, soit par la terre; mais il ne s'ensuit pas que sa pesanteur soit augmentée; en effet, si dans ce cas la lune & la terre étoient attirées par le soleil, précisément avec la même force, il n'en résulteroit aucun changement dans la pesanteur de la lune vers la terre, ni dans son mouvement autour de la terre, quoique la lune fût toujours attirée du même côté par cette somme de deux forces; mais la terre est plus attirée que la lune de  $\frac{1}{190}$ , donc la terre tend à fuir la lune, autant que la lune tendoit à s'éloigner de la terre quand elle étoit nouvelle; leur liaison, leur union mutuelle, leur tendance réciproque, leur sympathie, leur attraction, sont autant diminuées quand le soleil éloigne la terre de la lune, que quand il éloigne la lune de la terre; donc en conjonction,

tion, comme en opposition, la pesanteur est diminuée, & la lune tend à s'éloigner de la terre; c'est par la même raison que nous voyons les eaux de la mer tendre vers le zénit, quoique la lune soit au nadir (3590).

3 4 3 5. La force du soleil sur une planète qui tourne autour de lui, que nous appellons  $\frac{S}{r^2}$  (3386), n'est pas la seule qu'il faille considérer lorsqu'on veut avoir le mouvement d'une planète autour du soleil, ou le mouvement tel qu'il seroit vu par un Observateur situé au centre du soleil. La planète *T*, (fig. 290), attire aussi le soleil en sens contraire, avec une force  $\frac{T}{r^2}$ , & si l'on veut supposer le soleil fixe, il faut attribuer à la planète un nouveau mouvement vers le soleil, égal à celui que le soleil a vers la planète, ou, ce qui revient au même, il faut supposer que le soleil attire la planète avec une force  $\frac{S+T}{r^2}$ , c'est-à-dire, avec la somme des deux masses du soleil & de la planète.

Somme des  
2 attractions.

Fig. 290.

3 4 3 6. L'effet de cette attraction de la planète *T* sur le soleil *S*, est de faire décrire au soleil une petite ellipse autour du centre de gravité commun du soleil & de la planète, (Newton, *L. 1. propr. 67*, *L. III. propr. 13*); du moins en supposant que le soleil ait reçu lui-même une impulsion autour du même centre (*Frifi, pag. 113*). Cette attraction produit une partie des petites inégalités du mouvement apparent du soleil, qui se calculent en prenant la différence des attractions que chaque planète exerce sur le soleil & sur la terre. Suivant Newton le soleil doit être déplacé d'une petite quantité par les attractions planétaires; mais la forme de calcul utilisée dans l'astronomie fait qu'on suppose toujours le soleil fixe, & qu'on transporte à chaque planète le mouvement qu'elle produit sur le soleil, de sorte que la situation respective de la planète au soleil soit toujours la même.

Déplacement  
du soleil.

3 4 3 7. L'expression  $\frac{S}{r^2}$  de la force attractive, est celle qui a lieu quand l'action se fait directement & toujours dans le sens du rayon vecteur; mais les planètes sont atti-

Nécessité de  
décomposer  
les forces.

rées les unes par les autres obliquement & en tout sens, selon des directions qui changent perpétuellement, tandis qu'elles sont toujours attirées directement vers le centre autour duquel elles tournent ; ainsi, pour connoître l'effet des perturbations & des attractions célestes, il faut décomposer leur force absolue, (qui est la masse divisée par le carré de la distance), pour trouver son effet sur la direction même de la force centrale. J'ai dit, par exemple, que l'action de Jupiter sur la terre étoit  $\frac{1}{250000}$  de celle du soleil sur la terre, par une attraction directe (3387) ; mais ces deux forces qui agissent sur la terre se contrarient, & ont souvent des directions différentes ; la force de Jupiter, qui dans l'attraction directe est  $\frac{1}{250000}$  de celle du soleil, fera beaucoup moins d'effet quand elle agira de côté ; par exemple, elle fera deux fois moindre quand elle agira sous un angle de  $60^\circ$ .

Principe de  
mécanique.  
Fig. 295.

3438. UN CORPS sollicité suivant des directions  $AB$ ,  $AC$  (fig. 295), qui font entr'elles un angle  $BAC$ , par deux puissances qui soient entr'elles comme les lignes  $AB$ ,  $AC$ , décrira la diagonale  $AD$  du parallélogramme  $BACD$ , dans le même temps qu'il auroit employé à parcourir  $AB$  ou  $AC$ , étant mû séparément par une des deux puissances (1232). Ainsi la force exprimée par la direction & par la longueur de la diagonale  $AD$ , équivaut à deux forces  $AB$ ,  $AC$  qui auroient agi à la fois ; & lors même qu'elle est unique dans le principe, elle peut du moins être prise pour la réunion des deux autres, auxquelles elle est tout-à-fait équivalente ; c'est-à-dire, que la force  $AD$  peut se décomposer suivant  $AC$  &  $AB$ .

La même ligne  $AD$  est aussi la diagonale du parallélogramme  $AbDc$ , & la force  $AD$  résulteroit également de l'assemblage de deux forces  $Ab$ ,  $Ac$  ; donc sur une ligne donnée  $AD$ , l'on peut faire des triangles quelconques  $ABD$ ,  $AbD$ , de grandeur ou de forme arbitraire, & il sera toujours permis de substituer à la force  $AD$  deux forces qui aient pour expressions les côtés d'un de ces triangles quelconques.

Ainsi la force  $AD$ , que nous nommerons  $F$ , décompo-

fée suivant  $AB$  &  $AC$ , donnera deux forces proportionnelles à ces deux lignes, & parce que  $AC$  est égale à  $BD$ , ces deux forces seront, l'une égale à  $F \frac{AB}{AD}$ , qui agira suivant  $AB$ , l'autre sera  $F \frac{BD}{AD}$ , & agira suivant  $AC$ , ou parallèlement à  $BD$ . Je dis que la force suivant  $AB$  sera  $F \frac{AB}{AD}$ , car, puisque les lignes  $AB, AC, AD$ , sont proportionnelles aux forces qu'elles expriment, la force suivant  $AB$  est à la force suivant  $AD$ , qui est  $F$ , comme la ligne  $AB$  est à la ligne  $AD$ ; donc la force suivant  $AB = F \frac{AB}{AD}$ .

Fig. 295.

3439. Si le parallélogramme donné est rectangle en  $B$  (fig. 294),  $BD$  est le sinus de l'angle  $BAD$ , en prenant  $AD$  pour rayon, ou pour unité;  $AB$  en est le cosinus; ainsi dans ce cas la force suivant  $AB = F \cos. BAD$ , & la force suivant  $AC$  ou  $BD = F \sin. BAD$ ; ces deux forces  $AC, AB$ , sont équivalentes à la force donnée  $AD$ , qu'il s'agissoit de décomposer; nous ferons bientôt usage de cette dernière décomposition.

Lorsque le parallélogr. est rectangle.  
Fig. 294.

Par le moyen de cette décomposition des forces attractives, on peut trouver les forces perturbatrices qui agissent sur une planète, rapportées à la direction même de son mouvement. Je prendrai pour exemple la terre qui est attirée par l'action de Jupiter, & je chercherai quelle est l'inégalité qui en résulte dans le mouvement de la terre.

3440. Soit  $AT$  (fig. 290) l'orbite de la terre, qui est la planète troublée,  $BR$  celle de Jupiter ou de la planète troublante, & supposons-les dans un même plan pour simplifier nos calculs. Soit  $M$  la masse de la planète troublante, l'angle  $RST$  ou l'angle de commutation ( $1142$ ); Jupiter situé en  $R$  attire la terre  $T$  avec une force  $\frac{M}{RT^2}$  (3386); nous ne mettons point ici la somme des masses de Jupiter & de la terre, parce que nous négligerons totalement les troubles de Jupiter.

Fig. 290.

Première décomposition.

La force  $\frac{M}{RT^2}$  doit se décomposer en deux autres, dont l'une agisse de  $T$  en  $G$ , ou de  $S$  en  $R$ ; afin qu'on puisse

# 556 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

*Fig. 290.* en retrancher la force de Jupiter sur le soleil (3434), & l'autre de  $T$  en  $S$ ; la première est  $M \frac{RS}{RT^3}$ , elle tend à éloigner la planète du soleil dans la direction de  $TG$  ou de  $SR$  qui lui est parallèle; & pour cela nous lui donnons le signe négatif; la 2<sup>e</sup> force est  $\frac{M \cdot TS}{RT^3}$  (3438); elle tend à rapprocher la terre du soleil, & nous la mettrons pour cette raison en  $+$ . De ces deux nouvelles forces la seconde est dans la direction du rayon vecteur  $TS$ , auquel nous avons intention de rapporter le mouvement de la terre, ainsi elle n'a besoin d'aucune décomposition nouvelle.

Seconde décomposition.

3441. La force  $\frac{M \cdot RS}{RT^3}$  ou  $\frac{M \cdot TG}{RT^3}$  n'étant point dans la direction du rayon vecteur, ni dans la direction du mouvement de la terre, il faut la rapporter à cette direction; mais il faut auparavant en soustraire la force du soleil; parce que la force  $TG$  n'agit, pour troubler le mouvement de la terre, qu'à raison de ce qu'elle est plus ou moins grande que celle qui agit en même-temps sur le soleil de  $S$  en  $R$ ; mais cette force sur le soleil est  $\frac{M}{SR^2}$  (3435), il faut donc la retrancher de la force  $TG$ , qui est  $\frac{M \cdot SR}{RT^3}$ , & nous aurons  $\frac{M \cdot SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^2}$  pour la force perturbatrice, suivant  $SR$  ou  $TG$ ; il faut la décomposer suivant  $TE$  &  $TB$ , en la multipliant par le cosinus & par le sinus de l'angle  $GTE$  ou  $RST$  (3439), c'est-à-dire, de l'angle  $\tau$ . La force suivant  $TE$  agira dans la direction  $STL$  du rayon vecteur de la terre, mais en sens contraire de la force centrale du soleil; c'est pourquoi elle sera négative; la force centrale du soleil étant supposée positive, parce qu'elle est toujours la plus grande; l'autre force agira de  $T$  en  $B$ , & tendra à diminuer la vitesse de la terre, qui est supposée aller de  $A$  en  $T$ , c'est pourquoi elle sera aussi négative. La première est donc  $-\left(\frac{M \cdot SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^2}\right) \cos. \tau$  (3439), force dirigée vers



le soleil, & l'autre —  $\left( \frac{M \cdot SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^3} \right) \sin. t$ ; celle-ci est la force qui agit perpendiculairement au rayon vecteur, & que j'appellerai  $\pi$  avec M. Clairaut. Le signe — deviendrait +, si l'on cherchoit les inégalités de la planète  $R$ , parce que le point  $R$  est moins avancé suivant l'ordre des signes que le point  $T$ , les planètes les plus éloignées étant toujours les plus lentes. Fig. 290.

3442. Quant à la force dirigée vers le soleil, il faut se rappeler que nous en avons trouvé une partie +  $\frac{M \cdot TS}{RT^3}$  (3440), à laquelle il faut ajouter celle qu'on vient de trouver, puisqu'elle est dans la même direction, & l'on aura enfin la force perturbatrice dirigée vers le centre du soleil, que M. Clairaut appelle  $\phi = + \frac{M \cdot TS}{RT^3} - \left( \frac{M \cdot SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^3} \right) \cos. t$ . Pour faire usage des forces  $\phi$  &  $\pi$ , il faut connoître la valeur de  $M$ , c'est-à-dire, la masse de Jupiter comparée à celle du soleil; on a vu ci-devant sa valeur =  $\frac{1}{1067}$ , (3405). Force  $\pi$ .

3443. Ces forces  $\phi$  &  $\pi$  sont exprimées en parties de la force centrale du soleil  $S$  sur la terre  $T$ ; car quand on dit que la force de Jupiter est  $\frac{M}{RT^2}$ , on suppose que l'on a exprimé la masse  $M$  en parties de la masse du soleil (3404), & la distance  $RT$  en parties de la distance moyenne  $ST$  du soleil à la terre, en sorte qu'on appelle 1, la force que le soleil exerce sur la terre, en l'attirant, lorsqu'elle est dans sa distance moyenne; supposons que  $M = \frac{1}{1067}$ , &  $RT = 5$ , on aura  $\frac{M}{RT^2} = \frac{1}{25000}$  (3387); cela veut dire que la force de Jupiter sur la terre est  $\frac{1}{25000}$  de la force centrale que le soleil exerce sur la terre. Par le moyen du rapport qu'il y a entre ces deux forces de Jupiter & du soleil, on trouvera le rapport des espaces qu'elles font parcourir, & conséquemment la quantité dont le mouvement de la terre dans son orbite est dérangé.

3444. La valeur  $\frac{M \cdot TS}{RT^3}$  nous fait voir que la force

Force en raison inverse du cube de la distance,

## 558 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

perturbatrice qui agit dans la direction  $TS$  du rayon vecteur, & qui modifie la force centrale de la planète, diminue en raison inverse du cube des distances, comme je l'ai supposé ( 3413 ). On verra même bientôt que le second terme de la force  $\Phi$  combiné avec le premier, donne une force totale suivant  $ST$  qui est aussi en raison inverse du cube des distances ( 3468 ); voilà pourquoi nous avons supposé que la force de la lune pour élever les eaux de la mer, seroit plus petite si elle étoit à la distance du soleil, & cela autant que le cube de la distance du soleil est plus grand que le cube de la distance de la lune, parce que la force qui soulève les eaux de la mer est une force décomposée dans la direction  $TS$  du rayon de la terre.

Difficulté  
du calcul des  
attractions.

3445. La force d'une planète sur une autre étant ainsi décomposée & exprimée d'une manière générale, nous allons chercher quel effet il en résultera sur le mouvement de la planète troublée; c'est peu de savoir pour un certain moment que la force de Jupiter pour déranger le mouvement de la terre est  $\frac{1}{25}, \frac{1}{1000}$  de celle du soleil qui retient la terre dans son orbite; il faut savoir combien cette force après avoir agi pendant une infinité de momens, c'est-à-dire, après un temps fini, aura produit d'effet sur le mouvement de la terre; de combien elle aura augmenté ou diminué la vitesse de la terre dans son orbite, de combien elle aura changé le plan de cette orbite, tout cela exprimé en minutes & en secondes, suivant la forme de nos tables astronomiques; c'est en quoi consiste la difficulté du problème des trois corps; on connoît aisément la force perturbatrice à chaque instant, mais il faut chercher 1°. son effet au même instant pour altérer l'orbite, 2°. la somme de ces effets répétés une multitude de fois; c'est ce qui rend ici le calcul intégral absolument nécessaire; on connoît l'effet d'un moment & il s'agit de connoître l'effet de trois mois, d'un an, d'une révolution entière, ou d'un espace quelconque de temps, pendant lequel cet effet n'est point uniforme ni proportionnel au temps.

Nécessité  
du calcul in-  
tégral.

3446. Nous commencerons par réduire en équations le problème des trois corps, à la manière de M. Clairaut.

Soit  $P$  une planète (fig. 297) qui tourne autour du soleil  $S$ ;  $PA$  le petit arc de son orbite qu'elle a décrit en un instant infiniment petit, & qui est supposé une ligne droite infiniment petite;  $AB$  une ligne droite égale à  $AP$ , que la planète parcourroit dans l'instant suivant, si elle étoit abandonnée à elle-même (1231); il faut trouver quel feroit le rayon  $SB$  & l'angle  $ASB$  dans ce cas-là; comparant alors l'angle  $ASB$  avec celui que la planète parcourt effectivement, on aura l'effet des forces qui agissent sur elle pour augmenter ou diminuer l'angle de son mouvement. De même en comparant la distance  $SB$  qui auroit lieu dans le cas du mouvement libre & uniforme, avec celle qui convient au mouvement actuel de la planète, on aura l'effet des forces qui agissent pour augmenter ou diminuer la distance ou le rayon vecteur. Soit  $SP=r$ , l'angle  $PSA=du$ ; ayant tiré  $PE$  perpendiculaire sur  $SA$ ,  $AE$  sera la difference entre  $SP$  & <sup>(a)</sup>  $SA$ ; ainsi  $AE=dr$ ,  $SA=r+dr$ , on aura aussi l'arc  $PE=r du$  (3357), c'est une fraction de la distance  $r$ , l'angle  $du$  étant toujours supposé une fraction des  $57^{\circ}$  qui font la valeur de l'arc égal au rayon; on tirera  $BH$  parallèle à  $AS$ ,  $AH$  perpendiculaire à  $BH$ , & l'on aura  $AH=PE$  &  $AE=BH$ , puisque les triangles  $ABH$  &  $PAE$  sont parfaitement égaux; il faut chercher la valeur de  $GH$ , la retrancher de  $AH$  pour avoir  $AG$ , d'où l'on tirera l'angle  $ASG$  ou  $ASB$  que l'on cherche.

Il faut d'abord faire voir que l'angle  $ASB$  ne diffère de l'angle  $ASP$  que d'un infiniment petit du second ordre; ayant prolongé  $SP$  en  $M$ , j'abaisse la perpendiculaire  $BM$  sur  $PM$ , & la perpendiculaire  $AO$  sur  $MB$ ; dans les triangles semblables  $BAO$ ,  $BPM$ ,  $BA=AP$ , donc  $BO=OM$ ; mais la ligne  $SAD$  fait avec la vraie perpendiculaire  $AO$  un angle  $OAD=PSA$ , infiniment petit du premier ordre, donc  $OD$  est un infiniment petit du 2<sup>e</sup> ordre (3349), donc  $BD$  ne diffère de  $DM$  que d'un infiniment

(a) Je suppose ici que l'arc  $PE$  dont il ne diffère que d'un infiniment petit du 4<sup>e</sup> ordre (3317).  
 décrit du centre  $S$  soit confondu avec la perpendiculaire sur  $SA$ ,

petit du second ordre, il faut dire la même chose des angles  $PSA$ ,  $ASB$  dont les arcs  $BD$  &  $MD$  font la mesure.

Les triangles  $EPS$ ,  $BGH$  sont semblables, car ils sont tous deux rectangles, & l'angle  $GBH = ASB$  ne diffère de l'angle  $ASP$  que d'un infiniment petit du second ordre qui n'introduiroit dans la valeur de  $GH$  qu'une erreur du 3<sup>e</sup> (3349); on aura donc cette proportion  $SP : PE :: BH$  ou  $AE : GH$ , c'est-à-dire,  $r : r du :: dr : GH$ ; donc  $GH = dr du$ , ce qui est encore une partie ou une fraction du rayon  $r$ ; donc  $AG = AH - GH = r du - dr du$ ; l'angle  $ASB$  ou  $ASG$  est égal à l'arc  $AG$  divisé par le rayon  $AS$  (3357)  $= \frac{AG}{AS} = \frac{r du - dr du}{r + dr}$ ; on fera la division

Angle parcouru librement.

actuelle en procédant comme dans la division ordinaire, & négligeant les quantités du 3<sup>e</sup> ordre; on trouvera pour le quotient ou pour la valeur de l'angle  $ASB$ ,  $du - \frac{2 dr du}{r}$ ; c'est l'angle que la planète  $P$  auroit parcouru, en suivant librement la ligne droite  $PAB$ .

Rayon vecteur de la planète libre.

3447. Pour parvenir à trouver aussi le rayon vecteur  $SB$ , nous chercherons de même la valeur de  $EG$ , en disant  $SP : PE :: AF$  ou  $PE : (a) FG$ , c'est-à-dire,  $r : r du :: r du : FG$ ; donc  $FG = r du^2$ ; ainsi la distance  $SB = SP + EA + FG + GB$  ou son égal  $BH(b)$ ,  $= r + dr + r du^2 + dr = r + 2 dr + r du^2$ . Telle est donc la valeur de la distance  $SB$  de la planète au soleil, qui auroit lieu, si elle avoit parcouru  $AB = PA$ , librement & dans le même espace de temps qu'elle avoit parcouru  $PA$ ; l'on auroit  $SB = r + 2 dr + r du^2$  & l'angle  $ASB = du - \frac{2 dr du}{r}$ .

Voyons combien ces quantités deviendront différentes par l'effet des forces qu'il faut considérer.

3448. Le mouvement d'une planète étant inégal en lui-même, & troublé de plus par les attractions étrangères, cette planète au lieu d'arriver en  $B$ , se trouvera en

(a) Je suppose  $AF = PE$ , ils diffèrent d'un infiniment petit du second ordre, comme l'angle  $PSA$  diffère de l'angle  $ASB$ ; mais il n'en résulteroit qu'un infiniment petit du troisième sur la valeur de  $FG$  que nous cherchons.

(b) Je suppose  $BG = BH$  ou  $AE$ , puisqu'ils ne diffèrent que d'un infiniment petit du 3<sup>e</sup> ordre.

un point  $K$ , l'expression de l'angle  $ASK$  qu'elle parcourra réellement est en général  $du + d du$ , car nous n'avons, quant-à-présent, aucune manière d'exprimer l'inégalité d'un angle variable  $du$ , ou son accroissement, c'est-à-dire, la différentielle de  $du$ , qu'en l'appellant  $d du$  (3294); si de la valeur de l'angle  $ASK = du + d du$  on ôte l'angle  $ASB = du - \frac{2 dr du}{r}$ , on aura pour la valeur de l'angle  $BSK$ ,  $d du + \frac{2 dr du}{r}$ ; mais l'arc  $LK$  est égal à l'angle multiplié par le rayon (3357), c'est-à-dire, par  $SL = r$ ; donc  $LK = r d du + 2 dr du$ , c'est l'espace parcouru perpendiculairement au rayon vecteur, en vertu de la force perturbatrice  $\pi$  qui agit sur la planète (3441). Cet espace est une fraction du rayon  $r$ , puisque c'est  $r$  multipliée par une petite fraction de  $r$ , & par d'autres petites fractions  $du$  ou  $d du$ , qui dans la multiplication ne produisent que des fractions du rayon.

Effet de la force  $\pi$ .

3449. De même la vraie distance  $SK$  de la planète au soleil, doit être exprimée en général par  $r + 2 dr + d dr$ , (car l'augmentation du rayon  $PS$  en devenant  $SA$  étoit  $dr$ , & en devenant  $SK$ , ce fera encore  $dr + d dr$ ); l'on ôtera ce vrai rayon vecteur  $SK$  ou  $SL$ , du rayon  $SB$  qui auroit lieu si la planète eût avancé uniformément sur  $PAB$ ; & l'on aura  $BL = r du^2 - d dr$  qui est encore une petite fraction de  $r$ ; c'est l'effet de la force perturbatrice  $\Phi$  qui agit de  $B$  en  $S$ , jointe à la force centrale du soleil, égale à  $\frac{S}{r^2}$ , (appelant  $S$  la masse du soleil); car c'est le total de la force dirigée vers  $S$ , qui produit la quantité  $BL$  dont la planète est rapprochée du centre (1231).  $S$  doit être pour plus d'exactitude la somme des masses du soleil & de la terre.

Effet de la force centrale.

3450. Toutes les fois qu'une force attractive agit sans interruption pendant un instant  $dt$ , les espaces qu'elle fait parcourir sont toujours comme les carrés des temps (3367); ainsi la force  $\pi$  multipliée par le carré du temps  $dt$  pendant lequel elle agit, est égale à l'espace  $LK$  qu'elle fait parcourir perpendiculairement au rayon vecteur; donc

Première équation.

# 562 ASTRONOMIE, Liv. XXII.

$n dt^2 = r ddu + 2 dr du$ ; c'est la première équation du problème des trois corps.

Seconde  
équation.

Il en est de même de la force dirigée au centre  $S$  & qui fait parcourir  $BL$  dans le même temps  $dt$ , l'on aura  $\left(\frac{S}{r^2} + \Phi\right) dt^2 = r du^2 - ddr$ ; c'est la seconde équation différentio-différentielle du problème des trois corps. Par le moyen de ces deux équations générales, il s'agit de trouver le rayon vecteur de l'orbite troublée, & l'angle  $u$  de l'anomalie vraie, pour un temps quelconque; je vais expliquer la méthode par laquelle M. Clairaut résout ces deux équations (*Mém. acad.* 1748, & *Théorie de la lune*, 1765). Au lieu de  $dt^2$  il emploie le mouvement moyen  $dx$  qui est proportionnel au temps, ce qui revient au même; car  $dt$  est une fraction du temps de la révolution (3355) &  $dx$  est une fraction pareille des  $360^\circ$  qui forment une révolution.

345 I. On peut tirer de la seconde équation une expression de la force centrifuge, qui a lieu dans un cercle décrit uniformément; car si  $r$  est constant, le terme  $ddr$  disparaîtra totalement, & mettant  $F$  au lieu de  $\frac{M}{r^2} + \Phi$ , on aura  $F dt^2 = r du^2$ , donc  $F = \frac{r du^2}{dt^2}$ , ou  $\frac{rr du^2}{r dt^2}$ , mais  $\frac{rr du^2}{dt^2}$  est le carré de  $\frac{r du}{dt}$ , ou du petit arc divisé par le temps; c'est donc le carré de la vitesse de la planète qui

Fig. 291.

est représentée par l'arc  $PB$ , (*fig.* 291); donc  $F = \frac{PB^2}{r}$ ; c'est l'expression de la force centrale, ou de la force centrifuge, car elles sont égales dans le mouvement circulaire. Cette expression est double de celle que donne la propriété du cercle (3391), parce que dans le calcul différentiel nous venons de supposer que  $PA$  est une ligne droite, au lieu que dans la méthode synthétique nous l'avons supposée circulaire, ce qui rendoit l'écart de la tangente moitié moindre; cette différence a été la source de quelques méprises dont j'ai parlé (3392).

345 2. Je passe à la résolution des deux équations; la première est  $n dx^2 = r ddu + 2 dr du$  (3450); l'on en tire

$\frac{r r d d u + 2 r d r d u}{d x} = \pi r d x$ , & prenant l'intégrale (3294)

$\frac{r r d u}{d x} = f + \int \pi r d x$ , où  $d x$  est supposé constant, &  $f$  une constante ajoutée pour l'intégration (3304); multipliant par  $\pi r d x$ , on a  $\pi r^3 d u = f \pi r d x + \pi r d x \int \pi r d x$ , & prenant l'intégrale  $\int \pi r^3 d u = f \int \pi r d x + \frac{1}{2} (\int \pi r d x)^2$  (3303); on résoudra cette équation du second degré, en ajoutant de chaque côté  $f^2$ , & tirant la racine des deux membres, il viendra  $f + \int \pi r d x =$

$\sqrt{f^2 + 2 \int \pi r^3 d u}$ ; faisant  $\frac{\int \pi r^3 d u}{f^2} = p$ , ou  $\int \pi r^3 d u = f^2$

$p$ , & prenant la différentielle (3297), on a  $\pi r d x =$  Expression  
du temps.

$\frac{2 \int \pi r^3 d u}{2 \sqrt{f^2 + 2 \int \pi r^3 d u}}$ ,  $d x = \frac{r r d u}{f \sqrt{1 + 2 p}}$ ; c'est l'élément du temps, ou de la longitude moyenne, qui sera développé (3464), après qu'on aura trouvé le rapport des deux autres inconnues  $r$  &  $u$ .

3453. Passons à la seconde équation (3450)  $r d u^2 - d d r = \left( \frac{S}{r r} + \Phi \right) d x^2$  ou  $\frac{r d u^2}{d x^2} - \frac{d d r}{d x^2} = \frac{S}{r r} + \Phi$ , qu'il faut intégrer pour avoir la valeur de  $r$ . On considérera d'abord que dans cette équation il n'y a que le second terme  $\frac{d d r}{d x^2}$  qui contienne une différentielle du second ordre,

& ce terme est la même chose que  $d \left( \frac{d r}{d x} \right)$ , divisé par  $d x$ , en supposant  $d x$  constant; mais pour rendre l'équation plus générale, & pour avoir la liberté de supposer constante une des autres inconnues, comme  $d u$ , ce qui sera plus commode dans la suite du calcul, il faut exprimer cette équation d'une manière qui ne suppose point que  $d x$  soit constant, & pour cela il suffit d'écrire  $d \left( \frac{d r}{d x} \right)$  (3313); on aura donc pour la seconde équation

$$\frac{r d u^2}{d x^2} - d \left( \frac{d r}{d x} \right) = \frac{S}{r r} + \Phi, \text{ dans laquelle il faut substituer}$$

la valeur de  $\frac{r d u^2}{d x^2}$ ; on prendra celle de  $d x = \frac{r^2 d u}{f \sqrt{1 + 2 p}}$

# 564 ASTRONOMIE, Liv. XXII.

(3452),  $\frac{du}{dx} = \frac{f\sqrt{1+2\rho}}{rr}$ ;  $\frac{du^2}{dx^2} = \frac{f^2}{r^3} (1+2\rho)$ ;  $\frac{rd u^2}{dx^2} = \frac{f^2}{r^2} (1+2\rho)$ ; c'est la valeur du premier terme que nous emploierons bientôt.

Il faut aussi chercher celle du second terme  $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$ ; au moyen de la valeur de  $\frac{du}{dx}$  nous aurons celle de  $\frac{dr}{dx}$ , en multipliant  $\frac{f\sqrt{1+2\rho}}{rr}$  par  $\frac{dr}{du}$ , c'est-à-dire, que  $\frac{dr}{dx} = \frac{fdr}{rr du \sqrt{1+2\rho}}$ . C'est la différentielle  $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$ , qu'il faudra diviser par  $dx$ ; or la différentielle de  $\frac{fdr}{rr du \sqrt{1+2\rho}}$  (3302) est  $\frac{f ddr}{rr du \sqrt{1+2\rho}} + \frac{f dr d\rho}{rr du \sqrt{1+2\rho}} - \frac{2 f r dr^2}{r^4 du \sqrt{1+2\rho}}$ ; en supposant  $du$  constant; car en différentiant une différentielle première, on peut toujours pour faciliter le calcul supposer une des inconnues constante; divisant par la valeur de  $dx$ , ou  $\frac{r^2 du}{f\sqrt{1+2\rho}}$ , on aura les cinq termes suivans  $\frac{f^2 ddr}{r^4 du^2} (1+2\rho) + \frac{f^2 dr d\rho}{r^4 du^2} - \frac{2 f^2 dr^2}{r^5 du^2} (1+2\rho)$  pour la valeur entière de  $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$ .

Si l'on ôte cette valeur de celle de  $\frac{r du^2}{dx^2}$ , c'est-à-dire, de  $\frac{f^2}{r^3} (1+2\rho)$ , on aura la valeur de  $\frac{S}{rr} + \Phi$  égale à  $\frac{f^2}{r^3} (1+2\rho) - \frac{f^2 ddr}{r^4 du^2} (1+2\rho) - \frac{f^2 dr d\rho}{r^4 du^2} + \frac{2 f^2 dr^2}{r^5 du^2} (1+2\rho)$ ; c'est la seconde équation du problème, mise sous une nouvelle forme; mais  $f^2 d\rho = \pi r^2 du$ , d'où il suit que  $-\frac{f^2 dr d\rho}{r^4 du^2} = -\frac{\pi r^2 du dr}{r^4 du^2} = -\frac{\pi dr}{r du}$ ; donc  $\frac{S}{rr} + \Phi + \frac{\pi dr}{r du} = \frac{f^2}{r^3} (1+2\rho) - \frac{f^2 ddr}{r^4 du^2} (1+2\rho) + \frac{2 f^2 dr^2}{r^5 du^2} (1+2\rho)$ ; divisant par  $1+2\rho$ , & multipliant par  $\frac{rr}{S}$  on aura  $1 + \frac{\Phi rr}{S} + \frac{\pi r dr}{S du}$



$$= \frac{f^2}{Sr} - \frac{f^2 ddr}{Sr^2 du^2} + \frac{2f^2 dr^2}{Sr^3 du^2} = \frac{\frac{f^2}{Sr} du^2 - \frac{f^2}{Sr^2} ddr + \frac{2f^2 dr^2}{Sr^3}}{du^2}.$$

3454. Pour simplifier le calcul on supposera le premier

$$\text{membre } \frac{1 + \frac{\phi rr}{S} + \frac{\pi r dr}{S du}}{1 + 2\rho} = 1 + \Omega = \frac{\frac{f^2}{Sr} du^2 - \frac{f^2}{Sr^2} ddr + \frac{2f^2 dr^2}{Sr^3}}{du^2},$$

ou ce qui revient au même,  $\Omega = \frac{\frac{\phi rr}{S} + \frac{\pi r dr}{S du} - 2\rho}{1 + 2\rho}$ . Mais

$\frac{f^2 ddr}{Sr^2} - \frac{2f^2 dr^2}{Sr^3}$  est la différentielle de  $\frac{f^2 dr}{Sr^2}$  (3295); donc  $1 + \Omega$

$$= \frac{\frac{f^2}{Sr} du^2 - d\left(\frac{f^2 dr}{Sr^2}\right)}{du^2}; \text{ soit fait le premier terme de } 1 + \Omega$$

ou  $\frac{f^2}{Sr} = 1 - s$ , on aura  $ds = \frac{f^2 dr}{Sr^2}$  (3295), &  $dds = d\left(\frac{f^2 dr}{Sr^2}\right)$  qui est la valeur des deux derniers termes, donc

$1 + \Omega = 1 - s - \frac{dds}{du^2}$  &  $s + \frac{dds}{du^2} + \Omega = 0$ . C'est-là l'équation qu'il s'agit d'intégrer, mise sous la forme la plus simple, à laquelle se réduit principalement la question du problème des trois corps, dans tous les auteurs qui l'ont appliquée à la théorie de la lune, (M. Clairaut, pag. 5. M. d'Alembert, pag. 16. M. Euler, pag. 24. M. Simpson, pag. 146).

3455. On verra bientôt que  $\Omega$  se réduit à des termes tels que  $a \cdot \cos. pu$ , c'est-à-dire, qui ne renferment que des cosinus de multiples de  $u$  (3467). Ainsi nous allons intégrer cette équation, en supposant  $s + \frac{dds}{du^2} + a \cdot \cos. pu = 0$ , ce qui sera peut-être moins élégant, mais plus facile à entendre que l'intégration générale de M. Clairaut.

3456. Etant donnée l'équation qu'il s'agit d'intégrer  $s + \frac{dds}{du^2} + a \cdot \cos. pu = 0$ , on la multipliera par  $du \cos. u$ , & l'on aura  $s du \cdot \cos. u + \frac{d ds \cdot \cos. u}{du} + a du \cdot \cos. pu \cdot \cos. u = 0$ . Donc (3623)  $s du \cdot \cos. u + \frac{d ds \cdot \cos. u}{du} + \frac{1}{2} a du$ .

Equation du  
problème.

Méthode  
pour l'inté-  
grer.

566 ASTRONOMIE, Liv. XXII.

$\text{cof. } p+1 \, u + \frac{1}{2} a \, du \cdot \text{cof. } p-1 \, u = 0$ . L'intégrale de cette équation se trouvera par la règle ordinaire (3309).

$$s \cdot \sin u + \frac{ds}{du} \cdot \text{cof. } u + \frac{a}{2p+1} \sin. p+1 \, u + \frac{a}{2(p-1)}$$

$\sin. p-1 \, u = g$ ; la constante  $g$  est celle qu'on doit toujours suppléer dans toute forte d'intégration (3304).

3457. Au lieu du sinus de la somme des angles  $u$  &  $pu$ , mettons sa valeur (3617).  $\sin. pu \cdot \text{cof. } u + \sin. u \cdot \text{cof. } pu$ , & au lieu de  $\sin.$  de la différence, mettons sa valeur (3619).  $\sin. pu \cdot \text{cof. } u - \sin. u \cdot \text{cof. } pu$ , & nous au-

$$\text{rons } s \cdot \sin. u + \frac{ds}{du} \cdot \text{cof. } u + \frac{a}{2(p+1)} \sin. pu \cdot \text{cof. } u + \frac{a}{2(p-1)}$$

$$\sin. u \cdot \text{cof. } pu + \frac{a}{2(p-1)} \cdot \sin. pu \cdot \text{cof. } u - \frac{a}{2(p-1)} \sin. u \cdot$$

$$\text{cof. } pu = g; \text{ mais } \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1} = \frac{p-1+p+1}{p^2-1} = \frac{2p}{p^2-1}, \text{ \&}$$

$$\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1} = \frac{p-1-p-1}{p^2-1} = \frac{-2}{p^2-1}; \text{ donc on aura } s \cdot \sin. u +$$

$$\frac{ds}{du} \text{cof. } u + \frac{ap}{p^2-1} \cdot \sin. pu \cdot \text{cof. } u - \frac{a}{p^2-1} \sin. u \cdot \text{cof. } pu -$$

$$g = 0; \text{ multipliant par } \frac{du}{\text{cof. } u^2}, \text{ l'équation devient } \frac{s \, du \cdot \sin. u}{\text{cof. } u^2}$$

$$+ \frac{ds}{\text{cof. } u} + \frac{ap \, du \cdot \sin. pu}{(p^2-1) \text{cof. } u} - \frac{a \, du \cdot \text{cof. } pu \cdot \sin. u}{(p^2-1) \text{cof. } u^2} - \frac{g \, du}{\text{cof. } u^2} = 0.$$

$$3458. \text{ Les deux premiers termes } \frac{s \, du \sin. u}{\text{cof. } u^2} + \frac{ds}{\text{cof. } u} \text{ ont}$$

pour intégrale  $\frac{s}{\text{cof. } u}$  (3312). Les deux termes suivans ont

pour intégrale  $\frac{-a \text{cof. } pu}{(p^2-1) \text{cof. } u}$  (3295), mais il faut y ajouter

$\frac{a}{p^2-1}$  (3305). Le dernier terme a pour intégrale  $g \cdot \text{Tang.}$

$u$  (3310) ou  $\frac{g \sin. u}{\text{cof. } u}$ . Donc l'intégrale entière est  $\frac{s}{\text{cof. } u} -$

$$\frac{a \cdot \text{cof. } pu}{(p^2-1) \text{cof. } u} + \frac{a}{p^2-1} - \frac{g \cdot \sin. u}{\text{cof. } u} = h; \text{ c'est encore une}$$

constante qu'il faut ajouter pour l'intégration (3304).

Multipliant par  $\text{cof. } u$ , l'on aura  $s - \frac{a}{p^2-1} \cdot \text{Cof. } pu +$

$$\frac{a}{p^2-1} \cdot \text{Cof. } u - g \cdot \text{Sin. } u = h \cdot \text{Cof. } u, \text{ \& mettant pour } s$$

sa valeur  $1 - \frac{f^2}{s^2}$  (3454), l'on aura enfin cette équation

$\frac{f^2}{S^2} = 1 - g. \sin. u - h. \text{Cof. } u + \frac{a}{p p - 1}. \text{Cof. } u - \frac{a}{p p - 1}.$   
 $\text{Cof. } p u$ ; que j'appellerai l'équation de l'orbite troublée.

3459. Cette équation de l'orbite troublée a trois termes,  $1 - g. \sin. u - h. \text{Cof. } u$ , qui sont les mêmes que dans l'équation d'une ellipse ordinaire (3280), dont  $\frac{f^2}{S^2}$  feroit le paramètre; les deux derniers termes sont le changement que les forces perturbatrices causent dans l'équation de l'orbite, ou l'effet des forces  $\pi$  &  $\phi$ ; c'est un des avantages de la solution de M. Clairaut, d'avoir ainsi, dans une même équation, par des termes séparés, l'expression d'une orbite elliptique, & celle d'une orbite troublée.

3460. En supposant  $\Omega = a \text{ cof. } p u + \text{cof. } m u$ , on trouveroit pour la correction de  $\frac{p}{r}$  les mêmes termes; & de plus les deux suivans  $\frac{1}{(m^2 - 1)}. \text{Cof. } u - \frac{1}{m^2 - 1} \text{cof. } m u$ ; d'où il suit que si  $\Omega$  est exprimé par une suite de termes  $A. \text{Cof. } m u + B. \text{Cof. } n u + C. \text{Cof. } q u$ , &c. (3467), on aura pour l'équation générale  $\frac{p}{r} = 1 - g. \sin. u - (h - \frac{A}{m^2 - 1} - \frac{B}{n^2 - 1} - \frac{C}{q^2 - 1}, \&c.) \text{cof. } u - \frac{A. \text{cof. } m u}{m^2 - 1} - \frac{B. \text{cof. } n u}{n^2 - 1} - \frac{C. \text{cof. } q u}{q^2 - 1}$ , c'est-à-dire, qu'il y aura autant de termes  $\text{cof. } u$  qu'il y aura eu de termes dans  $\Omega$ , & en outre autant de termes  $\text{cof. } m u$ ,  $\text{cof. } n u$ ,  $\text{cof. } q u$ , &c.

Equation de  
 l'orbite trou-  
 blée.

3461. A l'égard des termes qui multiplient  $\text{cof. } u$ ; & qui se joignent au terme  $h. \text{cof. } u$  que renferme l'équation d'une ellipse ordinaire (3280), ils affecteront bien l'ellipse que décrit la planète, mais ils l'affecteront constamment; & comme cette ellipse est déterminée par observation, & qu'il nous importe peu de savoir ce que l'excentricité eût été dans le cas où les planètes troublantes n'auroient pas été créées, nous n'aurons aucune attention à faire à ces termes  $\text{cof. } u$ , en calculant les inégalités périodiques; nous nous bornerons aux termes  $m u$ ,  $n u$ , qui troublent cette orbite & l'empêchent d'être une ellipse immobile (3423).

3462. M. d'Alembert parvient à l'équation de l'art. 3454, par une méthode fort élégante, quoique très-différente de celle que je viens d'expliquer; il considère que l'orbite décrite en vertu des deux forces  $\phi$  &  $\pi$ , peut aussi être décrite en vertu d'une seule force qui tendroit toujours au point fixe; & il cherche l'équation qui a lieu entre le rayon vecteur & l'angle parcouru, en employant cette force unique; M. d'Alembert trouve aussi une expression de cette force qui renferme les forces  $\phi$  &  $\pi$ , & il la substitue pour avoir l'équation de l'orbite. *Recherches*, &c. 1754, pag. 12.

3463. La manière dont M. d'Alembert intègre cette équation différentielle de l'art. 3454, est aussi fort différente de celle de M. Clairaut: il se sert avec succès de l'expression imaginaire  $\sin. A = \frac{e^{A_1 - 1} - e^{-A_1 - 1}}{2}$  dans laquelle  $e$  est la base des logarithmes; mais l'explication de cette méthode ingénieuse & de ses applications m'auroit obligé de changer totalement l'ordre & la suite de mon traité de l'attraction.

3464. Quand on a trouvé la valeur de  $\frac{p}{r}$  (3460); on peut chercher l'élément du temps  $dx = \frac{r r du}{f \sqrt{1 + 2p}}$  (3452) qui ne contient que des fonctions de  $r$  & de  $u$ . Le paramètre de l'orbite troublée que je suppose donné par observation, & égal à  $p$ , étoit appelé  $\frac{f^2}{S}$  (3459), donc  $f^2 = p S$  &  $dx = \frac{r r du}{\sqrt{f^2 + 2 f^2 p}} = \frac{r r du}{\sqrt{p S + 2 p S p}}$ , mais je suppose  $S = 1$ , parce que toutes les masses sont exprimées en parties de  $S$ , qui est la masse centrale, c'est-à-dire, la masse du soleil, quand il s'agit des inégalités des planètes principales, & celle de la terre quand il s'agit des inégalités de la lune. Je suppose aussi  $p = 1$ , parce que l'orbite est presque concentrique, c'est-à-dire, que le paramètre ne diffère du grand axe que d'une quantité beau-

coup plus petite que l'excentricité ; donc  $dx = \frac{rr du}{1 + 2\rho}$   
 $= rr du (1 + 2\rho)^{-\frac{1}{2}} = rr du (1 - \rho)$  en négligeant les  
 termes ultérieurs de la série (3286).

3465. Par la propriété de l'ellipse on a  $\frac{p}{r} = 1 - e$ .

cof.  $mu$  (3279), ou  $\frac{1}{r} = 1 - e$ . Cof.  $mu + Z$ , appellant

$Z$  la correction de  $\frac{1}{r}$  que nous trouvons par le moyen des

forces perturbatrices (3460, 3493) ; il faut en conclure

la valeur de  $rr$  ; pour cela nous ferons les deux termes  $1$

$- e$ . Cof.  $mu = a$ , & élevant  $a + Z$  à la puissance  $-2$ ,

nous aurons  $r^2 = a^2 - 2a^{-1}Z$  ; mais  $a^{-2} = 1 + 2e$ . cof.

$mu$  &  $a^{-1} = 1 + 3e$ . Cof.  $mu$ , en négligeant les termes

ultérieurs de la série, qui renfermeroient  $e^2$  ; donc  $r^2 =$

$1 + 2e$ . Cof.  $mu - 2Z - 6eZ$ . Cof.  $mu$  ; substituant

cette valeur de  $rr$  dans l'expression  $dx = rr du (1 - \rho)$ ,

& négligeant les termes où se trouve le produit des deux

petites quantités  $Z$  &  $\rho$ , on aura  $dx = (1 + 2e$ . Cof.  $mu$

$- 2Z - 6eZ$ . Cof.  $mu - \rho - 2e\rho$ . Cof.  $mu) du$ , donc

les termes variables de cette expression sont  $-(2Z + \rho)$

$du - 2e(3Z + \rho)$ . Cof.  $mu du = dx$  ; c'est la correc-

tion de l'élément du temps ou de la longitude moyenne,

pour le cas même où l'on fera entrer dans le calcul l'ex-

centricité de la planète troublée.

3466. Toutes les quantités que l'on trouve par ces

calculs sont de petites fractions du rayon de l'orbite que

nous avons pris pour unité ; les forces  $\phi$  &  $\pi$  sont des

fractions de la force du soleil à la distance  $1$ , ou à la dis-

tance moyenne du soleil à la planète troublée, quand il

s'agit d'une planète principale telle que Jupiter ; sa masse

est une fraction de la masse du soleil, & sa distance à la

terre une fraction de la distance du soleil ; ainsi la force

qui résulte de cette masse divisée par le carré de la dis-

tance est aussi une fraction de la force du soleil ; mais on

n'a trouvé qu'en parties du rayon l'espace parcouru en

vertu de ces forces, savoir,  $rddu + 2drdu$  pour la

force  $\pi$  &  $rdu^2 - ddr$  pour la force  $\frac{M}{rr} + \phi$  (3450) : ces

Elément du  
temps.

Toutes ces  
quantités sont  
des fractions  
du rayon.

termes renferment tous  $r$  ou  $d dr$ , donc ces espaces ne nous viennent qu'en parties du rayon  $r$ ; il en est de même de  $\int \pi r^3 du = \rho$ , qui est égal à  $r^3$  multiplié par une fraction de la force  $\pi$ ;  $\rho$  est donc une fraction de  $r^3$ , c'est-à-dire, de la distance; il en est de même de  $\Omega$ , dont toutes les parties multiplient  $r$  & sont des fractions de  $r$ ; ainsi  $Z$  qui est une quantité composée de  $\Omega$ , est donc aussi une fraction de la distance  $r$ , c'est pourquoi l'on multipliera le dernier résultat par deux cens mille pour avoir le nombre de secondes qu'il contiendra (3359, 3471, 3494).

3467. Nous avons l'équation de l'orbite troublée, en supposant  $\Omega = a \cos. pu$  (3460); il s'agit actuellement de démontrer que  $\Omega$  doit s'exprimer en effet par une suite de termes, comme  $\cos. pu$ , ou  $\cos. mu$ . Pour cela il faut évaluer les forces  $\Phi$  &  $\pi$ , dont  $\Omega$  est composé. La force  $\Phi$  est égale à la masse de la planète troublante, multipliée par  $\frac{TS}{RT^3} - \left( \frac{RS}{RT^3} - \frac{1}{RS^2} \right) \cos. t$  (3442); cette force est très-variable; car elle dépend de quatre variables; 1°. De la distance  $TS$  (fig. 290), ou du rayon vecteur de la planète troublée; 2°. du rayon vecteur  $RS$  de la planète troublante; 3°. de la distance  $RT$  qu'il y a entre les deux planètes; 4°. de l'angle de commutation  $t$ , ou  $RST$ , formé par les deux rayons vecteurs. Il faudra, pour simplifier cette expression, trouver le moyen d'exprimer toutes ces variables, par la seule anomalie  $u$  de la planète troublée, c'est-à-dire, qu'il faudra chercher le rapport (du moins par approximation) entre  $u$  & les trois autres variables qui entrent dans l'expression de la force  $\Phi$ .

Pour donner un exemple de ces sortes d'approximations je choisirai d'abord une des inégalités que le soleil cause dans le mouvement de la lune, & ensuite une de celles que Jupiter cause dans le mouvement de la terre, ou, ce qui revient au même, dans le lieu apparent du soleil. Mon objet n'est que de rendre les principes évidens, & de faire entrer le lecteur dans l'esprit des méthodes; ainsi je n'en ferai que de courtes applications; mais elles seront suffisantes pour qu'un lecteur appliqué les puisse

étendre plus loin, après qu'il aura suivi & calculé les deux exemples que je vais détailler.

3468. LES INÉGALITÉS DE LA LUNE sont si Des inégali-  
tés de la lune. considérables & si multipliées que pour les déterminer exactement, il faudroit employer une multitude énorme de termes; il est donc impossible d'entrer ici dans ce détail, mais il faut au moins donner une idée des difficultés que ce problème renferme; j'y ajouterai le calcul de la variation (3470). Newton & plusieurs auteurs ont parlé de cette inégalité, (Gregori, *Astr. Elem.* M. de la Caille, pag. 356); mais aucun n'a fait voir la manière de la calculer en nombres par le principe de l'attraction.

Le centre *S* représentera la terre, *AT* l'orbite de la lune autour de la terre, qui est supposée fixe en *S*; *BR* l'orbite apparente que le soleil semble décrire en un an autour de la terre; nous supposons ces deux orbites concentriques, & dans le même plan, pour simplifier le calcul. La force  $\Pi = - \left( \frac{M.SR}{R.T^3} - \frac{M}{S.R^2} \right) \sin. t.$  (3441), peut se réduire à une forme beaucoup plus simple, à cause de la grande distance de la lune; car ayant abaissé la perpendiculaire *TC* sur le rayon qui va de la terre au soleil, l'on a *RT* sensiblement égal à *RC*; donc *RT* = *SR* — *SC* = *SR* — *ST*. *cof. t*; donc  $\frac{1}{R.T^3} = (SR - ST. \cos. t)^{-3} = \frac{1}{S.R^3} + \frac{3ST. \cos. t}{S.R^4}$  (3287), donc  $\frac{M.SR}{R.T^3} = \frac{M}{S.R^2} + \frac{3M.ST}{S.R^3} \cdot \cos. t$ ; donc  $\Pi = - \frac{3M.ST}{S.R^3} \cdot \cos. t. \sin. t = - \frac{3M.ST}{2.S.R^3} \sin. 2t$  (3625) nous négligerons ici la force  $\Phi$ , parce qu'en supposant l'orbite de la lune circulaire, cette force affecte beaucoup moins le mouvement de la lune dans son orbite, que la force  $\Pi$  qui est perpendiculaire au rayon vecteur, & dont tout l'effet est employé à altérer la vitesse de la lune dans son orbite, comme nous l'expliquerons plus au long. (3481).

3469. Nommons *f* la distance du soleil à la terre, en prenant pour unité celle de la lune à la terre, en sorte que *f* soit égale à 380 environ; soit *M* la masse du soleil, en Calcul de la  
variation de la  
lune.

prenant la somme des masses de la terre & de la lune pour unité, on aura la force  $\Pi = -\frac{3M}{2f^3} \sin. 2t$ . Il faut en conclure la valeur de  $p$  qui entre dans  $\Omega$  (3454); on a vu que  $p = f \frac{\Pi r^3 du}{f^2}$  (3452); mais alors  $\frac{f^2}{S}$  étoit le paramètre (3459), ainsi appellant  $p$  le paramètre de l'orbite, qu'on tire toujours de l'observation, l'on aura  $p = f \frac{\Pi r^3 du}{pS}$ ; or puisque l'orbite est circulaire on a  $p = 1$ ; nous avons la masse  $S$  de la terre pour unité des masses, donc  $pS = 1$  &  $p = f \Pi r^3 du$ ; mais  $r$  est aussi égale à 1, donc  $p = f \Pi du = -\frac{3M}{2f^3} f. \sin. 2t du$ .

Supposons que le mouvement de la lune soit au mouvement du soleil comme 1 est à  $1 - n$ , enforte que le mouvement de la lune étant  $u$ , la différence des mouvemens moyens du soleil & de la lune, ou l'angle de commutation  $t$  soit  $nu$ , ( $n=0,9252$ ) nous mettrons  $2nu$  à la place de  $2t$ , & nous aurons  $p = -\frac{3M}{2f^3} f. \sin. 2nu du, = +\frac{3M. \cos. 2nu}{4nf^3}$  (3308).

Dans la valeur de  $\Omega$  (3454) ne prenons que le terme le plus fort de tous qui est  $-2p$  (3492), & nous aurons  $\Omega = -\frac{3M}{2nf^3} \cos. 2nu$ ; donc la correction qui en résultera (3460), sur l'équation  $\frac{p}{r} = 1 - e. \cos. nu$ , &c. fera  $-\frac{3M}{2nf^3(1-4nn)} \cos. 2nu$ .

3470. Quand on a l'effet de l'attraction sur la valeur de  $\frac{p}{r}$ , on doit chercher son effet sur la valeur de  $dx$ , qui est l'expression du temps, ou de la longitude moyenne; or nommant  $Z$  le terme que nous venons de trouver dans l'équation de l'orbite, le terme qui en résulte sur la valeur de  $x$  est  $-f(2Z + p) du$  (3465), c'est la correction de la valeur de la longitude moyenne, ou de l'expression du temps; il faudra donc intégrer  $-\left(\frac{-6M}{2nf^3(1-4nn)} + \frac{3M}{4nf^3}\right)$ .



cof.  $2 n u d u$  ( 3309 ), & l'on aura  $-\frac{3M}{2n^2f^3} \left( \frac{-1}{1-4nn} + \frac{1}{4} \right)$ .  
 fin.  $2 n u$ , pour un des termes de l'expression de la longitude moyenne en longitude vraie; elle changera de signe quand on exprimera la longitude vraie en longitude moyenne; car si l'on a  $x = u - \alpha$ , on aura à peu-près  $u = x + \alpha$ ,  $x$  étant le petit terme que nous venons de trouver; nous négligeons ici les autres termes ( 3292 ).

3471. Pour exprimer cette valeur en secondes, on emploiera les nombres suivans, 1°. La distance du soleil est à celle de la lune comme  $57' 3''$  est à  $9''$  ( 1711, 1742 ); donc  $\frac{1}{f^3} = \frac{1}{55016000}$ , 2°. La masse  $M$  du soleil est 307831 ( 3405 ) le produit de ces deux quantités ou  $\frac{M}{f^3}$  revient à  $2^{\circ}$  ( 3407 ) = 0,005595 =  $\frac{1}{179}$ . 3°. Le mouvement diurne de la lune est  $13^{\circ} 10' 35''$ , 0, celui du soleil  $59' 8'', 3$ , la différence est  $12^{\circ} 11' 26'', 7$ ; divisant cette différence par le mouvement de la lune que nous prenons pour unité, nous aurons  $n = \frac{12^{\circ} 11'}{13^{\circ} 10'} = 0,9251989$ ; donc  $1 - 4nn = -2,424$ ;  $\frac{-1}{1-4nn} = +0,41254$ , &  $-\frac{1}{1-4nn} + \frac{1}{4} = 0,66254$ ; on multipliera donc cette quantité par  $\frac{M}{f^3} = t^2$ , on la multipliera aussi par  $\frac{3}{2n} = 1,75236$ , & de plus par  $57^{\circ}$  pour l'avoir en secondes ( 3359 ) & l'on aura  $+22' 20''$ . fin. 2  $t$  pour l'équation cherchée; elle diffère beaucoup de celle qu'a trouvée M. Clairaut qui est de  $40'$ ; mais il ne faut regarder le résultat précédent que comme une partie de la variation entière, puisque je n'ai pris qu'un seul des termes qui forment la valeur de  $\alpha$ .

3472. Je me contenterai de donner ici une idée des quatre considérations importantes qu'on est obligé de faire entrer dans les calculs rigoureux de la lune, & dont je n'ai pas fait mention. La première est celle de l'inclinaison de l'orbite lunaire que j'ai négligée, puisque j'ai supposé le soleil & la lune dans le même plan; l'expression des forces  $\phi$  &  $\Pi$  ( 3441 ) renferme l'angle  $t$ , & suppose que  $t$  est la

Considération de l'inclinaison.

## 574 ASTRONOMIE, Liv. XXII.

différence entre la longitude vraie de la lune dans son orbite, & la longitude vraie du soleil dans la sienne; mais lorsqu'on considère l'inclinaison, comme M. Clairaut dans sa théorie de la lune, il faut réduire le lieu du soleil au plan de l'orbite de la lune par une perpendiculaire, & nommant  $f'$  la distance du soleil à la terre réduite au plan de l'orbite lunaire, &  $t'$  l'élongation de la lune dans ce même plan, l'on aura dans l'expression des forces  $\frac{f'}{f} \cos$ .

$t'$  au lieu de  $\cos. t$ . A la place de ces deux quantités  $\frac{f'}{f}$  &  $\cos. t'$ , on mettra leurs valeurs (3639, 3640), & l'on aura l'expression des forces, avec le véritable angle  $t$  & la vraie distance  $f$  du soleil à la terre, mais la plupart des termes seront multipliés ou par le cosinus de l'inclinaison, ou par une fonction de ce cosinus. Je rapporterai dans la suite deux théorèmes qui serviront à entendre la théorie de M. Clairaut dans cette partie (3639).

Considération de la parallaxe du soleil.

Fig. 290.

3473. La 2<sup>e</sup> chose que nous avons négligée est la parallaxe du soleil; en effet, nous avons supposé  $RT = RC$  (fig. 290), comme si le soleil étoit à une distance infinie, & que sa parallaxe fût absolument nulle, de même que l'angle  $SRT$ . Dans les calculs rigoureux de la théorie lunaire on ne fait point cette supposition, & l'on réduit en série la valeur de  $\frac{1}{RT^3}$ , en prenant plusieurs termes de la série (3290), & mettant encore à la place du vrai angle  $RST$  formé par les rayons vecteurs du soleil & de la lune & dont le plan est incliné à l'écliptique, une valeur qui contienne seulement l'angle  $t$ , qui provient quand on ôte du vrai lieu de la lune dans son orbite, celui du soleil dans la sienne.

Méthode pour trouver la parallaxe.

3474. Les inégalités qui résultent de cette considération, doivent être plus sensibles à mesure que la parallaxe du soleil sera plus considérable; ainsi ces équations calculées & comparées avec celles que donne l'observation, devroient servir à connoître la parallaxe du soleil. M. Machin jugea par le mouvement du nœud de la lune que la parallaxe du soleil étoit de 8" (*The laws of*

the moon's motion according to gravity, pag. 22). M. Mayer qui s'étoit occupé de semblables recherches m'écrivoit en 1755, que la parallaxe du soleil ne surpasseoit pas  $7''9$ , & qu'il s'en étoit assuré à un tiers de seconde près, par le moyen de la théorie de la lune. M. Stewart, Professeur de Mathématiques dans l'Université d'Edimbourg, a publié aussi un ouvrage dans lequel il recherche la parallaxe du soleil par le moyen de la force que le soleil exerce sur la lune, & il la trouve de  $6''9$  (*The distance of the sun from the earth determined by the Theory of gravity, by Dr. Matthew Stewart, in-8°. 1763, pag. 67*). Ce petit Ouvrage est un supplément à un excellent Recueil du même auteur qui avoit paru quelques années auparavant, (*Traacts Physical and Mathematical*). Mais il faut voir sur la parallaxe du soleil les déterminations astronomiques rapportées ci-devant (1742), par lesquelles on voit que cette parallaxe est d'environ  $8''8$ .

3475. La troisième considération qu'il faut faire entrer dans la théorie de la lune, est l'excentricité du soleil, qui produit dans ses distances, par rapport à la lune & à la terre, des différences considérables, & par conséquent de nouvelles inégalités dans le mouvement de la lune; cette excentricité exige qu'au lieu de la distance moyenne  $f$ , on mette le rayon vecteur du soleil exprimé par son anomalie (3281, 3344).

De l'excentricité du soleil.

3476. Il y a une quatrième considération que nous avons négligée (3470), & qu'on doit employer dans les calculs rigoureux de la lune: lorsqu'on a l'expression du temps ou de la longitude moyenne  $x$ , par le moyen de la longitude vraie  $u$ ; par exemple,  $x = u + a \sin. mu$ , ou  $u = x - a \sin. mu$ , le dernier terme étant une des équations produites par l'attraction, on ne peut supposer  $u = x - a \sin. mx$ , c'est-à-dire, supposer  $x = u$  dans le dernier terme, que quand ce dernier terme est fort petit; mais si ce terme étoit assez sensible, comme il arrive dans les trois grandes équations de la lune, pour que son carré fût encore de plusieurs secondes, (il vaut près de deux minutes dans l'évection de la lune), il faudroit alors em-

Equation qu'il faut résoudre.

# 576 ASTRONOMIE, Liv. XXII.

Fig. 295.

ployer le problème dont j'ai rapporté la solution (3292); Voyez M. Clairaut, pag. 59 & suiv. édition de 1765.

Changement  
dans la force  
centrale de la  
lune.

3477. Après avoir examiné l'effet de la force  $n$  perpendiculaire au rayon vecteur (3469), il me reste à examiner l'effet de l'autre force  $\phi$ , qui modifie, ou qui affecte la force centrale de la lune; on a  $\phi = \frac{Mr}{RT^3} - \left( \frac{Mf}{RT^3} - \frac{M}{f^2} \right)$

$\cos. t$  (3442), mais  $\frac{1}{RT^3} = (f - r \cos. t)^{-3}$  à cause de la grande distance du soleil,  $= f^{-3} + 3r f^{-4} \cos. t$  (3287)  $= \frac{1}{f^3} + \frac{3r \cos. t}{f^4}$ , donc  $-\left( \frac{Mf}{RT^3} - \frac{M}{f^2} \right) \cos. t = -\left( \frac{M}{f^2} + \frac{3Mr f \cos. t}{f^4} - \frac{M}{f^2} \right) \cos. t = -\frac{3r M \cos. t^2}{f^3}$ ; c'est le second

terme de  $\phi$ . A la place du premier terme  $\frac{Mr}{RT^3}$  on peut mettre  $\frac{Mr}{f^3}$ , parce que les autres termes qui se trouveroient en mettant pour  $RT$  sa valeur  $f - r \cos. t$ , seroient beaucoup plus petits; donc la force totale  $\phi = \frac{Mr}{f^3} - \frac{3r M \cos. t^2}{f^3}$ ,  $= -\frac{Mr}{2f^3} - \frac{3Mr}{2f^3} \cos. 2t$  (3627).

Elle diminue  
dans les syzy-  
gies.

3478. Dans les syzygies, c'est-à-dire, quand la lune est pleine ou nouvelle, on a également  $2t = 0$  &  $\cos. 2t = 1$ ; ainsi cette force devient  $-\frac{2Mr}{f^3}$ ; c'est la quantité dont l'action du soleil diminue la force centrale de la lune, ou sa pesanteur vers la terre, dans les conjonctions, & les oppositions, cette quantité est à peu-près  $\frac{1}{339}$  de la tendance de la lune à la terre.

Elle augmen-  
te dans les  
quadratures.

Dans la première quadrature, ou lorsque la lune est à  $90^\circ$  de la conjonction,  $2t = 180^\circ$ , & dans la seconde quadrature  $2t = 540^\circ$ ; alors  $\cos. t = -1$  (3605), & la force  $\phi$  devient  $+\frac{Mr}{f^3}$ ; c'est la quantité dont le soleil augmente la force centrale de la lune dans les deux quadratures. Cette augmentation n'est que la moitié de la diminution qui a lieu dans les syzygies, puisque celle-ci est  $-\frac{2Mr}{f^3}$ . La force perturbatrice dépend donc de la ligne  $r$  ou de la distance de la lune à la terre; elle est d'autant plus grande

grande que la lune est plus éloignée de la terre ; cette force est donc plus grande dans l'apogée que dans le périgée. Pour que les deux termes  $\frac{Mr}{2f^3}$  &  $\frac{3Mr}{2f^3} \cos. 2t$  se détruisent, il faut que  $\cos. 2t$  soit  $= -\frac{1}{3}$ , ou que l'angle  $t$  soit de  $54^\circ 44'$ , car alors  $2t = 109^\circ 28'$  dont le cosinus est négatif (3605), & égal à un tiers du rayon, ou 0,333 ; de-là il suit que par l'attraction du soleil la force centrale de la lune vers la terre est diminuée plus long-temps qu'elle n'est augmentée ; on vient de voir que la quantité de la diminution est aussi plus forte que celle de l'augmentation ; ainsi en total on peut dire que la force du soleil diminue la pesanteur de la lune, ou l'attraction que la terre exerce sur la lune.

3479. Je fais que la plupart des lecteurs aiment à entrevoir à peu-près les raisons générales des résultats que le calcul démontre, je vais donc tâcher d'expliquer la manière dont la perturbation du soleil produit les trois principales inégalités de la lune, l'évection, la variation & l'équation annuelle.

L'EVECTION est la principale inégalité que le soleil produise dans la lune (1433) ; elle équivaut, ainsi que l'avoient supposé Newton & Halley, à un changement d'excentricité dans l'orbite lunaire joint à un mouvement de l'apogée (1435). Lorsque le soleil répond à l'apogée ou au périgée de la lune, ou lorsque la ligne des apsidés de la lune concourt avec la ligne des syzygies, la force centrale de la terre sur la lune qui est la plus foible dans la syzygie apogée reçoit la plus grande diminution (3478), & la force centrale qui est la plus forte dans la syzygie périgée y reçoit la moindre diminution, donc la différence entre la force centrale périgée, & la force centrale apogée sera alors la plus grande ; donc la différence des distances augmentera, c'est-à-dire, que l'excentricité sera plus grande ; aussi l'observation prouve qu'alors la plus grande équation de la lune est de  $7^\circ \frac{2}{3}$ , tandis qu'elle n'étoit pas de  $5^\circ$ , lorsque la ligne des quadratures concouroit avec celle des syzygies.

*Idee générale des inégalités de la lune.*

## 578 ASTRONOMIE, Liv. XXII.

3480. Le mouvement de l'apogée vient de ce que la force centrale est diminuée (3509); il doit donc être le plus grand quand la ligne des syzygies concourt avec la ligne des apsidés, ou lorsque le soleil répond à l'apogée ou au périgée de la lune; quand il est dans les quadratures le mouvement de l'apogée est au contraire le plus lent; parce que la diminution totale de la force centrale est la plus petite; quand le soleil est à  $45^\circ$  des apsidés le mouvement vrai de l'apogée est égal au mouvement moyen, mais son vrai lieu est alors le plus différent du lieu moyen, & l'équation est la plus forte, parce qu'elle est le résultat de tous les degrés de vitesses que l'apogée a reçus jusques-là <sup>(a)</sup>.

Planche XLI.  
Fig. 315.

3481. LA VARIATION est l'inégalité de la lune, qui sur une orbite supposée circulaire, a lieu dans les octans, à cause de la force tangentielle qui tend à accélérer ou à retarder son mouvement; soit  $C$  (fig. 315), le centre de la terre,  $O$  le centre du soleil, &  $DHA$  l'orbite de la lune; lorsque avant la conjonction la lune est en  $H$ , elle est plus attirée que la terre, & elle est attirée dans la direction  $HO$ ; alors sa vitesse s'accélère jusqu'à ce qu'elle soit en  $A$  dans sa conjonction, où la vitesse de la lune sur son orbite est la plus grande; lorsqu'elle est vers  $P$ ,  $45^\circ$  après la conjonction, sa longitude vraie est la plus avancée, d'une quantité appelée *variation*, qui est de  $37'$  additive (1445); il vrai que la vitesse de la lune cesse d'accélérer & commence à retarder dès que la lune a passé le point  $A$ , parce que le soleil ayant attiré la lune plus qu'il n'attiroit la terre pendant qu'elle alloit de  $H$  en  $A$ , a augmenté sa vitesse de plus en plus, jusqu'en  $A$  où il cesse d'augmenter cette vitesse; mais c'est en  $A$  que cette

(a) Il faut bien se souvenir que l'effet de ces fortes d'accéléérations ne commence à avoir lieu réellement & dans l'observation, que quand la cause est la plus forte, & il est le plus grand quand la cause cesse d'agir; c'est ainsi que dans le mouvement elliptique des planètes

le vrai lieu est le plus avancé au temps où l'accélération finit, & où commence le retardement (1257), c'est-à-dire, à 9 signes d'anomalie; j'ai vu quelques auteurs donner des idées fausses des inégalités de la lune, pour avoir perdu de vue cette considération.

vitesse s'est trouvée la plus grande, puisqu'elle n'a pas cessé d'être accélérée jusques-là. Depuis ce point *A* le soleil retirant vers *O* tend à diminuer la vitesse, mais l'excès de la vitesse acquise sur la vitesse moyenne, dure jusques dans l'octant *P*, 45° après la conjonction, où la vitesse vraie est égale à la moyenne; c'est pourquoi l'équation de la variation (*Table XXXVII*) est additive, & la plus grande qu'elle puisse être, à 45° de la conjonction où la vitesse est la plus forte (<sup>a</sup>).

3482. L'EQUATION ANNUELLE de la lune qui va jusqu'à  $11\frac{1}{4}$  (1452), vient de ce que le soleil quand il est périégée agit plus sur la lune que quand il est apogée; & comme son effet le plus considérable pendant une révolution entière de la lune, est de diminuer la force centrale de la lune vers la terre (3478), cette force est la plus diminuée quand le soleil est périégée; alors le diamètre de l'orbite lunaire devient plus grand, car la lune étant moins attirée vers la terre s'en éloigne nécessairement; son orbite devenue plus grande rend la durée de la révolution plus longue, car les carrés des temps des révolutions sont toujours comme les cubes des diamètres des orbites; le mouvement de la lune est donc ralenti dans le périégée du soleil, & l'équation annuelle commence alors à être soustractive, par la raison expliquée dans la note précédente.

*Méthode pour calculer la distance de la Lune par la longueur du Pendule.*

3483. Les distances au soleil, de toutes les planètes qui tournent autour de lui se déterminent par le moyen d'une seule de ces distances, avec les durées de leurs révolutions, à cause de la loi de Képler (1224), que les carrés des temps sont comme les cubes des distances; il en est à peu-près de même de la distance de la lune à la terre par rapport à celle des corps qui sont à la surface de

(<sup>a</sup>) Comme nous l'avons expliqué dans la note de l'art. 3480.

notre globe : on connoît la gravité des corps qui sont à la surface de la terre avec leur distance au centre ; on connoît un des effets de la gravité de la lune vers la terre , c'est la durée de sa révolution , on en peut donc conclure sa distance ; nous avons déjà donné une méthode pour la trouver à peu-près ( 3398 ).

La force avec laquelle les corps sont attirés vers la terre , à la surface du globe est indiquée , soit par l'espace qu'ils parcourent dans une seconde ( 3373 ), soit par la longueur du pendule à secondes ( 2699 ) ; on en conclut aisément le temps qu'ils emploïeroient à faire leur révolution dans un cercle de même grandeur que l'équateur ( 3421 ). La durée de cette révolution étant connue , avec la distance , & la force centrale qui y répond , il suffit de connoître la révolution de la lune , pour trouver sa distance & la force centrale qui l'y retient.

L'attraction étant supposée  $= 1$  à la surface de la terre , elle fera  $\frac{1}{g^2}$  à une distance  $g$  ; la lune attirant aussi la terre avec une force proportionnelle à sa masse que nous appellerons  $m$  , il faut supposer la terre en repos , & transporter à la lune seule l'effet des deux mouvemens ( 3435 ) ; nous prendrons donc pour l'attraction de la terre sur la lune  $\frac{1+m}{g^2}$ . L'action du soleil sur la lune diminue la pesanteur de la lune sur la terre de  $\frac{1}{339}$  environ ( 3478 ), il ne reste donc que  $\frac{338}{339}$  de la force précédente , qui agisse effectivement sur la lune ; donc appellant ce nombre  $\frac{1}{\gamma}$  , on aura la force de la terre sur la lune  $\frac{1+m}{\gamma g^2}$ . Si un corps tournoit dans l'équateur , nous avons vu que la durée de sa révolution en secondes seroit  $2''\sqrt{\frac{r}{p}}$  ( 3421 ) ; la force centrifuge retranche  $\frac{1}{289}$  de la force centrale de la terre ; ainsi la force attractive de la terre étant supposée  $= 1$  , celle qui retiendrait ce corps , où la gravité de la



*Pour calculer la distance de la Lune, &c. 581*

lune sur la terre n'est que  $\frac{288}{289}$ , nous supposons ce nombre  $= \frac{1}{\beta}$ . Les forces centrales des corps qui tournent dans des orbites circulaires sont comme les rayons de leurs orbites divisés par les carrés des temps périodiques, ou en raison inverse des carrés des temps divisés par les rayons (3396); donc appellant  $t$  le temps périodique de la lune, on aura cette proportion,  $\frac{1}{\beta} : \frac{1+m}{\gamma g^2} :: \frac{t^2}{g} : \frac{4'' r}{p r}$ , donc  $g^3 = \frac{t^2 \beta p}{4'' \gamma} (1+m)$ , & la distance cherchée de la lune, exprimée en multiples de  $p$  sera  $\frac{t^2 \beta p}{4 \gamma} (1+m)$ .

3484. Pour réduire cette expression en nombres, je suppose la masse de la lune  $\frac{1}{71} (1717, 3414) 1+m = 1,01408$ ,  $t = 27^h 7^m 43^s 11'' 6$ , le log. de  $\beta$ , 0,00147; celui de  $\gamma$ , 0,00122; le pendule simple  $p = 36$  pouces 7 lignes 21 (2699), étant divisé par 864 pour être exprimé en toises, & par 3281000 pour être exprimé en rayons de la terre (2690) a pour logarithme 3,19016; avec ces données, je trouve le log. de  $g = 1,78049$ , dont le complément est le sinus de la parallaxe horizontale 56' 59'' sous l'équateur; c'est à peu-près ce que j'ai trouvé par mes observations de Berlin, comparées avec celles du Cap (1716). Cependant il faut voir dans M. d'Alembert, (*Recherches I*, pag. 168, 256) les objections que l'on peut faire à cette manière de trouver la parallaxe de la lune par le moyen du pendule. V. aussi Murdoch, *Philos. transf.* 1764. Pour avoir égard à l'aplatissement de la terre dans cette recherche, il faudroit ôter de  $1+m$  le petit terme  $\frac{2}{3} s$  (3588). V. Mayer, *Comment. Gotting. II. pag.* 163.

*Calcul des inégalités que la Terre éprouve par l'attraction de Jupiter.*

3485. APRÈS avoir donné une légère idée des inégalités de la lune & de la manière de les calculer, je

## 582 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

vais donner avec plus de détail le calcul des inégalités que la terre éprouve par l'attraction de Jupiter, parce qu'il reste encore bien des recherches à faire sur les inégalités des planètes, & que ceci pourra servir d'exemple à ceux qui voudroient s'exercer dans de pareils calculs.

La première opération consiste à exprimer les forces  $\Phi$  &  $\Pi$  (3441) par le moyen des rayons vecteurs de Jupiter & de la terre, & de l'angle de commutation. On doit commencer par faire disparaître de l'expression des forces la distance  $RT$  (fig. 290), entre les deux planètes. Nommons  $r$  le côté  $ST$ ,  $f$  le côté  $SR$ , &  $s$  le côté  $RT$ , dont nous cherchons la valeur, on aura  $(3290) \frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{9r^2}{4f^5} + \frac{225r^4}{64f^7} + \left(\frac{3r}{f^4} + \frac{45r^3}{8f^6}\right) \cos. t + \left(\frac{15r^2}{4f^5} + \frac{105r^4}{16f^7}\right) \cos. 2t + \frac{35r^3}{8f^6} \cos. 3t + \frac{315r^5}{64f^8} \cos. 4t$ , qu'on pourroit mettre sous cette forme générale  $A+B \cos. t+C. \cos. 2t$ , &c. Cette quantité multipliée par  $r$ , donnera la première partie  $\frac{r}{s^3}$  de la force  $\Phi$  (3442); on ôtera  $\frac{f}{f^2}$  de  $\frac{r}{s^3}$ ; multipliant par  $\cos. t$ , l'on aura la seconde partie de  $\Phi$ , & multipliant par  $\sin. t$ , l'on aura la force  $\Pi$  (3441). Je vais mettre ici le commencement du calcul, pour servir d'exemple à ceux qui voudront suivre ces opérations. Dans l'application suivante de ces formules (3489), on aura  $r=1$ , &  $f=5, 2$ ; ainsi  $\frac{1}{f^2}$  est 140 fois plus petit que  $\frac{1}{f^3}$ , & nous pourrons négliger les termes qui seront plus petits que  $\frac{1}{f^6}$ , on verra ci-après ce qu'il faut faire dans d'autres cas (3498). Nous n'emploierons point dans les formules suivantes la masse de Jupiter qui multiplie tous les termes, il suffira de multiplier le dernier résultat, le calcul sera plus simple (3494).

3486. La seconde partie de  $\Phi = \left(\frac{f}{f^3} - \frac{1}{f^2}\right) \cos. t = \left(\frac{9r^2}{4f^5} + \frac{225r^4}{64f^7}\right) \cos. t + \left(\frac{3r}{f^4} + \frac{45r^3}{8f^6}\right) \cos. t^2 + \left(\frac{15r^2}{4f^5} + \frac{105r^4}{16f^7}\right)$

$\cos. 2 t. \cos. t + \frac{35 r^3}{8 f^5} \cos. 3 t. \cos. t + \frac{315 r^4}{64 f^6} \cos. 4 t. \cos. t,$   
 & substituant pour  $\cos. t^2$  sa valeur  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2 t$  (3627),  
 pour  $\cos. 2 t. \cos. t$  sa valeur (3623)  $= \frac{1}{2} \cos. t + \frac{1}{2} \cos. 3 t$ ;  
 &c. l'on aura  $\left(\frac{f}{f^3} - \frac{1}{f^2}\right) \cos. t = \frac{3 r}{2 f^3} + \frac{45 r^3}{16 f^5} + \left(\frac{3 r}{2 f^3} + \frac{5 r^3}{f^5}\right)$   
 $\cos. 2 t + \left(\frac{33 r^2}{8 f^4} + \frac{435 r^4}{64 f^6}\right) \cos. t + \left(\frac{15 r^2}{8 f^4} + \frac{735 r^4}{128 f^6}\right) \cos. 3 t$   
 $+ \frac{35 r^3}{16 f^5} \cos. 4 t + \frac{315 r^4}{128 f^6} \cos. 5 t.$  Pour avoir l'expression  
 entière de la force  $\Phi$ , il faut retrancher cette valeur de  
 celle de  $\frac{r}{f^3}$ , qui est la première partie de  $\Phi$ , ou de  $\frac{r}{f^3} + \frac{9 r^3}{4 f^5}$   
 $+ \frac{225 r^5}{64 f^7} + \left(\frac{3 r^2}{f^4} + \frac{45 r^4}{8 f^6}\right) \cos t + \left(\frac{15 r^3}{4 f^5} + \frac{105 r^5}{16 f^7}\right) \cos. 2 t$   
 &c. & l'on aura la force  $\Phi$  toute entière  $= - \frac{r}{2 f^3} -$  Valeur de  $\Phi$ ,  
 $\frac{9 r^3}{16 f^5} + \frac{225 r^5}{64 f^7} - \left(\frac{9 r^2}{8 f^4} + \frac{75 r^4}{64 f^6}\right) \cos. t - \left(\frac{3 r}{2 f^3} + \frac{5 r^3}{4 f^5} + \frac{105 r^5}{16 f^7}\right)$   
 $\cos. 2 t - \left(\frac{15 r^2}{8 f^4} + \frac{175 r^4}{128 f^6}\right) \cos. 3 t - \frac{35 r^3}{16 f^5} \cos. 4 t - \frac{315 r^4}{128 f^6}$   
 $\cos. 5 t.$

Pour trouver, par une opération semblable, la force  
 $\pi$  perpendiculaire au rayon vecteur (3441), qui est  $-\left(\frac{f}{f^3} - \frac{1}{f^2}\right) \sin. t$ , il faut multiplier par  $\sin. t$  la valeur  
 trouvée pour  $\frac{f}{f^3} - \frac{1}{f^2}$  (3485), & changer les signes,  
 l'on aura  $-\left(\frac{9 r r}{4 f^4} + \frac{225 r^4}{64 f^6}\right) \sin. t - \left(\frac{3 r}{f^3} + \frac{45 r^3}{8 f^5}\right) \cos. t.$   
 $\sin. t - \left(\frac{15 r^2}{4 f^4} + \frac{105 r^4}{16 f^6}\right) \cos. 2 t. \sin. t, - \frac{35 r^3}{8 f^5} \cos. 3 t. \sin. t,$   
 $- \frac{315 r^4}{64 f^6} \cos. 4 t. \sin. t.$  On développera ces produits en em-  
 ployant les formules (3621 & suiv.), telles que  $\cos. t.$   
 $\sin. t = \frac{1}{2} \sin. 2 t$ , &c. & l'on aura  $-\left(\frac{9 r r}{4 f^4} + \frac{225 r^4}{64 f^6}\right) \sin. t$   
 $+ \left(\frac{15 r^2}{8 f^4} + \frac{105 r^4}{32 f^6}\right) \sin. t - \left(\frac{3 r}{2 f^3} + \frac{45 r^3}{16 f^5}\right) \sin. 2 t + \frac{35 r^3}{16 f^5} \sin. 2 t$   
 $- \left(\frac{15 r^2}{8 f^4} + \frac{105 r^4}{32 f^6}\right) \sin. 3 t + \frac{315 r^4}{128 f^6} \sin. 3 t - \frac{35 r^3}{16 f^5} \sin. 4 t$   
 $- \frac{315 r^4}{128 f^6} \sin. 5 t.$  Pour réduire les différens termes de cette  
 quantité, on observera que  $-\frac{9}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{3}{8}, -\frac{225}{64} + \frac{105}{32}$

# 584 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

$$= -\frac{15}{64f^3} - \frac{45}{16f^4} + \frac{35}{16f^5} = -\frac{10}{16f^3} = -\frac{5}{8f^3} - \frac{105}{32f^4} + \frac{315}{128f^5} = -\frac{420}{128f^3} + \frac{315}{128f^4} = -\frac{105}{32f^3}. \text{ Ainsi l'on trouvera enfin } \pi = -\left(\frac{3}{8f^3} + \frac{15}{64f^4}\right) \sin. t - \left(\frac{3}{2f^3} + \frac{5}{8f^4}\right) \sin. 2t - \left(\frac{15}{8f^4} + \frac{105}{128f^5}\right)$$

Valeur de  $\pi$ .  $\sin. 3t - \frac{35}{16f^5} \sin. 4t - \frac{315}{128f^6} \sin. 5t$ , expression de la force perturbatrice perpendiculaire au rayon vecteur (3441), qu'il faut aussi multiplier par la masse de Jupiter (3405), à moins qu'on ne veuille attendre la fin de l'opération (3494).

3487. Connoissant l'expression ou la mesure des forces perturbatrices, la question se réduit à trouver l'effet qu'elles doivent produire en un temps donné; par exemple, en trois mois, ou plus généralement pendant le temps qu'il faut à la planète pour parcourir un arc quelconque; or l'on voit bien que c'est ici le plus difficile de la question; la mesure des forces  $\phi$  &  $\pi$ , pour un moment donné, n'étoit qu'une opération de l'algèbre ordinaire; mais ce qui doit résulter de ces forces, après qu'elles auront agi sans interruption & d'une manière variable pendant un temps fini, exige le calcul infinitésimal, le seul par le moyen duquel on puisse, d'un effet momentané & infiniment petit, déduire l'effet total.

3488. L'action de Jupiter sur la terre, en un moment infiniment petit, la fera sortir de son orbite d'une quantité infiniment petite; mais cette quantité infiniment petite; exprimée d'une manière générale par son rapport avec l'élément du temps, nous fera trouver, par le moyen du calcul intégral, le déplacement total qui en devra résulter pour un temps fini; comme nous trouvons la longueur entière d'une courbe par rapport à son ordonnée, au moyen d'une particule infiniment petite, pourvu que celle-ci soit exprimée d'une manière générale par l'équation de la courbe; c'est toujours le rapport de deux quantités finies que l'on déduit du rapport de deux quantités infiniment petites (3300).

3489. Les forces perturbatrices  $\phi$  &  $\pi$  étant connues, on en déduira la valeur de  $\alpha$ , qui doit nous donner celle du

du rayon vecteur, ou plutôt de  $\frac{p}{r}$  ( 3460 ), & ensuite la correction du temps ( 3452 ), ou la petite partie de la valeur de la longitude moyenne, qui dépend des forces perturbatrices. Les premiers termes de la valeur de  $\phi$  qui sont  $-\frac{r}{2f^3} - \frac{9r^3}{16f^5} + \frac{225r^5}{64f^7}$  ne feront ici d'aucune utilité; ils nous apprennent seulement que la force centrale de la terre vers le soleil est augmentée constamment de cette quantité par l'action de Jupiter; du moins tant qu'on suppose que  $r$  &  $f$  sont des quantités constantes, comme nous nous proposons de le faire ici; on n'a besoin, dans l'astronomie, que des termes qui sont variables & qui produisent des irrégularités dans les mouvemens apparens; tels sont les termes multipliés par  $\sin. t$ , car l'angle  $t$  & son sinus changent perpétuellement.

Supposons que la distance moyenne de la planète troublée, c'est-à-dire, de la terre au soleil, est égale à l'unité, alors  $f=5,20098$  ( 1222 ), donc  $\frac{1}{f^4} = \frac{1}{731}$  ou 0,00136665, ( les fractions décimales sont extrêmement commodes dans ces sortes de calculs ), donc  $\frac{3}{8f^4} = 0,000512496$ . De même  $\frac{15}{64f^6} = 0,000011841$ , donc la partie de la force  $n$  qui est  $-\left(\frac{3r^2}{8f^4} + \frac{15r^4}{64f^6}\right) \sin. t$  ( 3486 ) équivaut à 0,000524337  $\sin. t$ , & le premier terme de  $\phi = -\left(\frac{9r^2}{8f^4} + \frac{75r^4}{64f^6}\right) \cos. t$  ( 3486 ) fera  $-0,001596694. \cos. t$ ; nous nous contenterons de ces premiers termes qui sont les plus forts, & nous chercherons ce qui en résulte dans le mouvement de la terre; le calcul fera semblable pour tous les autres termes  $2t, 3t$ , &c.

3490. Ayant trouvé en nombres la valeur de  $\pi$ , il faut en conclure celle de  $p$  ( 3452 ); on avoit supposé  $p = \int \frac{\pi r^3 du}{j^2}$ , mais  $\frac{f^2}{5}$  étoit alors le paramètre de l'orbite ( 3459 ), donc employant le paramètre  $p$ , tel que le donne l'observation, on aura  $p = f \frac{\pi r^3 du}{p^5}$ ; mais si l'on suppose l'orbite

# 586 ASTRONOMIE, Liv. XXII.

*Fig. 290.* de la terre circulaire & concentrique au  $\odot$ , on aura  $r = 1$  ;  
 $p = 1$ , donc  $\rho = \int \frac{n du}{S}$  ; je n'aurai pas égard à  $S$  qui est  
la masse du soleil plus celle de la terre , parce que je la  
suppose égale à l'unité, la masse attractive de Jupiter étant  
exprimée en parties de cette masse du soleil ; on aura donc  
 $\rho = \int n du = f 0,0005243$ . *fin.*  $t du$  ; il faut trouver la  
valeur de cette intégrale.

Expression  
de l'angle  $t$ .

3491. Pour cela on doit exprimer  $t$  par le moyen de  
l'angle  $u$  ; nous supposerons les orbites concentriques, nous  
appellerons le mouvement de la terre 1 , celui de Jupiter  
 $1 - n$ , en sorte que 1 soit à  $1 - n$ , comme la durée de la  
révolution de Jupiter par rapport aux étoiles, est à la durée  
de la révolution de la terre (1161), ou comme 0,08430586  
est à 1 ; la différence  $n$  de ces 2 mouvemens, ou 0,91569414  
est la valeur de l'angle de commutation  $t$ , ou la différence  
des longitudes de la terre & de Jupiter ; car en partant du  
point  $B$ , où ces deux longitudes étoient les mêmes , &  
supposant l'angle du mouvement de la terre depuis ce  
temps-là = 1, celui de Jupiter est  $1 - n$ , & la différence  
 $n$  ; mais si le mouvement de la terre est  $u$ , celui de Jupiter  
sera  $(1 - n)u$ , & l'angle  $t$  de commutation sera  $nu$ ,  $n$   
étant = 0,91569.

Ainsi la valeur de  $\rho = -f 0,000524 \sin. t du$  revient à  
 $-f 0,000524 \sin. nu du$ , dont l'intégrale sera (3308)  
 $+ \frac{0,000524}{0,91569} \cos. nu$ , ou  $+ 0,00057261 \cos. nu$  ; c'est  
la valeur de  $\rho$ , d'où l'on déduira  $-2\rho$ , qui est une  
partie de la valeur totale de  $\Omega$  (3454).

Valeur de  $\Omega$ .

3492. La valeur totale de  $\Omega$  est  $\frac{\phi rr}{S} + \frac{\pi r dr}{S du} - 2\rho$  ; mais

cette valeur de  $\Omega$  doit d'abord se réduire à  $\frac{\phi rr}{S} + \frac{\pi r dr}{S du} - 2\rho$   
parce que le dénominateur  $1 + 2\rho$  étant très-peu différent  
de 1, la petite fraction  $2\rho$  n'ajouteroit à la valeur de  $\Omega$  qui  
est déjà très-petite, qu'une quantité beaucoup moindre ;  
la théorie de la lune est la seule où l'on soit obligé  
d'avoir égard à ce dénominateur  $1 + 2\rho$ .

Il y a encore dans  $\Omega$  un terme à négliger ; car ayant sup-

posé que le rayon  $r$  étoit constant,  $dr$  est absolument nul, & le terme  $\frac{n r dr}{S du}$  devient  $= 0$ , (3497). La valeur de  $\Omega$  est donc  $\frac{\Phi r r}{S} - 2 p$ , & parce que nous avons pris la distance  $r$  de la terre & la masse  $S$  du soleil pour unité, l'on aura enfin  $\Omega = \Phi - 2 p$ . Ainsi  $\Omega$  se réduit à  $\Phi - 2 p$ ; or  $\Phi = -0,00159667$ . *cof. t*, ou  $-0,001597$ . *cof. nu*, &  $-2 p = -0,001145$ . *cof. nu*, donc  $\Phi - 2 p = -0,002742$ . *cof. nu*  $= \Omega$ .

3493. Quand on a la valeur  $\Omega$  exprimée en cosinus d'un angle tel que  $nu$ , il suffit de la diviser par  $nn - 1$  (3460), & de changer les signes, ou, ce qui revient au même, de la diviser par  $1 - nn$ , sans changer les signes, pour avoir la valeur qui en résulte dans l'équation de l'orbite  $\frac{p}{r} = 1 - e \cdot \text{cof. } mu$ ; & elle devient  $\frac{p}{r} = 1 - e \cdot \text{cof. } mu + \frac{\Omega}{1 - nn}$ ; or  $n = 0,91569$ ,  $nn = 0,8385$ , donc  $1 - nn = 0,1615$ ; divisant donc  $\Phi - 2 p = -0,002742$ . *cof. nu* par  $0,1615$ , la correction de  $\frac{p}{r}$  fera  $-0,01698$ . *cof. nu*, c'est ce que nous avons appelé  $Z$  (3465). On remarquera ici que quand  $n$  approche beaucoup de l'unité, la quantité  $1 - nn$  est fort petite, & que les termes de la valeur de  $\Omega$  en produisent de plus considérables dans la valeur de  $Z$ ; au contraire, quand  $n$  est considérable, la valeur de  $\Omega$  diminue en formant la valeur de  $Z$ ; voilà pourquoi nous avons négligé les termes *fin. 6 t*, *fin. 7 t* (3486) qui auroient donné  $nn = 36$  &  $nn = 49$ .

3494. Le second terme de l'élément du temps (3465) qui est  $-2e(3Z + p) \text{ cof. } mudu$  dispaçoit quand on suppose l'orbite circulaire, puisqu'il renferme l'excentricité  $e$ ; ainsi pour trouver la longitude moyenne, nous n'emploirons que le terme  $-(2Z + p) du = dx$ ; nous avons trouvé  $Z = -0,01698$ . *cof. nu* (3493) &  $p = 0,00057261$ . *cof. nu* (3491), donc  $-(2Z + p) du = +0,033381$ . *cof. nu du = dx*. Pour en avoir l'intégrale il faut changer cosinus en sinus & diviser par  $n$  (3309),

dont la valeur est 0,91569, l'on aura donc 0,03645. fin.  $nu$ , pour la valeur de  $x$ , c'est-à-dire, que  $x = u + 0,03645$ . fin.  $nu$ , donc la longitude vraie  $u = x - 0,03645$  fin.  $nu$ .

Cette quantité 0,03645 doit se multiplier par la masse de Jupiter,  $\frac{1}{1067}$ , parce que les forces  $\Phi$  &  $n$  (3441) renfermoient cette masse, que nous n'avons point employée jusqu'ici, & que nous avons réservée pour la fin, dans le dessein de rendre les calculs plus faciles (3485); cette quantité doit aussi se multiplier par 57° ou par 206265'' pour être convertie en secondes (3466), comme je l'ai expliqué, & l'on trouvera  $-7''05$ . fin.  $nu$  ou  $-7''05$ . fin.  $t$ , c'est ce que trouve M. Clairaut, (*Mém. ac.* 1754, p. 541).

Valeur de  
l'équation  
cherchée.

3495. On trouveroit de même une équation  $+2''7$ . fin.  $2t$  si l'on eût fait sur les termes  $2t$ , ce que nous avons fait sur les termes  $t$ . Si au lieu de supposer  $r = 1$  on emploie  $r = 1 + e$ . cos.  $mu$ ; appellant  $u$  l'anomalie moyenne de la terre ou du soleil, on trouvera encore deux autres équations qui sont  $-1''5$  fin.  $(2t - u) + 0''4$  fin.  $(t - u)$ .

Usage de  
cette équation.

L'angle  $t$  est la longitude de la terre, moins celle de Jupiter vue du soleil; je suppose qu'on ait, pour le 5 Mars 1749, la longitude moyenne du soleil  $11^s 13' 2''$ , celle de la terre, qui lui est opposée, sera  $5^s 13' 20''$ ; je suppose aussi que la longitude héliocentrique moyenne de Jupiter se soit trouvée de  $11^s 9' 4''$  ou par les tables qui sont dans ce livre ou par celles de Halley que j'ai publiées en 1759; on retranchera celle-ci de la longit. de la terre, & l'on aura  $6^s 4' 16''$  pour la valeur de l'ang.  $t$ ; le sin. de  $6^s 4' 16''$  ou le sin. de  $4' 16''$  pris négativement (3604),  $= -0,0744$ , comme on le trouve par les tables de Sinus; donc l'équation  $-7''05$ . fin.  $t$  sera  $+0''5$  dans ce cas-là. Si au lieu de la longitude de la terre on vouloit employer celle du soleil, qui est plus grande de six signes, pour former l'angle  $t$ , il faudroit changer le signe de l'équation, & elle deviendroit en général  $+7''$  fin.  $t$ .

C'est sur ce principe que sont calculées les tables VIII, IX & X que l'on trouve parmi celles du soleil, & dont j'ai donné l'explication à la page 16 & à la page 36 des mêmes tables. J'ajouterai seulement ici que la table X



*Attraction de Jupiter sur la terre.* 589

renferme deux équations  $7'' 7$  sin. dist. ☉ au ☉  $+ 3'' 5$  cos. dist. sin. anom. ☉ (M. de la Caille, *Mém. de l'Acad.* 1757, pag. 137). M. Mayer dans ses tables du soleil suppose la première équation de  $8''$ , & il n'a point d'égard à la seconde qui dépend de l'anomalie moyenne du soleil.

3496. L'EXCENTRICITÉ de l'orbite troublée, lorsqu'on veut la faire entrer dans ces calculs, exige beaucoup d'autres termes dans les valeurs de  $\alpha$ ; on ne fait plus  $r=1$ , comme je l'ai supposé dans les calculs précédens (3490), ni  $t=nu$  (3491) : je vais donner une idée des difficultés que cette considération ajoute au calcul. Soit  $u$  l'anomalie vraie de la terre, on aura  $u+2e$ . sin.  $u$  pour son anomalie moyenne (3335); puisque nous avons appelé  $1-n$  le moyen mouvement de Jupiter, lorsque celui de la terre est 1, il ne faudra que multiplier  $u+2e$ . sin.  $u$  par  $1-n$ , & l'on aura  $u-nu+2e(1-n)$ . sin.  $u$ , pour la longitude moyenne de Jupiter; & si on la retranche de celle de la terre ( $u+2e$ . sin.  $u$ ) on aura la valeur de  $t$  en  $u$ . On suppose que l'orbite de Jupiter est concentrique, lorsque l'on calcule les effets de l'excentricité de la terre; ainsi supposant que  $u-nu+2e(1-n)$  sin.  $u$  exprime aussi bien la longitude vraie de Jupiter que la moyenne, & la retranchant de celle de la terre, qui est  $u$ , on aura  $nu-2e(1-n)$  sin.  $u=t$ , au lieu de  $nu$  que nous avons pris pour la valeur de  $t$  (3491).

Calcul pour  
les orbites ex-  
centriques.

Nous avons retranché le mouvement de la terre de celui de Jupiter, & non pas celui de Jupiter de celui de la terre, parce que pour avoir un angle  $t$ , qui soit toujours croissant, on retranche toujours la longitude qui croît plus lentement de celle qui croît plus vite.

3497. Un autre effet de l'excentricité est le terme  $\frac{nrdr}{du}$  de la valeur de  $\alpha$  (3492), que nous avons négligé, & dont il faut tenir compte quand on considère l'excentricité; on a pour lors  $r=1+e$ . cos.  $u$ ,  $dr=-e$ . sin.  $u du$  (3308),  $\frac{dr}{du}=-e$ . sin.  $u$ ,  $\frac{rdr}{du}=-er$ . sin.  $u$ ; car les termes ultérieurs de la multiplication renfermeroient  $e^2$ , ou le carré de l'excentricité, que l'on peut négliger; il

faudra donc multiplier par  $e \sin. u$  tous les termes trouvés pour la valeur de  $n$  (3486), & l'on aura une nouvelle suite de termes qui entreront dans  $n$ , & qu'il faudra traiter, comme nous avons fait le terme  $-0,002742 \cos. nu$  (3493).

Enfin l'excentricité exige encore dans la correction du temps un nouveau terme  $-2e(3\angle + r) \cos. m u du$  (3465). J'ai donné ailleurs le calcul de tous ces termes, appliqué à un exemple assez détaillé (*Mem. acad.* 1758, pag. 22); on y trouvera aussi le calcul des termes qui dépendent de l'excentricité de l'orbite troublante, dont il est quelquefois nécessaire de faire usage.

Autre difficulté du problème des trois corps.

3498. LA VALEUR de  $\frac{1}{j^3}$  est la première chose qu'il a fallu connoître pour avoir l'expression des forces perturbatrices; dans l'exemple que j'ai donné, la valeur  $\frac{1}{j^3}$  a été exprimée par une série (3485), dont on a négligé les derniers termes, parce qu'on supposoit que  $f$  étoit très-grand ou très-petit par rapport à  $r$ ; mais lorsque les 2 quantités approchent de l'égalité, la série n'est plus assez convergente, & cette méthode pour trouver  $\frac{1}{j^3}$  ne sauroit être exacte. M. Euler qui apperçut cette difficulté, dans sa pièce sur la théorie de Saturne, s'occupa à la résoudre, mais il ne démontra point la méthode qu'il indiquoit. M. d'Alembert, dans la seconde partie de ses *Recherches*, donna une autre méthode, & M. Clairaut en a donné une troisième à l'occasion des inégalités de la terre, (*Mém. acad.* 1754, pag. 545). Je l'ai expliquée, avec un assez grand détail, dans des mémoires sur les inégalités de Vénus & de Mars, (*Mém. acad.* 1760, 1761); mais je vais en donner ici les principes, de la manière la plus élémentaire, & j'y joindrai les formules qui en résultent.

3499. La valeur générale de la distance  $s$  ou  $RT$ , (*fig.* 290), est  $\sqrt{r^2 + f^2 - 2fr \cos. t}$  (3290), donc  $\frac{1}{j^3} = (r^2 + f^2 - 2fr \cos. t)^{-\frac{3}{2}}$ ; divisant par  $2fr$  les quantités qui sont sous le signe radical, & multipliant tout par  $(2fr)^{-\frac{3}{2}}$  on a  $\frac{1}{j^3} = (2fr)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{r^2 + f^2}{2fr} - \cos. t \right)^{-\frac{3}{2}}$ ; si l'on

fait  $\frac{r^2 + f^2}{2fr} = h$ , & qu'on exprime en général l'expofant  $-\frac{1}{2}$  par  $m$ , la queffion fe réduira à trouver en général la valeur de  $(h - \cos. t)^m$ . Pour cela foit  $(h - \cos. t)^m = A + B. \cos. t + C. \cos. 2t + D. \cos. 3t$ , &c. ; cette forme nous eft indiquée par les valeurs trouvées ci-deffus (3485), puifque  $\frac{1}{r^2}$  n'a produit que des cofinus de multiples de  $t$  ; il s'agira de trouver les valeurs de  $A, B, C$ , &c. Pour trouver celle de  $A$ , multiplions tout par  $dt$ , & nous aurons  $(h - \cos. t)^m dt = A dt + B. \cos. t dt + C. \cos. 2t dt$ , &c. ; donc en intégrant  $\int (h - \cos. t)^m dt = At + B. \sin. t + \frac{1}{2}C. \sin. 2t$  ; faifons  $t = 180^\circ$ , alors tous les termes  $B, C$ , &c. s'évanouiront, car le finus d'un demi-cercle & de tous fes multiples eft toujours égal à zéro, il reftera pour lors  $A = \int \frac{(h - \cos. t)^m dt}{180^\circ}$ , qu'il s'agit de réduire en nombres, par approximation, cette quantité n'étant pas intégrable abfolument.

§ 500. Pour avoir  $\int (h - \cos. t)^m dt$ , il n'y a qu'à concevoir une courbe, dont  $t$  foit l'abfciffe,  $dt$  la différentielle de l'abfciffe, &  $(h - \cos. t)^m$ , l'ordonnée ; & fi l'on trouve la quadrature ou la furface de cette courbe pour le cas où  $t = 180^\circ$ , ce fera l'intégrale  $\int (h - \cos. t)^m dt$ . En calculant les inégalités que la terre éprouve par l'action de Vénus, je trouvai  $f = 0,72333$ ,  $h = 1,052912$  ; fi donc  $t = 1^\circ$  ; on a  $\cos. t = 0,9998477$ , donc  $h - \cos. t = 0,0530643$  ; fon logarithme eft 8,7248025 ; le complément de ce logarithme fera 1,2751975, c'eft le log. de  $(h - \cos. t)^{-1}$  ; fi l'on y ajoute fa moitié 0,6375987, l'on aura 1,9127962, log. de 81, 8081, ainfi  $(h - \cos. t)^{-\frac{1}{2}} = 81, 8081$  lorsque  $t = 1^\circ$ .

On cherchera de même la valeur numérique du même terme, lorsque  $t = 2^\circ$ , lorsqu'il eft de  $3^\circ$ , & ainfi de fuite jufqu'à  $180^\circ$  ; toutes ces ordonnées fe multiplieront par  $dt$ , & donneront ainfi les élémens de la courbe dont on cherche la quadrature ou la furface ; or,  $dt$  fera = 1 fi les ordonnées ont été calculées de degré en degré ; il fera = 2, fi elles n'ont été calculées que de deux en deux degrés, & ainfi des autres, parce que  $dt$  doit être expri-

mé en degrés aussi bien que  $t$  lui-même. Si l'on a donc 180 ordonnées de degré en degré, il faudra les ajouter toutes ensemble pour avoir la surface ou l'intégrale cherchée (3328).

3501. On pourroit demander à ce sujet pourquoi  $\int (h - \cos. t)^m dt = A. 180^\circ$ . c'est-à-dire, pourquoi nous faisons  $t = 180$ , plutôt que  $360^\circ$ ; je réponds que si on le faisoit égal à  $360^\circ$ , on trouveroit la même chose, car alors  $\int (h - \cos. t)^m dt$  devroit se répéter 360 fois, & l'on trouveroit précisément le double de ce que l'on trouve en ne calculant que 180 ordonnées de la courbe, dont  $\int (h - \cos. t)^m dt$  est la différentielle; en effet quand on a trouvé  $A = \frac{\int (h - \cos. t)^m dt}{180}$ , il est évident que c'est  $\int (h - \cos. t)^m dt$  pour le cas où  $t = 180^\circ$ ; si vous le prenez pour le cas où  $t = 360^\circ$ , vous aurez le double; car toutes les ordonnées du premier demi-cercle se répéteront dans le second, & comme le total sera divisé par  $360^\circ$ , on aura le même résultat.

3502. On demandera encore pourquoi, en cherchant la valeur de  $\int dt (h - \cos. t)^m$  pour chaque degré, on prend  $dt = 1^\circ$ , enforte que  $1^\circ$  soit l'unité des arcs  $t$ : je réponds que puisque  $dt$  est la différentielle de  $t$ , il faut absolument l'exprimer en parties de  $t$ , afin que  $dt$  &  $t$  soient des quantités homogènes. Si donc on prenoit  $dt$  égal à  $1'$  ou à  $\frac{1}{60}$  de degré, & que ce fût l'unité, alors le demi-cercle qui forme le dénominateur dans  $\frac{\int (h - \cos. t)^m dt}{180^\circ}$ , & qui rend cette valeur égale à  $A$ , vaudroit, non pas 180, mais 60 fois 180 de ces unités-là; si donc on veut mettre pour le demi-cercle 180 parties, il faut que  $dt$  soit composé de ces mêmes parties, c'est-à-dire, de degrés. Si l'on fait  $dt$  égale à deux degrés, on aura le même résultat, pourvu qu'on double la somme de toutes les ordonnées, c'est-à-dire, qu'on divise par 90 au lieu de diviser par 180, cela reviendra à peu-près au même; je dis à peu-près, parce que plus  $dt$  seroit grand, plus il y auroit d'inexactitude à supposer rectiligne la surface de la courbe

( $h - \cos.$

Valeur de  $A$   
par des qua-  
dratures de  
courbes.

$(h - \cos. t)^m dt$ , qui est l'élément de l'aire totale ou de la courbe, dont on calcule les ordonnées pour avoir sa surface.

3503. J'ai dit qu'il falloit ajouter ensemble toutes les ordonnées pour avoir la surface de la courbe ; mais il est encore mieux d'avoir égard à ce que nous avons dit des courbes paraboliques (3329). Supposons que  $dt = 2$ , & qu'on ait trouvé 46 ordonnées pour le premier quart-de-cercle, c'est-à-dire, les ordonnées qui ont lieu en supposant  $x=0$ ,  $x=2^0$ ,  $x=4^0$ , &c. jusqu'à  $x=90^0$  inclusivement, & 46 ordonnées pour le second quart-de-cercle, c'est-à-dire, depuis  $x=90^0$  inclusivement, jusqu'à  $x=180^0$  inclusivement ; on ajoutera ensemble le tiers des extrêmes ou de la première & de la dernière ordonnée ; quatre tiers de la seconde, de la 4<sup>e</sup>, de la 6<sup>e</sup>, c'est-à-dire, de tous les termes pairs, deux tiers de la 3<sup>e</sup>, de la 5<sup>e</sup>, ou de tous les nombres impairs (3329) ; on divisera la somme par 90 (3499), ce seroit par 180 si l'on avoit calculé les ordonnées pour tous les degrés, & dans le cas de l'article 3500, l'on aura la valeur de  $A=8,702$  : on trouvera tous ces calculs faits en détail dans les Mémoires que j'ai donnés à l'académie en 1760 & 1761 sur les inégalités de Vénus & de Mars produites par l'attraction de la terre.

3504. J'ai supposé, dans l'exemple précédent, qu'on cherchoit seulement la valeur de  $(h - \cos. t)^{-\frac{1}{2}} = (1,0529 - \cos. t)^{-\frac{1}{2}}$ , ou de  $(\frac{r^2+f^2}{2fr} - \cos. t)^{-\frac{1}{2}}$  ; mais pour avoir la valeur de  $\frac{1}{r^3}$ , il faut que cette même quantité soit multipliée par  $(2fr)^{-\frac{1}{2}}$  (3499) ; or, on suppose toujours que  $r$ , ou la distance de la planète troublée est égale à l'unité, il faut donc seulement diviser l'unité par la racine carrée du cube de  $2f$ , ou de deux fois la distance de la planète troublante, pour avoir le coefficient général ; ainsi la distance de Vénus au soleil est  $0,72333=f$ , en supposant celle de la terre égale à l'unité ; donc  $r=1$  &  $(2fr)^{-\frac{1}{2}}$  Coefficient  
 $=0,57471$  ; c'est le coefficient général pour le cas des per- général.

turbations de la terre par Vénus ; il faut donc multiplier 8,702 par ce nombre-là, & l'on aura la valeur entière de  $A=5,0011$ , à peu-près comme M. Clairaut l'a trouvé (*Mém. acad.* 1754, *pag.* 554).

Pour trouver  
le second ter-  
me.

3505. On est obligé de chercher, par un semblable calcul, la valeur de  $B$  qui est le second terme de  $\frac{1}{s^3}$  (3499); pour cela nous reprendrons la série  $(h - \cos. t)^m = A + B \cos. t + C \cos. 2t$ , &c.; & multipliant tout par  $\cos. t$ , nous aurons  $(h - \cos. t)^m \cos. t = A \cos. t + B \cos. t^2$ , &c.  $= A \cos. t + \frac{B}{2} + \frac{B}{2} \cos. 2t$ , &c.; tous les termes suivans renfermeront des cosinus, parce qu'il n'y a que les puissances paires  $\cos. t^2$ ,  $\cos. t^4$ , &c. qui donnent des termes tels que  $\frac{B}{2}$ , où il n'y ait point de cosinus (3632), donc  $(h - \cos. t)^m \cos. t \, dt = A \cos. t \, dt + \frac{B \, dt}{2} + \frac{B}{2} \cos. 2t \, dt$ , &c. dont l'intégrale  $\int (h - \cos. t)^m \cos. t \, dt = A \sin. t + \frac{B \, t}{2}$ , &c. tous les termes, excepté  $\frac{B \, t}{2}$ , renfermeront le sinus de  $t$ , ou de ses multiples; donc ils disparaîtront tous, excepté le terme  $\frac{B \, t}{2}$ , lorsqu'on fera  $t = 180^\circ$ ; donc alors on aura  $\int (h - \cos. t)^m \cos. t \, dt = B \cdot 90^\circ$ ; donc  $B = \frac{\int (h - \cos. t)^m \cos. t \, dt}{90^\circ}$ , c'est le second terme de la série. On trouveroit de même  $C = \frac{\int (h - \cos. t)^m \cos. 2t \, dt}{90^\circ}$ ; & ainsi de suite, pour  $D, E, F$ , &c.

On calculera donc aussi pour chaque degré la valeur de  $(h - \cos. t)^m \cos. 2t$ ; par exemple,  $t$  étant égal à  $1^\circ$ ,  $\cos. t = 0,9998477$ ; mais  $h = 1,052912$  (3500); donc  $h - \cos. t = 0,0530643$ , qui élevé à la puissance  $-\frac{3}{2}$  devient 81,8081, & multipliant par  $\cos. 1^\circ$ , on a 81,795; c'est le premier terme de  $B$ , ou la première ordonnée de la courbe, dont la surface entière doit donner la valeur de  $B$ . L'on calcule ainsi les 181 ordonnées, de degré en degré, ou seulement 91, de  $2^\circ$  en  $2^\circ$ ; mais on observe que  $\cos. t$  doit changer de signe aussi-tôt que  $t$  surpasse  $90^\circ$ ; alors on ajoute  $\cos. t$  avec  $h$ , au lieu de le retrancher, &c.

toutes les ordonnées du second quart-de-cercle deviennent négatives, à cause de la multiplication par  $\cos. t$ ; ayant calculé 91 ordonnées, on prendra le tiers des extrêmes, les  $\frac{2}{3}$  des termes pairs &  $\frac{1}{3}$  des impairs (3329), en observant que dans le second quart elles sont toutes négatives, on divisera la somme par 45 (ce seroit par 90° si l'on avoit calculé 181 ordonnées), & l'on trouvera 15,4666; cette quantité multipliée par le coefficient général 0,57471 (3504), donnera la vraie valeur de  $B$ , ou le second terme de la série  $\frac{1}{f^3} = A + B. \cos. t + C. \cos. 2t$ , on le trouvera = 8,8888.

Valeur du  
coefficient  $B$ .

3506. Les autres termes  $C, D, E, F$ , se trouveront, par le moyen des deux premiers, au moyen des formules suivantes, que j'ai démontrées dans mon mémoire sur les inégalités de Vénus, (*Mém. acad.* 1760).  $C = \frac{2Bh + 2Am}{m+2}$ ;  $D = \frac{4Ch + (m-1)B}{m+3}$ ;  $E = \frac{6Dh + (m-2)C}{m+4}$ ;  $F = \frac{8Eh + (m-3)D}{m+5}$ , &c. Dans le cas dont il s'agit ici (3504), on a  $m = \frac{1}{2}$  &  $h = 1,052912$ , d'où il est aisé de calculer ces valeurs en nombres.

3507. L'usage de ces termes est absolument le même que pour la série  $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{2r^2}{4f^3}$ , &c. (3485); car on s'en sert pour trouver  $\phi$  &  $\pi$ , ensuite  $\alpha$ ,  $Z$ , & l'élément du temps (3489 & suiv.). Lorsqu'on veut avoir égard à l'excentricité de la planète troublée, on trouve dans la valeur de  $\frac{1}{f^3}$  un terme  $- 3ef. 2f^{-\frac{5}{2}} \left( \frac{1+f^2}{2f} - \cos. t. \right)^{-\frac{5}{2}}$  qui exige une nouvelle suite de termes, tels que  $A, B, C$ , &c. (*Voy. Mém. acad.* 1761, pag. 282). Je n'entrerai pas dans ce détail, il me suffit ici d'avoir expliqué les principes de ces recherches avec toute la clarté possible.

3508. LES COMÈTES exigent beaucoup de calculs semblables, quand on recherche les perturbations & les inégalités qui ont lieu dans leur mouvement; les valeurs de  $\rho$ , de  $\alpha$ , se trouvent par des quadratures de courbes que l'on forme en calculant de même un grand nombre

Perturbations des comètes.

de leurs ordonnées ; en effet , quand la distance  $s$  de la planète troublante à la planète troublée est trop variable pour qu'on puisse l'exprimer par une série , même avec le secours de la méthode précédente , on est obligé de chercher les valeurs des différentes parties de  $\Omega$  (3492) , en calculant un grand nombre de fois leurs valeurs pour chaque révolution ; j'en ai parlé à l'occasion de la comète de 1759 (3115).

### DU MOUVEMENT DES APSIDES.

3509. L'OBSERVATION prouve que les aphélies de toutes les planètes ont un petit mouvement selon l'ordre des signes (1312 & *suiv.*) ; l'apogée de la lune a un mouvement très-rapide (1432) ; ces mouvemens sont une suite de l'attraction. Chaque planète décrirait naturellement une ellipse si elle n'étoit attirée que par le corps autour duquel elle tourne ; mais elle est continuellement détournée de cette orbite par les attractions des autres planètes , enforte que sa trace n'est jamais véritablement une ellipse ; cependant les astronomes supposent pour simplifier les calculs , qu'une planète reste toujours sur une ellipse , mais que cette ellipse est mobile. Soit  $S$  le foyer (*fig. 296*) , &  $A$  l'aphélie d'une planète , dont l'orbite est  $AMPO$  , & supposons que la planète eût été de  $A$  en  $B$  dans une ellipse immobile  $ABP$  , avec la force centrale du soleil  $S$  ; si l'attraction d'une autre planète  $P$  , qui tend à l'éloigner du soleil , la fait parvenir en un point  $C$  , & à une distance  $SC$  du soleil , on pourra supposer que ce point est placé dans une autre ellipse  $CDE$  égale à l'orbite  $ABP$  , dont l'apside au lieu d'être encore en  $A$  soit parvenue en  $C$  ; l'on ajuste , pour ainsi dire , sur le point  $C$  où est arrivée la planète , l'ellipse  $ABP$  dont la planète est véritablement sortie , & en faisant mouvoir cette ellipse on réduit le calcul du vrai mouvement de la planète à la simplicité du calcul elliptique. Toutes les fois que la planète s'éloigne du foyer  $S$  ou que sa force centrale est diminuée , on est obligé de concevoir un mouve-



ment progressif dans son apfide pour fatisfaire à cette diminution, c'est ce qui a lieu dans le système planétaire.

3510. Si la gravité étoit exactement en raifon inverse du carré des distances, la planète emploïroit la moitié de fa révolution à aller de *A* en *P*, ou de l'aphélie au périhélie; si la gravité est en raifon inverse d'une puissance de la distance qui soit entre deux & trois, ou entre le carré & le cube; la planète emploïra plus de la moitié de la révolution à arriver de l'aphélie au périhélie, c'est-à-dire, que le périhélie aura un mouvement direct; si la gravité est en raifon inverse d'une puissance moindre que le carré de la distance, l'aphélie fera rétrograde. On peut voir dans le *Traité des Fluxions* de Mac-laurin, & dans le livre des *Principes* de Newton un grand nombre de propositions curieuses sur le mouvement des apfides dans différentes hypothèses de gravité; pour moi qui ne veux donner ici que les choses usuelles dans l'astronomie, je me contenterai de faire voir comment on peut déduire le mouvement des apfides, de l'équation générale d'une orbite troublée (3458); en faisant ces sortes d'applications aux orbites planétaires, on pourra connoître mieux qu'on n'a fait jusqu'ici le mouvement de leurs apfides.

3511. L'équation générale d'une orbite troublée sert à trouver le mouvement continuél des apfides, aussi bien que les inégalités périodiques; en effet, dans une ellipse mobile on a cette équation  $\frac{1}{r} = 1 - e \cos. mu$  (3281), mais dans l'orbite troublée au lieu de  $e \cos. mu$ , l'on a une suite de termes dépendans de  $\Omega$  (3458), examinons les plus considérables, dans le cas des perturbations de Jupiter sur la terre.

3512. L'on a vu ci-dessus (3486), que la force perturbatrice qui affecte la force centrale, c'est-à-dire,  $\Phi$ , (en supposant la masse de Jupiter =  $I$ ), est égale à  $-I\left(\frac{r}{2f^3} + \frac{9r^3}{16f^5}\right)$ , donc  $\Phi rr = -I\left(\frac{r^3}{2f^3} + \frac{9r^5}{16f^5}\right)$ ; mais  $\frac{r}{r} = 1 - e \cos. mu$  (3281); d'où l'on tire  $r^3 = 1 + 3e$ ,

$mu(3287)$ ; donc  $\frac{r^1}{2f^3} = \frac{1+3e \cdot \cos. mu}{2f^3}$  &  $gr^s = \frac{9+45e \cdot \cos. mu}{16f^3}$ ; nous négligerons ce terme divisé par  $16f^3$  comme étant fort petit; mais nous examinerons ce que vaut  $\frac{3e}{2f^3} \cos. mu$  parmi les termes que l'attraction produit dans la valeur de  $\Omega(3492)$ . Supposant que ce soit-là le seul terme de  $\Omega$ , parce qu'il est en effet le plus considérable de tous, nous aurons pour l'équation de l'orbite troublée  $(3458) \frac{f^3}{Mr} = 1 - g \cdot \sin. u. - h \cdot \cos. u + \frac{3e}{2f^3(mm-1)} \cos. u - \frac{3e}{2f^3(mm-1)} \cos. mu$ ; cette équation doit revenir au même que l'équation d'une ellipse mobile tirée de l'observation,  $\frac{1}{r} = 1 - e \cdot \cos. mu$ , si l'on ne considère que le mouvement de l'apside, & qu'on fasse abstraction de toutes les autres inégalités, car alors l'équation de l'orbite troublée n'a d'autre effet que de rendre l'ellipse mobile; donc le terme  $\frac{3e}{2f^3(mm-1)}$  est l'excentricité de l'orbite troublée, c'est-à-dire, l'excentricité observée, ou la même que j'ai appelée  $e$ , donc  $\frac{3e}{2f^3(mm-1)} = e$ , d'où l'on tire  $mm = 1 - \frac{3}{2f^3}$ ,  $m = 1 - \frac{3}{4f^3}(3288)$ ,  $1 - m = \frac{3}{4f^3}$ , c'est le mouv. de l'aphélie de la terre (3281), en supposant que le mouvement de la terre est l'unité; il faut donc multiplier  $\frac{3}{4f^3}$  par  $360^\circ$ , pour avoir le mouvement de l'apside pendant une révolution entière de la terre, c'est-à-dire, son mouvement annuel; il faut aussi le multiplier par la masse de Jupiter qui étoit contenue dans la force  $\Phi(3485)$ ; la valeur de  $\frac{3}{4f^3}$  est  $0,005331$ , puisque  $f = 5,201$ ; multipliant donc par  $\frac{1}{1,667}$  & par  $1296000''$  pour le réduire en secondes & en décimales, on trouve  $6'',47$  pour le mouvement annuel de l'aphélie de la terre, produit par l'attraction de Jupiter; on auroit  $6''55'''$  si l'on ne négligeoit pas plusieurs termes tels que  $\frac{45}{16f^3}$  qui est égal à  $0,000739$ . Ce résultat diffère peu de celui de M. Euler qui trouve

Mouvement  
de l'aphélie  
de la terre.

6" 57<sup>m</sup>, dans la pièce où il calcule l'action des planètes sur la terre ; qui a remporté le prix de l'académie en 1756, & qui est dans le 8<sup>e</sup> vol. des pièces des prix, publié en 1771.

3513. Il y a deux autres causes qui peuvent produire un mouvement dans les apfides : la première a lieu pour la lune & pour les satellites, c'est la figure aplatie de la planète principale. La seconde est la petite résistance qu'on peut imaginer dans la matière éthérée où les planètes se meuvent ; cette résistance, si elle avoit lieu, pourroit changer la grandeur, la figure & la situation des orbites après un certain nombre de révolutions. Voyez M. d'Alembert (*Recherches*, &c. T. 11, pag. 145) ; on peut consulter aussi les Recherches de M. l'Abbé Bossut, qui remporta le prix de l'académie en 1762 sur cette matière, & celles de M. Albert Euler qui eut l'accessit, elles sont dans le VIII<sup>e</sup> volume des pièces des prix. Mais je dois avertir que l'examen des plus anciennes observations ne nous fait appercevoir dans les orbites aucun changement qui puisse indiquer la résistance de la matière éthérée ; le mouvement des apfides qu'on y remarque est produit par l'attraction mutuelle des planètes ; car on trouve que la résistance du fluide produiroit un mouvement de l'aphélie beaucoup moins sensible que le changement de durée dans la révolution, or celui-ci n'a pas lieu, du moins sensiblement ; donc le mouvement observé dans les apfides ne vient pas de la résistance.

La résistance de l'éther est insensible.

3514. Je dis qu'on ne voit pas de changement dans la durée des révolutions, je l'ai prouvé pour la terre & pour Mars, (*Mém. acad.* 1757, pag. 418 & 445) ; Saturne paroît au contraire avoir retardé (1164) ; donc si l'on observe une accélération dans Jupiter (1169), elle ne vient pas de l'action de Saturne, & de la position de ses apfides, (M. Cassini, *Mém. acad.* 1746, pag. 465) ; si cela est, les choses reviendront par la suite au même état où elles sont actuellement, & l'accélération se convertira en un retardement. Quant à l'accélération de la lune (1485), elle n'est pas constatée d'une manière absolument évidente, & je ne doute pas qu'on ne trouve dans

L'accélération de Jupiter ne la prouve pas.

l'attraction de quoi satisfaire à l'équation séculaire qu'on croit y remarquer. Ainsi rien ne prouve jusqu'ici la résistance de la matière éthérée ; tous les astronomes doivent donc convenir que si les corps célestes ne sont pas dans un vide absolu , ils sont au moins dans une matière dont l'effet est insensible , & qui est pour nous comme le vide ; cela seul suffiroit pour dissiper le système des tourbillons & du plein , que nous avons déjà réfuté ( 3383 ).

Le vide est prouvé.

### DU MOUVEMENT DES NŒUDS DES PLANÈTES.

3515. Si toutes les planètes tournoient autour du soleil dans un même plan , ce plan ne changeroit point par leur attraction réciproque , une planète ne pouvant faire sortir l'autre d'un plan où elles sont toutes deux ; mais toutes ces orbites sont inclinées les unes sur les autres , & dans des situations fort différentes ; chaque planète est tirée sans cesse hors du plan de son orbite par toutes les autres planètes , & change à tout instant d'orbite. Les astronomes , pour représenter méthodiquement ces inégalités , supposent que la planète est toujours dans le même plan ou sur la même orbite , mais que cette orbite change de situation ; on peut en effet représenter tous les mouvemens d'une planète hors du plan de son orbite primitive en donnant à ce plan un changement d'inclinaison , avec un mouvement dans ses nœuds , qui soit tel que le plan qu'on adopte , suive la planète dans toutes ses inégalités.

On sentira même sans autre démonstration qu'il est impossible qu'une planète attirée , dont l'orbite est dans un autre plan que celle de la planète perturbatrice vienne jamais traverser le plan de celle-ci , au même point où elle l'avoit traversé dans la révolution précédente : elle doit à chaque fois le traverser plutôt qu'elle n'eût fait , si la planète perturbatrice ne l'eût point attirée vers ce plan ; elle a sans cesse une détermination ou une force vers le plan où se trouve la planète qui l'attire , & elle

ne





ne peut obéir à cette force qu'en arrivant à ce plan un peu avant la fin de sa révolution.

3516. Soit  $DN$  (fig. 299) l'écliptique ;  $LBN$  l'orbite de la lune, c'est-à-dire, l'orbite dans laquelle la lune étoit d'abord, en parcourant l'arc  $LA$  ; le soleil étant placé dans le plan de l'écliptique  $DN$ , il est clair qu'en tout temps la force attractive du soleil tend à rapprocher la lune du plan de l'écliptique ou de la ligne  $DN$ , dans laquelle se trouve le soleil ; ainsi lorsque la lune tend à parcourir dans son orbite un second espace  $AB$  égal à l'espace  $LA$  qu'elle venoit de parcourir, la force du soleil tend à la rapprocher de l'écliptique  $ND$  d'une quantité  $AE$  ; il faut nécessairement que la lune par un mouvement composé décrive la diagonale  $AC$ , du parallélogramme  $AECB$ , en sorte que son orbite devienne  $ACM$ , au lieu de  $LBN$  ; c'est pourquoi le nœud  $N$  de cette orbite change continuellement de position & va de  $N$  en  $M$  dans un sens contraire au mouvement de la lune, que je suppose dirigé de  $A$  vers  $N$  ; donc le mouvement du nœud d'une planète est toujours rétrograde par rapport à l'orbite  $DN$  de la planète qui produit ce mouvement.

Pl. XL.  
Fig. 299.

Les nœuds  
sont rétrogrades.

3517. La même figure fait voir pourquoi l'attraction du soleil change l'inclinaison de l'orbite lunaire (1491) : la lune obligée de changer sa direction primitive  $LBN$  en une direction nouvelle,  $ACM$ , rencontrera l'écliptique  $NMD$  au point  $M$  sous un nouvel angle  $AMD$  différent de l'inclinaison  $AND$  que la lune affectoit auparavant ; mais ce changement d'inclinaison étant insensible dans les autres planètes, je ne m'en occuperai point ici. D'ailleurs ce changement est périodique, & il ne s'accumule point ; car si l'orbite troublée  $ACM$  fait en  $M$  un plus grand angle d'inclinaison que l'orbite primitive en  $N$ , il arrivera le contraire quand la planète aura passé le nœud  $N$ , en sorte que l'inclinaison se rétablira par les mêmes degrés ; il n'y a que les nœuds dont le mouvement est toujours du même sens, & qui rétrogradent de plus en plus, soit que la lune tende à son nœud,

Changement  
d'inclinaison.

soit qu'elle s'en éloigne. Ainsi je parlerai seulement du mouvement des nœuds, dont l'usage revient souvent dans l'astronomie; il produit lui-même un changement dans les inclinaisons des orbites planétaires quand on les rapporte à l'écliptique (1378); & cette variation est extrêmement sensible pour les satellites de Jupiter (2945).

Ce mouvement du nœud pour chaque instant est différent à raison de la distance de la planète à son nœud, & de la distance de la planète troublante à ce même nœud; il faut donc trouver d'abord une expression générale du mouvement du nœud dans un instant infiniment petit, & cherchant ensuite son intégrale, on aura le mouvement pour une révolution entière.

3518. *TROUVER l'expression générale du mouvement des nœuds.* Soit *TOE* (fig. 298) l'orbite de la terre pour laquelle on cherche le mouvement du nœud, par rapport à l'orbite de Jupiter *MP*; *S* le soleil qui est au centre de ces orbites; *M* la planète dont l'attraction cause ce mouvement, c'est-à-dire, Jupiter; *SN* la ligne d'intersection des deux orbites, enforte que le demi-cercle *QTO* soit relevé au-dessus du plan de la figure; *Tp* le mouvement de la terre sur son orbite dans un instant très-court, tel que *dt*. On tirera une petite ligne *pq* parallèle au rayon vecteur *SM* de Jupiter, pour exprimer la force avec laquelle Jupiter tend à éloigner la terre *T* de son orbite, parallèlement à *SM*; la terre étant retirée de *p* en *q* par l'action de Jupiter, son vrai mouvement au lieu d'être *Tp* se fait de *T* en *q*; la ligne *Tq* exprime l'orbite composée que décrit la terre dans ce moment-là, tandis que *Tp* exprime l'orbite primitive qu'elle décrirait si l'action de Jupiter ne l'avoit pas retirée de *p* en *q*.

On prolongera la tangente *Tp* de l'orbite, & elle ira rencontrer en un point *N* la ligne des nœuds *SON*, ou la commune section du plan de l'écliptique & de l'orbite de Jupiter; de même si l'on prolonge la ligne *Tq* du mouvement composé, elle ira rencontrer le plan de l'orbite de Jupiter en un autre point *n*, & *Sn* fera la ligne des nœuds pour cette nouvelle orbite; ainsi l'angle *NSn*



exprimera le mouvement du nœud ou le changement que la commune section des deux plans éprouve par l'action de Jupiter, c'est la quantité que nous cherchons, & dont il faut trouver l'expression, nous appellerons *dq* ce petit angle *NSn*.

3519. Ayant joint les points *N* & *n* par une ligne *Nn*, elle sera parallèle à *pq*; car les triangles *Tpq*, *TNn* sont dans un plan dont toutes les lignes parallèles à *pq* sont aussi parallèles à la ligne *SM*; donc la ligne menée par le point *N* parallèlement à *SM* & à *pq*, est dans le plan du triangle *Tpq*; mais elle est de plus dans l'orbite même de Jupiter, aussi bien que *SM*, donc elle appartient à l'orbite & au triangle, donc elle est la commune section de l'orbite & du triangle *TNn*. Les deux triangles *Tpq*, *TNn* sont semblables; donc  $Tp : TN :: pq : Nn$ , &  $Nn = \frac{TN}{Tp} pq$ .

Si l'on appelle *M* la masse de Jupiter, celle du soleil étant 1, *f* sa distance au soleil, *s* sa distance à la terre, c'est-à-dire, *MT*, la force perturbatrice de Jupiter sur la terre sera  $\frac{M}{s^2}$  (3386); décomposée suivant *MS* elle devient  $\frac{Mf}{s^3}$  (3438); il en faut retrancher la force sur le soleil, ou  $\frac{M}{f^2}$ , & l'on a la force perturbatrice dans la direction *SM* ou dans la direction *pq* qui lui est parallèle,  $= M \left( \frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2} \right)$ , c'est cette force que nous appellerons *F*.

L'espace  $pq = Fdt^2$ , parce que les espaces parcourus sont comme les carrés des temps (3365); ainsi  $Nn = \frac{TN}{Tp} Fdt^2$ . La perpendiculaire  $Rn = Nn \sin nNR$ ; mais l'angle *nNR* est égal à l'angle *MSQ*, distance de Jupiter au nœud, à cause du parallélisme des lignes *SM*, *Nn*; donc  $Rn = Nn \sin MSQ = \frac{TN}{Tp} Fdt^2 \sin MSQ$ .

3520. La valeur de l'angle *NSn*, qui est le mouvement du nœud, ou l'arc divisé par le rayon (3357), est  $\frac{Rn}{sn} = \frac{TN}{Tp \cdot NS} Fdt^2 \sin MSQ$ ; mais  $NS : TN :: R : \sin TSN$ ,

Différen-  
tielle du mou-  
vement du  
nœud.

# 604 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

en supposant l'orbite circulaire, ou l'angle  $T$  de  $90^\circ$ ; donc  $\frac{TN}{NS} = \sin. TSN$  ou  $TS\Omega$ ; donc l'angle  $NSn = dq = \frac{Fdr}{Tp}$   
 $\sin. MS\Omega. \sin. TS\Omega$ , c'est l'expression du mouvement du nœud.

Si l'on suppose que le mouvement moyen de Jupiter soit à celui de la terre, comme  $p$  est à 1,  $p$  étant, par exemple,  $\frac{1}{12}$ , quand la terre aura décrit un angle  $u$ , Jupiter aura parcouru un arc égal à  $pu$  (ou  $\frac{1}{12}u$ ), en partant du même point, & la différence de leurs mouvements, ou l'angle de commutation  $MST$  fera  $u - pu$ , ou  $(1 - p)u = t$ ; si le mouvement du nœud est  $q$ , la distance  $MS\Omega$  fera  $pu - q$ , & la distance  $TS\Omega$  qui est la somme de  $MST$  &  $MS\Omega$  fera  $u - q$ . On substituera ces deux expressions dans la formule qui renferme la valeur de  $dq$ .

3521. A la place de l'élément du temps  $dt$  qui est supposé constant, parce que le temps est uniforme, on peut mettre le mouvement  $Tp$  que j'appellerai  $du$ , qui est également uniforme, & proportionnel au temps, dans une orbite circulaire; alors on aura  $\frac{Fdr}{Tp} = \frac{Fdr}{du} = Fdu$ , on substituera cette valeur dans l'expression du mouvement du nœud, on mettra aussi à la place de  $F$  sa valeur  $M(\frac{f}{r^3} - \frac{1}{f^3})$ , & l'on aura le mouvement du nœud,  $dq = Mdu(\frac{f}{r^3} - \frac{1}{f^3}) \sin.(pu - q) \sin.(u - q)$ , dont il fera aisé de trouver l'intégrale, quand on aura les valeurs de  $f$  &  $s$ , exprimées en sinus de l'angle  $u$ , ou de ses multiples.

3522. Nommant  $t$  l'angle de commutation  $MST$ , on a la valeur de  $\frac{1}{MT^3}$  ou  $\frac{1}{f^3}$ , exprimée par une série de cette forme  $A+B. \cos. t+C. \cos. 2t+D. \cos. 3t$ , &c. (3485, 3499), dont les coefficients  $A, B, C$  sont supposés connus; ainsi l'on aura  $dq = Mdu(fA - \frac{1}{f^3} + Bf. \cos. t + Cf. \cos. 2t, \&c.) \sin.(pu - q) \sin.(u - q)$ ; si l'on achève effectivement la multiplication de  $\sin.(pu - q) \sin.(u - q)$ ,

l'on aura  $(3622) \frac{1}{2} \text{ cof. } (1-p)u - \frac{1}{2} \text{ cof. } (u+pu-2q)$ , qu'il faut encore multiplier par  $Mdu (fA - \frac{1}{f^2} Bf \text{ cof. } t, \&c.)$ . En mettant  $(1-p)u$  à la place de l'angle  $t$ , on aura dans le produit un grand nombre de termes, parmi lesquels il y aura le produit de  $\frac{1}{2} \text{ cof. } (1-p)u$  par  $Bf \text{ cof. } t$  ou  $Bf \text{ cof. } (1-p)u$ ; ce produit est  $Bf [\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ cof. } (2-2p)u] (3627)$ ; le terme  $\frac{1}{4}$  ne renferme aucun sinus, & par conséquent aucune quantité dont le retour soit périodique; il exprime donc une quantité qui ira toujours en croissant, & qui donnera  $dq = MEd u. \frac{1}{4}$ , pour l'élément ou la différentielle du mouvement du nœud, en négligeant tous les termes où il y a des sinus; l'intégrale est  $\frac{MBfu}{4}$ ; c'est donc le mouvement du nœud de la terre sur l'orbite de Jupiter, pendant le temps que la terre décrira un angle  $u$ ; si à la place de  $u$  nous mettons  $360^\circ$ , nous aurons le mouvement du nœud pour une révolution entière de la terre, ou le mouvement annuel  $MBf. 90^\circ$ .

Mouvement  
total du nœud.

3523. **EXEMPLE.** Soit  $M$  la masse de Jupiter  $= \frac{1}{1067}$ , celle du soleil étant 1,  $f=5,2 (1222)$ ;  $B = 0,004384 = \frac{3r}{f^2} + \frac{45r^3}{8f^6} (3485)$ ;  $90^\circ = 324000''$ ; ainsi  $MBf90^\circ = 6'',924$ . J'ai fait usage de cette quantité pour avoir le changement de latitude des étoiles (2736). De semblables calculs appliqués à toutes les planètes m'ont fait trouver le mouvement des nœuds de chacune par l'action de toutes les autres (*Mém. acad.* 1758, pag. 261), & j'en ai donné le résultat ci-dessus (1347) avec différentes remarques sur cette théorie.

3524. Le mouvement des nœuds de la lune, qui, suivant les observations, est de  $1^\circ 26' 48''$  pour chaque révolution de la lune (1489), se trouve par la formule précédente, à un vingtième près; je vais en donner le calcul, en négligeant non-seulement la parallaxe du soleil, mais encore l'excentricité de l'orbite lunaire, celle du soleil, & toutes les inégalités de la lune; on peut voir dans les auteurs cités (1477), qu'en négligeant moins de choses,

Nœud de la  
Lune.

## 606 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

on trouve ce mouvement bien mieux d'accord avec l'observation.

3525. La force  $M\left(\frac{f}{f^3} - \frac{1}{f^2}\right)$  (3519), se réduit à  $-\frac{3S \cdot \text{cof. } t}{f^3}$ , en supposant que  $TM$  soit égale à la différence de  $MS$  à  $ST$ , (3477, 3530), &  $S$  la masse du soleil; donc on a (3521),  $dq = \frac{3S}{f^3} du \cdot \text{cof. } (1 - p) u \cdot \text{fin. } (p u - q) \text{fin. } (u - q)$ ; en faisant la multiplication de ces trois facteurs, on trouvera un terme qui sera  $\frac{\text{cof. zéro}}{4}$ , ou égal à  $\frac{1}{4}$ ; tous les autres renfermant des sinus; ce terme donnera donc cette équation  $dq = \frac{3S}{4f^3} du$ , dont l'intégrale  $q = \frac{3S u}{4f^3}$  est le mouvement du nœud pendant une révolution entière de la lune; on mettra à la place de  $u$  les  $360^\circ$ , ou  $129600''$ ; au lieu de  $\frac{S}{f^3}$ , sa valeur qui revient à celle de  $r^2$  (3407); à son logarithme 7,7478192 on ajoutera celui de  $\frac{3}{4}$  & celui de  $360^\circ$ , on aura le logarithme de  $1^\circ 30' 38''$ , qui est le mouvement du nœud de la lune: L'observation donne  $1^\circ 26' 48''$ ; mais cet exemple suffit pour faire comprendre l'esprit de la méthode, & l'on voit assez que pour connoître le vrai résultat de la théorie, il faudroit employer plus de termes.

Son mouvement.

## DE LA PRECESSION DES EQUINOXES.

3526. La précession des équinoxes ou l'effet des attractions qu'exercent le soleil & la lune sur le sphéroïde terrestre, est une des parties les plus difficiles du calcul des attractions célestes; Newton s'y est mépris: M. d'Alembert, M. Euler, M. Simpfon, M. le Chevalier d'Arcy, M. de Silvabelle, le P. Walmesley & le P. Frisi (*De gravitate*, 1768), se sont exercés sur cette matière & ne sont point d'accord; d'ailleurs aucun auteur n'en a parlé d'une manière élémentaire; enforte que je crois faire une chose utile en expliquant ici avec tout le détail & toute la

Auteurs qui ont parlé de la précession.

clarté possible les principes & le calcul de cette grande question. La première solution de ce beau problème fut celle de Newton, (*Princip. math. L. III.*) ; mais elle n'étoit ni assez générale, ni assez bien démontrée ; M. d'Alembert est le premier qui ait réduit ce problème en équations, & qui l'ait résolu d'une manière générale & complète, dans ses *Recherches sur la précession des équinoxes*, en 1749. Il fut suivi par M. Euler, dans les *Mémoires de Berlin*, pour 1749 ; & tous deux trouvèrent un résultat différent de celui de Newton, (3562). Pour moi je suivrai principalement la méthode de Simpson (*Miscellaneous tracts.* 1757) ; mais je tâcherai de la simplifier & d'en démontrer toutes les parties d'une manière encore plus satisfaisante & plus élémentaire que n'avoit fait l'auteur lui-même.

3527. La théorie du mouvement des nœuds fait voir qu'une planète qui tourne dans le plan de son orbite, en est sans cesse retirée par les autres planètes (3516) ; il en est de même des parties du sphéroïde terrestre, qui étant relevées vers l'équateur & tournant chaque jour avec lui, sont détournées de leur mouvement naturel par les attractions latérales du soleil & de la lune, comme si la portion de matière (ou cette espèce de ménisque) dont on peut concevoir que le globe est surmonté, étoit composée d'un grand nombre de planètes qui tournassent en vingt-quatre heures autour de la terre. Nous commencerons par chercher l'action du soleil & son influence sur la précession des équinoxes, parce que le calcul en est plus simple que pour la lune.

3528. Le premier pas qu'il faut faire dans cette théorie, est de trouver la force avec laquelle le soleil attire chaque point ou chaque particule de la terre. Soit  $S$  le soleil (*fig. 300*),  $PADp$  un méridien terrestre,  $PCp$  l'axe de la terre,  $DC$  une ligne perpendiculaire à la ligne des centres  $SC$ , c'est-à-dire, à la ligne qui va du soleil à la terre ; la force avec laquelle chaque point  $A$  du méridien est attiré par le soleil dans la direction  $AS$ , ne peut faire balancer l'axe  $PCp$  de la terre, & déplacer l'é-

*Fig. 300.*

De la force du soleil sur chaque point de la terre.

*Fig. 300.* quateur que dans le cas où le point *A* fera attiré plus que le centre *C* de la terre, car si l'un & l'autre étoient attirés avec la même force vers le soleil, il n'en résulteroit aucun changement dans leur position respective (3432); il faut donc chercher l'expression de la force qui agit sur le point *A*, trouver ce qui en résulte dans la direction *CS*, & en retrancher la force du soleil sur le centre même de la terre dans la même direction, le reste sera la force perturbatrice par laquelle le point *A*, étant plus attiré que le point *C* ou le point *K*, tend à s'éloigner de la ligne *CKD* perpendiculaire au rayon solaire *CS*.

3529. La force du soleil sur le point *A* peut être exprimée par  $\frac{M}{SA^2}$  (3386), en appelant *M* la masse du soleil; cette force se décompose, & équivaut à deux autres qui agiroient suivant *AB* & *AC*; & comme la force *AC* dirigée vers le centre de la terre ne produit aucune perturbation, il ne reste que la force suivant *AB* ou suivant *CS* qui lui est parallèle, cette force est  $\frac{M \cdot CS}{SA^3}$  (3438); il en faut ôter la force du soleil sur le centre de la terre qui est  $\frac{M}{CS^2}$ , & l'on aura la force perturbatrice  $M \left( \frac{CS}{SA^3} - \frac{1}{CS^2} \right)$ , dans la direction de la ligne des centres *CS*.

3530. Pour simplifier cette expression l'on considérera que *SA* = *CS* — *AK*, du moins à très-peu près, à cause de la grande distance *SA* qui rend l'angle *CSA* très-petit; donc  $\frac{1}{SA^3} = (CS - AK)^{-3}$ , & réduisant cette expression en série (3286) =  $\frac{1}{CS^3} + \frac{3AK}{CS^4}$ , &c. On peut négliger les termes suivans qui feroient divisés par des puissances plus élevées de *CS*, & qui feroient par conséquent beaucoup moindres; ainsi  $\frac{M \cdot CS}{SA^3} = \frac{M}{CS^2} + \frac{3AK \cdot CS \cdot M}{CS^4}$ ; donc la force perturbatrice  $M \left( \frac{CS}{SA^3} - \frac{1}{CS^2} \right)$  se réduira à  $\frac{M \cdot 3AK}{CS^3}$ . Ainsi cette force est proportionnelle à *AK*, c'est-à-dire, à la distance de chaque point *A* de la terre à la ligne *CD* perpendiculaire

perpendiculaire au rayon  $SC$  : nous rappellerons cette considération quand il s'agira des marées ( 3592 ). Fig. 300.

3531. Au lieu de la masse du soleil  $M$  qui entre dans cette expression, il faut y introduire la force centrifuge que nous éprouvons sous l'équateur, & qui est  $\frac{1}{288}$  de la gravité des corps terrestres. Si l'on appelle  $a$  le rayon de l'équateur,  $t$  le temps de la rotation diurne de la terre,  $T$  la durée de la révolution annuelle, on aura  $M = \frac{Cs^3 \beta. tt}{a^3 T^2}$  ( 3416 ), & par conséquent si l'on fait  $a=1$ , la force perturbatrice du soleil sur une particule  $A$  de la terre exprimée en parties de la force centrifuge terrestre sera  $\frac{3\beta tt}{T^2} AK$ . Expression de la force perturbatrice.

3532. Ainsi cette force est proportionnelle à  $AK$  ou à la distance de chaque particule au plan  $CKD$  du cercle d'illumination, & lorsque  $AK$  devient égal à l'unité, c'est-à-dire, au rayon de l'équateur, l'on a  $\frac{3\beta tt}{T^2}$  pour la force perturbatrice sous l'équateur, c'est ce que nous appellerons  $\gamma$  dans les articles suivans. Cette force du soleil exprimée en nombres est  $3. \frac{1}{(365)^2} \cdot \frac{1}{289} = \frac{1}{12852000}$  de la gravité totale des corps terrestres dont nous avons parlé ( 3361 ), ainsi la force du soleil  $\gamma = \frac{1}{12852000}$  de la gravité ordinaire ; c'est la force par laquelle le soleil tend à détacher de la terre une particule située sous l'équateur, & cela dans la direction  $CS$ . Force du soleil par rapport à la gravité.

3533. La force du soleil sur une particule de la terre étant connue, il faut trouver la force totale qui en résulte pour faire tourner l'ellipse entière du méridien, & ensuite le sphéroïde. Supposons donc que toutes les parties d'une ellipse telle que  $FCN$  (fig. 301), sont sollicitées comme ci-dessus ; considérons une ordonnée  $EC$  au diamètre  $OF$ , & nous chercherons la somme des forces qui s'exercent sur cette ligne entière ; choisissons un point  $V$  ou une particule  $V$  de matière prise sur la ligne  $EC$ , la force étant proportionnelle à la distance de chaque particule au diamètre  $MON$ , on aura cette proportion ;  $a$  est à  $\gamma$ , comme  $OD$  est à la force cherchée, qui sera  $\frac{\gamma}{a} OD$ . Fig. 301.

Fig. 351.  
Considération du bras de levier.

3534. Cette force ou cette tendance de chaque partie de la terre vers le soleil exige encore une considération essentielle sur laquelle il est nécessaire d'insister, c'est celle du bras de levier  $DV$  auquel cette force est appliquée. Si la force  $\frac{2}{a} OD$  qui agit sur la particule  $V$  étoit appliquée en  $D$ , ou si au lieu de la particule  $V$ , on considéroit la particule  $D$ , on n'auroit aucun mouvement dans l'ellipse, la particule  $D$  tend à se détacher du centre  $O$  suivant  $OD$ , mais non pas à faire tourner l'ellipse autour du centre, cette force n'agit pas plus pour faire tourner l'ellipse, que si elle étoit appliquée au centre  $O$ ; car, suivant les élémens de mécanique, on peut considérer une même force dans tous les points de sa direction, c'est-à-dire, en  $O$ , en  $D$  & en  $T$ . Au contraire il est évident que la même force appliquée en  $C$  y produira plus d'effet pour faire tourner l'ellipse, que dans tout autre point de la ligne  $DC$ ; cependant l'expression  $\frac{2}{a} OD$  est égale pour tous les points de la ligne  $BDC$ , parce qu'elle indique seulement la quantité dont chaque point de la ligne  $BDC$  tend à s'éloigner de la ligne  $MON$ ; il faut donc multiplier la tendance que chaque particule de matière  $V$  a pour s'éloigner de la ligne  $MN$ , par sa distance  $DV$  à la ligne des centres  $OT$ , pour avoir son énergie, ou l'effet qu'elle doit produire pour faire tourner la terre autour de  $O$ ; l'on ne voit pas d'abord quel produit donnera une force multipliée par une ligne, mais il nous suffira d'avoir la somme de routes ces forces de rotation ainsi exprimées; nous les comparerons à celles d'un autre corps dont le mouvement sera connu, en exprimant de la même manière les forces de celui-ci (3552), & nous en conclurons le mouvement de l'équateur terrestre; ce n'est ici qu'un terme de comparaison: quand je multiplie la force du point  $V$  par  $DV$ , & la force du point  $C$  par  $DC$ , cela veut dire que ces forces sont entre elles comme  $DV$  est à  $DC$ , ce qui est évident.

Force de chaque particule pour faire tourner la terre.

3535. L'on a donc la quantité  $\frac{2}{a} OD \cdot DV$  pour l'ef-



ficacité ou l'énergie de la force par laquelle chaque particule  $V$  tend à faire tourner l'ellipse; & si l'on fait  $DV = z$  & la particule ou l'élément  $V = dz$ , on aura  $\frac{\gamma}{a} z dz$   $OD$ , dont l'intégrale  $\frac{\gamma}{2a} z^2 OD$  est la force de la ligne  $DV$ ; ainsi  $\frac{\gamma}{2a} DC^2 \cdot OD$  fera la force de la ligne totale  $DC$ .

3536. Par la même raison l'effort de toutes les particules de la ligne  $BD$  pour faire tourner l'ellipse, fera  $\frac{\gamma}{2a} OD \cdot BD^2$ , & comme celles-ci agissent pour faire tourner la terre du côté opposé, il faudra prendre la différence des deux efforts, & l'on aura  $\frac{\gamma}{a} \cdot \frac{1}{2} OD (BD^2 - CD^2) = \frac{\gamma}{a} \cdot \frac{1}{2} OD (BD + CD) (BD - CD) = \frac{\gamma}{a} OD \cdot BC \cdot DE$ ; c'est la force qui résulte de toutes les attractions sur l'ordonnée  $BC$ , pour faire tourner l'ellipse sur son centre.

3537. Pour en conclure la force de l'ellipse toute entière, il faut l'exprimer algébriquement par le moyen des diamètres. Suivant la propriété ordinaire de tous les diamètres  $OF$ ,  $OM$  d'une ellipse par rapport aux ordonnées

$OF$	$= c$
$OM$	$= p$
$FH$	$= f$
$OH$	$= g$
$OD$	$= y$
$OE$	$= x$

$BE$ ,  $EC$  (3257), on a  $CE^2 = BE^2 = \frac{pp}{cc} (cc - xx)$ , mais à cause des triangles semblables  $OFH$ ,  $ODE$ , on a ces deux proportions :

$OF : FH :: OE : OD$  } &  $OF : OH :: OE : ED$   
 $c : f :: x : y$  } &  $c : g :: x : ED$   
 ainsi  $OD = y = \frac{fx}{c}$  &  $ED = \frac{gx}{c}$ ; au moyen de ces va-

leurs la force  $\frac{\gamma}{a} OD \cdot BC \cdot ED$  de l'ordonnée entière  $BC$  fera  
 $= \frac{\gamma}{a} \frac{fx}{c} \cdot \frac{2p}{c} \sqrt{cc - xx} \cdot \frac{gx}{c}$ . On concevra une autre ordonnée infiniment proche, dont la distance mesurée sur  $OD$  soit appelée  $dy$ ; multipliant par  $dy$  la force sur l'ordonnée  $BC$ , l'on aura la force sur le petit rectangle qui est l'élément de l'ellipse, & l'intégrale donnera la force sur l'ellipse toute entière. Au lieu de  $dy$  on peut mettre

H h h h i j

Force d'une  
ligne entière.

Fig. 301.  $\frac{fdx}{c}$ , & l'on aura la force sur l'élément de l'ellipse  $\frac{\gamma}{a}$ ,  $\frac{ffgxx \cdot 2p}{c^2} \sqrt{cc - xx} \cdot dx$ , ou  $\frac{\gamma fg}{ac^2} \cdot \frac{2pf}{c^2} \sqrt{cc - xx} \cdot x dx$ , dont il faut prendre l'intégrale.

3538. On considérera que l'élément de la surface de l'ellipse est égal à  $\frac{2p}{c} \sqrt{cc - xx} \cdot \frac{fdx}{c}$ , c'est-à-dire, l'ordonnée  $\frac{2p}{c} \sqrt{cc - xx}$ , multipliée par la petite distance d'une ordonnée à l'autre qui est  $dy$ , ou  $\frac{fdx}{c}$ . Si l'on appelle  $A$  l'intégrale de cet élément  $\frac{2pf}{cc} \sqrt{cc - xx} \cdot dx$ , ou la surface de l'ellipse, on aura l'intégrale de l'autre élément (qui contient  $xx$  de plus), ou  $\int \frac{2pf}{c^2} \sqrt{cc - xx} \cdot x dx$ , égal à  $A \cdot \frac{c^2}{4}$ , lorsque  $x=c$  (3326); ainsi l'intégrale, ou la force de l'ellipse entière sera  $\frac{\gamma fg}{ac^2} \cdot A \frac{c^2}{4} = \frac{\gamma}{a}$ .  $\frac{fgA}{4} = \frac{\gamma}{a} \cdot \frac{1}{4} FH \cdot OH \cdot A$ , mais  $OH \cdot FH = mn (aa - bb)$ , en appelant  $m$  &  $n$  le sinus & le cosinus de l'angle  $AOH$  (3275); donc la force ou l'énergie cherchée est  $\frac{\gamma}{a} \cdot \frac{1}{4} mn (aa - bb) A$ , sur l'ellipse toute entière; c'est la force avec laquelle cette ellipse, par exemple, un méridien de la terre, tend à faire tourner la terre du nord au sud, ou du sud au nord.

Force totale  
de l'ellipse.

3539. Puisque  $AOG$  est le grand axe de l'ellipse; ou le diamètre de l'équateur terrestre, & qu'on suppose le soleil agir sur la ligne  $ODT$ , il s'ensuit que l'angle  $AOT$  est égal à la déclinaison du soleil, mais le sinus de l'angle  $AOH = m$  & son cosinus  $= n$  (3275, 3538), donc  $mn$  est le produit du cosinus & du sinus de la déclinaison du soleil (3558).

3540. Ce que nous venons de démontrer pour l'ellipse  $FMGA$ , qui forme le méridien ou la section du sphéroïde terrestre par son axe, se démontreroit également pour toute autre section de la terre parallèle au méridien; car toutes ces sections sont des ellipses semblables au méridien.

dien (3283). Ainsi l'on connoît la force du soleil sur une ellipse qui fait portion d'un sphéroïde : on peut imaginer une autre ellipse, ou une autre section du sphéroïde infiniment proche de la première, & qui lui soit parallèle, la distance réciproque étant  $du$  ; la force de toute l'ellipse multipliée par  $du$ , donnera la force de toute la tranche solide qui est l'élément du sphéroïde ; en intégrant, l'on aura la force du sphéroïde tout entier, ou l'énergie totale de la force dont la terre est agitée par l'attraction du soleil sur toutes les molécules de la terre. Supposons donc que le sphéroïde terrestre est coupé parallèlement à l'axe  $PO$  (fig. 304), ou au méridien dans lequel se trouve le soleil, à une distance  $CM = u$  du centre de la terre, par un plan  $LMN$  ; la section sera une ellipse (3283), dont le demi-grand axe perpendiculaire au petit axe  $LN$  sera

Fig. 304.

$\sqrt{aa - uu}$ , puisque ce sera une ordonnée de l'équateur, dont le rayon est  $a$ , prise à la distance  $u$  du centre. Si l'on nomme  $A$  la surface de l'ellipse du méridien  $EPQO$ , l'on aura  $aa : aa - uu :: A : A \frac{aa - uu}{aa}$ , surface de la petite ellipse ; pour avoir la force de toutes les parties de cette ellipse, il faudra mettre dans l'expression de la force totale (3538), cette surface à la place de  $A$ .

Il faut par la même raison mettre la différence des carrés des axes de cette petite ellipse au lieu de la différence  $aa - bb$ , qui avoit lieu dans la grande ellipse ; on trouvera la différence des carrés des axes de la petite ellipse, en considérant que cette différence est proportionnelle à la surface de l'ellipse ; car dans deux ellipses semblables les demi-axes ont le même rapport ; l'excentricité étant  $\sqrt{aa - bb}$  ; la surface de l'ellipse est comme le carré de cette excentricité ou comme  $aa - bb$ , c'est-à-dire, comme la différence des demi-axes ; ainsi  $A : A \frac{aa - uu}{aa} :: aa - bb : \frac{aa - bb}{aa} (aa - uu)$  ; c'est la différence des axes qu'il faut mettre à la place de  $aa - bb$  (3538), & l'on aura  $\frac{\gamma}{a} \cdot \frac{mn}{4} \left( \frac{aa - bb}{aa} \right) \cdot \left( \frac{aa - uu}{aa} \right)^2 A$ , pour

# 614 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

l'énergie de la petite ellipse ; il faut la multiplier par  $du$ , & intégrer, la multiplication donnera  $A \cdot \frac{\gamma}{a^5} \cdot \frac{mn}{4} (aa - bb) (a^4 du - 2a^2 u^2 du + u^4 du)$ , intégrant chaque terme (3300), on a  $\frac{A\gamma}{a^5} \cdot \frac{mn}{4} (aa - bb) (a^4 u - \frac{2}{3} a^2 u^3 + \frac{u^5}{5})$ .

3541. Lorsque  $u = a$ , c'est-à-dire, au rayon entier  $CQ$  de l'équateur, la quantité précédente est égale à l'efficacité de toutes les particules qui composent le demi-sphéroïde ; & celle du sphéroïde entier qui en est le double ; devient  $\frac{A\gamma}{a^5} \cdot \frac{mn}{4} (aa - bb) \cdot 2 (a^5 - \frac{2}{3} a^5 + \frac{a^5}{5}) = \frac{A\gamma}{15} mn (aa - bb)$ , est l'efficacité du sphéroïde entier ; mais  $\frac{4}{3} aA$  est la masse entière du sphéroïde, (3331), que nous appellerons  $S$  ; donc mettant  $\frac{3S}{4a}$  à la place de  $A$ , la force deviendra  $\frac{\gamma}{5} (aa - bb) \frac{mn}{a} S$  ; & mettant à la place de  $\gamma$  sa valeur  $\frac{3\beta t^2}{T^2}$ , (3531), l'on aura enfin  $\frac{3\beta t^2}{5T^2} (aa - bb)$

Force totale du soleil.  $\frac{mn}{a} S$ , expression de la force totale du soleil pour faire tourner le sphéroïde terrestre du nord au sud. Il s'agit d'en conclure le changement de l'axe, ou l'angle que l'axe doit parcourir en vertu de cette force ; c'est ici où commence la principale difficulté du problème, & l'élégance particulière de la méthode que j'explique, où ce problème est réduit à la plus simple dynamique.

Méthode pour résoudre le problème. 3542. Nous connoissons la force du soleil sur le sphéroïde terrestre (3541), & cette force doit produire à l'extrémité de l'axe de rotation un déplacement que nous appellerons  $r$ , en sorte que le plan de l'équateur de la terre doit s'incliner vers le soleil en tournant autour d'un de ses diamètres, en même temps qu'il tourne par la rotation diurne autour de l'axe du monde qui est perpendiculaire à son plan ; cherchons donc en général quelle force il faudroit appliquer perpendiculairement à chaque point de l'équateur pour entretenir ce petit mouvement  $r$  du

plan de l'équateur, en même temps que chaque particule contenue dans ce plan continueroit son mouvement de rotation; quand nous aurons trouvé la force totale qui feroit nécessaire pour produire un mouvement  $r$ , nous aurons par une simple règle de trois (3555), le mouvement que produit la force donnée du soleil dans un instant infiniment petit. Ainsi nous avons considéré la force du soleil telle qu'elle s'exerce sur chaque particule du sphéroïde, & nous avons trouvé la force totale exercée sur ce sphéroïde, nous allons chercher de la manière la plus facile le rapport entre un mouvement  $r$ , & la force totale exercée sur un sphéroïde & nécessaire pour le produire; il faut commencer par le cas le plus simple, en ne prenant d'abord que le seul cercle de l'équateur, & une seule particule de matière qui tourneroit librement dans la circonférence de ce cercle, comme tourne la terre, en même temps que le plan de l'équateur sur lequel elle se meut, auroit un mouvement  $r$ , & nous trouverons qu'il faut à cette particule de matière une force qui soit  $= 2 r \beta \cos. AR$ .

3543. PROBLEME. Soit un corpuscule  $R$  de matière (fig. 302), qui tourne librement & uniformément sur une circonférence  $ARFB$  égale à l'équateur terrestre, d'occident en orient, tandis que le plan de l'équateur tourne lui-même du nord au sud, autour du diamètre  $AB$  par un mouvement infiniment plus lent, dont la vitesse soit  $r$ , au point  $F$  où elle est la plus grande; on demande la force dont il faut que le corpuscule  $R$  soit agité à chaque point de l'arc  $AF$ , ou à chaque instant, perpendiculairement au plan de l'équateur, pour pouvoir demeurer toujours dans le plan qui tourne sur le diamètre  $AB$ .

SOLUTION. Soit  $ARFB$  la situation de l'équateur au moment où le corpuscule est en  $R$ ;  $ANHZB$  la situation de l'équateur au second instant, lorsque le corpuscule  $R$  aura parcouru l'arc  $RE$  de l'équateur, ou la partie  $RM$  de la tangente, qui ne diffère pas de  $RE$  (3314). Ce corpuscule a reçu en  $R$  par le mouvement du plan, une impression perpendiculaire au plan  $ARFB$ , capable de lui faire par-

De la force  
nécessaire  
pour conser-  
ver le mou-  
vement.  
Fig. 302.

Fig. 302.

courir  $RN$  qui exprime la vitesse du plan en  $R$ , tandis qu'il a son mouvement dans l'équateur exprimé par  $RM$ ; ainsi il doit parcourir la diagonale du parallélogramme  $RNV$ , & arriver en  $V$  à la fin du second instant, en sorte que  $MV$  feroit égale à  $RN$ , en ne considérant que ces deux impressions  $RN$  &  $RM$ . Mais la distance des deux cercles  $ARF$   $ANH$  est plus grande vis-à-vis du point  $M$ , que vis-à-vis du point  $R$ , ainsi le point  $V$  n'est pas dans le plan du cercle  $ANHB$  qui représente la situation de l'équateur dans le second instant; il s'en faut d'une quantité telle que  $VC$ , en supposant la ligne  $GH$  parallèle à la ligne  $DN$ , l'une & l'autre dans le plan du cercle  $ANHB$ ; il faut donc que le corpuscule à la fin du second instant reçoive une seconde force capable de lui faire parcourir  $VC$ , pour qu'il puisse accompagner le plan de l'équateur malgré son mouvement; c'est cette force que nous cherchons. Quoique le point  $C$  ne soit pas sur la circonférence même du cercle  $ANH$ , mais hors du cercle, de la quantité  $CH$ , nous négligerons cette différence, & nous ne ferons point attention à la force qui seroit nécessaire pour le ramener en  $H$ . Si nous négligeons cette quantité  $CH$ , ce n'est pas (comme on pourroit le conclure des termes de M. Simpson), que cette force n'intéresse pas notre problème, mais c'est parce qu'elle est infiniment plus petite que la force  $VC$ , dont nous cherchons la valeur; cette quantité  $CH$  n'est que l'écart de la tangente pour un petit arc  $MC$  qui est supposé infiniment plus petit que  $RM$  ou  $NV$ ; donc  $CH$  est un infiniment petit du troisième ordre, tandis que la force  $VC$  que nous cherchons est un infiniment petit du second ordre. Cela me paroît suffisant pour répondre à une des objections que M. le Chevalier d'Arcy a faites contre la solution de M. Simpson.

3544. Supposons que les triangles plans  $DRN$ ,  $GMC$  soient perpendiculaires à la commune section  $ADOB$ , & que  $RN$  soit perpendiculaire à  $DR$ , &  $MC$  perpendiculaire à  $GM$ , rencontrant en  $C$  le plan du cercle  $ANHB$ , ou la ligne  $GH$  prolongée en  $C$ ; on tirera  $NV$  parallèle à la tangente  $RM$ , & elle rencontrera  $MC$  en  $V$ . Supposons que

que  $RM$  exprime la vitesse du corps dans la circonférence  $ARF$ , la vitesse qu'il a reçue par le seul mouvement du cercle  $ARF$  feroit  $RN$ , car le corps  $R$  se trouveroit en  $N$  en vertu de ce mouvement; & terminant le parallélogramme  $RMVN$ , le point  $V$  est celui où le corps animé de sa vitesse  $RM$ , & de la vitesse  $RN$  du plan de l'équateur, arriveroit, s'il étoit libre, dans le même temps qu'il met à parcourir  $RM$ ; dans ce cas il s'écarteroit du plan de ce cercle de la quantité  $CV$ ; ainsi pour que le corps  $R$  reste dans le plan du cercle  $ANH$ , il faut une force capable de contrebalancer cette vitesse  $CV$ , ou de faire parcourir  $CV$ ; cette force varie continuellement, parce que la vitesse  $RN$  du plan de l'équateur est différente à chaque point; la force que nous cherchons est la plus grande quand le corps est en  $A$ , car lorsqu'il décrit  $AX$ , il n'a reçu en  $A$  aucune vitesse du plan, & il a besoin d'une force exprimée par  $XY$  pour pouvoir rester dans l'équateur. On néglige encore ici la différence entre la vitesse  $AX$  & la vitesse  $AY$ , parce que  $XY$  n'étant qu'un infiniment petit du second ordre, la différence entre  $AX$  &  $AY$  n'est qu'un infiniment petit du troisième.

3545. Pour trouver une force capable de retenir continuellement le corps dans le plan du cercle mobile  $AR$ , il faut trouver la force capable de lui faire parcourir  $CV$  dans le même temps; il faut donc que cette force soit à la force centrifuge, comme  $CV$  est à  $ET$ , qui est l'espace que feroit parcourir la force centrifuge; car les espaces décrits dans un même temps, sont comme les forces accélératrices en vertu desquelles ils sont décrits (3368).

3546. La vitesse du mouvement diurne  $RM$  étant prise pour unité, nous avons appelé  $r$  le mouvement angulaire de l'axe ou du plan de l'équateur; ainsi  $r \cdot RM$  fera la vitesse  $ZF$  du plan de l'équateur en  $F$ , c'est-à-dire, la vitesse d'un point  $F$ , &  $r \cdot RM \frac{DR}{OF}$  fera la vitesse  $RN$  du point  $R$ , puisque  $ZF : RN :: \sin. AF : \sin. AR :: OF : DR$  (892).

A cause des triangles semblables  $DRN$ ,  $GMC$ , on  
Tome III. Iiii

## 618 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

Fig. 302. aura  $DR : RN :: GM : MC$ , ou  $DR : r \cdot \frac{RM \cdot DR}{OF} :: DR + SM : MC$ ; donc  $MC = r \cdot \frac{RM \cdot DR}{OF} + r \cdot \frac{RM \cdot SM}{OF}$ ; nous en retrancherons  $MI' = RN = r \cdot \frac{RM \cdot DR}{OF}$ , & il restera  $CV = r \cdot \frac{RM \cdot SM}{OF}$ . La force centrifuge du corps qui se meut

dans la circonférence  $ARF$ , est égale à  $\frac{RM^2}{2 \cdot OF}$  (3321); donc  $CV$  est à l'effet de la force centrifuge, comme  $r \cdot SM : \frac{1}{2} RM :: 2r \cdot SM : RM$ ; mais  $OD : OA :: SM : RM$  (3307); donc  $CV$  est à l'effet de la force centrifuge ::  $2r \cdot OD : OA$ . Ainsi pour que le corps  $A$  demeure constamment dans le plan de l'équateur, quand l'équateur tournera autour du diamètre  $AB$ , il faut qu'il y ait une force perpendiculaire au plan de l'équateur, qui varie comme la distance au plan dans lequel se fait le mouvement de l'axe, c'est-à-dire, au plan qui passe par  $OF$  perpendiculairement à la figure & au cercle  $AFB$ , ou si l'on veut, une force qui varie comme le sinus de la distance  $RF$ , ou le cosinus de la distance  $AR$  au diamètre  $AB$ , & qui dans le point  $A$  où elle est la plus grande, soit égale à la force centrifuge  $\beta$  multipliée par  $2r$ . C'est ce qu'il falloit trouver.

Force pour  
un corpuscule  
dans l'équa-  
teur.

Cette force proportionnelle à la distance de chaque particule à une ligne  $OF$ , ou à un plan qui passe par  $OF$ , perpendiculaire à la ligne des centres du soleil & de la terre, est de même espèce que celle dont chaque particule de la terre est attirée par le soleil (3531).

Cette force est nulle quand le corps est en  $F$ ; car on voit bien qu'alors  $RN$  est parallèle & égale à  $CM$ , la différence  $CV$  s'évanouit; la seule vitesse du plan de l'équateur autour de son diamètre  $AB$ , qui est commune au corps  $R$ , suffira pour qu'il reste dans le plan de l'équateur.

3547. On néglige ici la petite différence qu'il y a entre la vitesse réelle du corps  $R$ , & sa vitesse, supposée uniforme, dans le plan  $ARF$ ; il est bien vrai que la vitesse réelle de  $R$  en  $C$  n'est pas rigoureusement uniforme, si la vitesse est supposée uniforme dans le plan  $ARF$ , mais la



différence est infiniment plus petite que la force  $CV$ , Fig. 301.  
car puisque l'angle  $RAN$  est supposé infiniment petit,  
 $RN$  est infiniment petite par rapport à la vitesse de rotation  
 $RM$ ; si l'on conçoit une ligne de  $N$  en  $C$ , elle fera un an-  
gle infiniment petit avec  $NV$ ; donc la différence de  $NV$   
à  $NC$  fera infiniment plus petite que  $CV$  (3351); donc  
si  $CV$  est un infiniment petit du second ordre, la diffé-  
rence que l'on néglige ici sera un infiniment petit du troi-  
sième. Cela suffit, ce me semble, pour répondre à l'ob-  
jection de M. le Chevalier d'Arcy (*Mém. acad.* 1759).

3548. Cette force nécessaire pour un seul corpuscule  
qui tourneroit dans la circonférence de l'équateur, nous  
fera trouver ce qui doit arriver dans un plus grand nom-  
bre de corpuscules qui formeroient un anneau continu  
 $AFB$  dans le plan de l'équateur, & même dans le cas où  
il y auroit des anneaux concentriques, tels que  $GIK$ ,  
qui tourneroient également au dedans de l'équateur; &  
nous allons démontrer que la même force, avec la même  
loi, aura toujours lieu, & suffira pour conserver l'équi-  
libre & le mouvement  $r$  dans un sphéroïde qui seroit  
entièrement fluide.

Soit  $\beta$  la force centrifuge d'un corpuscule placé dans  
l'anneau extérieur  $ARFB$ ; celle d'un corpuscule  $I$  placé  
dans un anneau intérieur  $GIK$ , mais toujours dans le plan  
de l'équateur, sera  $\beta \frac{OI}{OF}$ , c'est-à-dire, proportionnelle au  
rayon de l'anneau ou du cercle qu'il décrit (3394);  
ainsi la force nécessaire pour retenir le corpuscule  $I$  sera  
 $2r\beta \frac{OI}{OF}$  au point  $I$ .

3549. Si l'on veut considérer un corpuscule placé A une distan-  
ce quelcon-  
que de l'équa-  
teur.  
sous une autre latitude, par exemple, à une distance de  
l'équateur qui seroit égale à  $GL$ , on trouvera que cette  
force diminue comme le cosinus de la latitude, aussi  
bien que la force centrifuge (3394); car si l'on conçoit  
le plan du cercle  $GLIK$  relevé perpendiculairement au  
plan de la figure, de manière que  $I$  soit le pôle du petit  
anneau, dont le diamètre est  $GK$ ,  $QO$  sera égale au  
I i i i j

*fig. 302.* rayon du parallèle décrit par le point  $L$  ; donc la force centrifuge qui sous l'équateur ou en  $G$  étoit  $\beta \cdot \frac{OI}{OF}$ , fera  $\beta \cdot \frac{OI}{OF} \cdot \frac{OO}{OI}$ , ou  $\beta \cdot \frac{OO}{OF}$  ; donc la force nécessaire pour retenir le corpuscule dans la circonférence de son parallèle, au lieu d'être  $2r\beta \cdot \frac{OI}{OF}$ , fera  $2r\beta \cdot \frac{OI}{OF} \cdot \frac{OO}{OI} = \frac{2r\beta \cdot OO}{OF}$ . Or dans cette expression il n'y a que  $OQ$  de variable ; ainsi la force nécessaire pour retenir chaque corpuscule de la terre dans son cercle ou dans son anneau, à une distance quelconque de l'équateur, fera encore proportionnelle à la distance  $OQ$  du corpuscule par rapport au diamètre  $OF$ , ou au plan qui passe par  $OF$  perpendiculairement à la figure, comme dans l'article 3546, où le corps tournoit dans l'équateur.

*fig. 303.* 3550. Soit un cercle  $GEHF$  (*fig. 303*), ou un parallèle à l'équateur, considéré comme composé d'une infinité d'anneaux concentriques, qu'on suppose tourner uniformément autour du centre  $C$ , & de l'axe  $PCOB$  par le mouvement diurne, avec une vitesse égale à l'unité sous l'équateur, tandis que le centre  $C$  lui-même & la ligne droite  $OC$  qui est l'axe du cône  $GOH$ , tournent uniformément dans le plan du méridien ou dans la circonférence du cercle  $PQB$ , avec une vitesse angulaire  $= r$  ; les forces nécessaires pour retenir les particules du cercle  $GEHF$  dans leur plan, pendant ce mouvement composé, seront les mêmes que si le cercle  $GEH$  tournoit autour de son diamètre  $EF$  perpendiculaire au plan  $PQB$  de la figure, & qu'on supposât ce diamètre immobile avec son centre  $C$ , & la vitesse angulaire du cercle  $GEH$ , c'est-à-dire, la vitesse des points  $G$  &  $H$  égale à celle qu'avoit auparavant le centre  $C$  autour du point  $O$  ; en effet l'angle  $OCG$  étant toujours droit, le point  $G$  décrira l'arc  $GQ$ , & le point  $C$  un autre arc concentrique & semblable à  $GQ$ , le point  $G$  vu du centre  $C$  aura le même mouvement angulaire que les points  $G$  &  $C$  vus du centre  $C$  ; si le point  $G$  parcourt un degré du cercle  $GQ$ , la position de la ligne  $CG$  qui fait avec  $OG$  un angle constant changera aussi d'un

dégré, donc la rotation autour de  $C$  aura été d'un degré ; or, c'est ce mouvement angulaire autour du centre  $C$ , & du diamètre  $ECF$  qui exige une force capable de retenir le corpuscule dans le plan de son cercle ; car le mouvement qui seroit commun au centre & à toutes les parties de la circonférence ne changeroit rien au mouvement du corpuscule dans son cercle ; donc le mouvement angulaire du point  $G$  autour de son centre  $C$ , dans la nouvelle hypothèse étant le même que lorsque le centre  $C$  étoit immobile, la force nécessaire pour y retenir le corpuscule  $G$  sera encore la même ; il est donc certain que les forces parallèles à  $PCO$ , ou perpendiculaires au plan du cercle  $GE$ , qui sont nécessaires pour retenir les particules dans le plan  $EGFH$ , seront toujours comme les distances au diamètre  $GH$  ou au plan  $PHBQ$ , dans lequel se fait le mouvement de l'axe (3546), ainsi que dans le cas de l'article 3548, quelle que soit la distance du cercle  $GEHF$  au centre  $O$ , c'est-à-dire, quelle que soit la latitude du parallèle terrestre  $GEHF$ . Nous pouvons donc supposer que toutes les parties de la terre sont sollicitées par une force parallèle à l'axe, qui sous l'équateur est  $2r\beta$  dans les extrémités du diamètre autour duquel tourne l'équateur, & qui est toujours proportionnelle à la distance de chaque particule au plan d'un méridien perpendiculaire à ce même diamètre.

3551. Concevons un fluide homogène tournant uniformément autour de l'axe  $PB$ , sous la forme d'un sphéroïde aplati,  $QR$  étant le diamètre de l'équateur, tandis que l'axe lui-même tournera de la manière expliquée ci-dessus (3543) par un mouvement très-lent de  $P$  en  $Q$ , supposé  $=r$  ; on comprend, par ce qui a été dit ci-dessus, que les particules du fluide, pour rester en équilibre chacune dans le plan de leur parallèle, doivent être sollicitées parallèlement à l'axe, ou perpendiculairement à l'équateur par des forces qui soient comme les distances au plan du méridien  $PRBQ$ , & il faut que la force soit  $2r\beta$  dans le point  $A$  de l'équateur  $QAR$ , qui est situé sur le diamètre  $OA$ , autour duquel se fait le petit mouvement de l'équateur.

La même chose a lieu pour un fluide.

## 622 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

Voyons quelle est la force totale qui en résulte, afin de pouvoir comparer cette force avec celle du soleil, dont nous avons trouvé l'expression (3541).

Force totale  
dans le sphé-  
roïde.

Fig. 304.

3552. THÉORÈME. Si toutes les particules d'un sphéroïde EPQO (fig. 304) sont sollicitées par des forces parallèles à l'axe PO, proportionnelles à la distance de chaque partie au plan qui passe par PO, ou à un méridien, comme nous avons trouvé que cela doit arriver pour que l'équateur se meuve du nord au sud d'une quantité  $x$  (3551); & si les deux moitiés PEO, PQO du sphéroïde sont sollicitées également & en sens contraire, la somme de toutes ces forces, ou l'énergie de la force totale employée à faire tourner le sphéroïde autour de son centre, sera LA CINQUIÈME partie de celle qui auroit lieu, si toutes les parties du sphéroïde étoient réunies à la distance CQ du rayon de l'équateur.

DÉMONSTRATION. Soit le demi-diamètre CQ de l'équateur  $= a$ ; la surface de l'ellipse OEPQ  $= A$ ; soit  $\gamma$  la force qui agit sur une particule située à la distance CQ, ou la force que nous avons trouvée égale à  $2r\beta$  (3546); la distance CM d'une section parallèle au méridien  $= x$ ; cette section, dont LN est le diamètre, sera aussi une ellipse semblable au méridien OEPQ (3283), mais nous aurons, par la propriété de l'ellipse,  $CP^2 : LM^2 :: aa : aa - xx$ ; donc la section sur PO étant égale à  $A$ , la section sur LN sera  $A \frac{aa - xx}{aa}$ , parce que les figures semblables sont comme les carrés de leurs côtés omologues; ainsi la somme de toutes les forces qui agissent sur la petite ellipse, dont LN est le petit axe, sera  $A \cdot \frac{aa - xx}{aa}$ .

$\frac{x}{a} \gamma$ , puisque par l'hypothèse la force en M est à la force  $\gamma$  qui a lieu en Q, comme  $x$  est à  $a$ . Cette force qui agit sur toute l'ellipse LN, doit encore être multipliée par le bras de levier CM, ou par la distance au centre, ainsi que nous l'avons fait en exprimant la force du soleil (3534), parce qu'elle a d'autant plus d'effet pour faire tourner le sphéroïde qu'elle agit plus loin du centre, & l'on aura  $A_2$ .

$\frac{aa - xx}{aa} \cdot \frac{xx}{a}$  pour la force avec laquelle cette section elliptique tend à faire tourner le sphéroïde. Si l'on imagine une autre section infiniment proche  $lmn$ , & qu'on multiplie la force trouvée par  $Nm = dx$ , on aura la force totale sur  $LNnl$ , dont on prendra l'intégrale (3300); on fera  $x=a$  pour avoir l'effet sur le demi-sphéroïde  $PQO$ , & le double fera l'effet total, qu'on trouvera  $\frac{4}{15} aa A\gamma$ . La masse du sphéroïde que j'appelle  $S$  est égale à  $\frac{4}{3} a A$  (3331), donc  $\frac{4}{15} aa A\gamma$  qui est la même chose que  $\frac{4}{3} a A \cdot \frac{1}{5} a\gamma$  est aussi égale à  $\frac{1}{5} a\gamma S$ ; or si la masse toute entière  $S$  étoit à la distance  $a$ , la force seroit  $a\gamma S$ , donc la force sur le sphéroïde est un  $\frac{1}{5}$  de celle que la même masse éprouveroit si elle étoit toute au point  $Q$ ; & c'est  $C. Q. F. D.$  Cette force  $\frac{a\gamma S}{5}$  ou  $\frac{2r\beta a S}{5}$ , (parce que  $\gamma = 2r\beta$ ), est donc celle qui est nécessaire pour produire sur l'axe du sphéroïde ou sur le plan de l'équateur, un mouvement angulaire égal à  $r$  du nord au sud.

3553. Ainsi les particules du sphéroïde resteront dans leur ordre naturel en suivant les deux mouvemens dont il s'agit, si la force totale qui produit le mouvement  $r$  de l'axe, & que j'appellerai  $F$ , est égale à  $\frac{2r\beta a S}{5}$ ; donc  $F = \frac{2r\beta a S}{5}$ , & par conséquent le mouvement de l'axe, ou la

valeur de  $r = \frac{F}{\frac{2}{5}\beta a S}$ ; c'est-à-dire, que la force totale, employée par le soleil dans la direction de la ligne des centres pour faire tourner le sphéroïde, étant divisée par  $\frac{2}{5}\beta a S$ , donnera le mouvement de l'axe.

3554. Ce théorème revient à celui de M. Euler (*Mém. de Berlin*, 1749. *T. v.*) que si dans un temps  $dt$  l'angle de rotation est  $ds$  & la force  $F$ , on aura pour le changement de l'axe de rotation  $\frac{F dt^2}{2 ds}$ , divisé par  $\frac{2}{5} Saa$  qui est le moment d'inertie ou de rotation du sphéroïde, c'est-à-dire, la somme des produits de chaque particule par le carré de la distance à l'axe. M. Euler n'en donna pas la démonstration; mais il se propose de traiter cette matière

beaucoup plus généralement par une méthode toute différente, au moyen des axes principaux de rotation ; cette méthode sera expliquée fort au long dans le 3<sup>e</sup> volume de la Mécanique qu'il prépare en 1771.

3555. Il est donc démontré qu'une force totale  $\frac{2}{5} ar \beta S$  exercée sur le sphéroïde entier, est capable de produire le mouvement  $r$  dans le plan de l'équateur du nord au sud ; or nous avons vu que le soleil exerce sur tout le sphéroïde une force totale  $\frac{3\beta}{5} \frac{r}{a^2} (aa - bb) \frac{mn}{a} S$  (3541) pour le faire tourner du nord au sud ; donc en faisant cette proportion ; la force  $\frac{2}{5} ar \beta S$  est au mouvement  $r$  qui en résulte, comme la force réelle du soleil est à un 4<sup>e</sup> terme, on aura le mouvement qui doit résulter de celle-ci  $= \frac{1}{2} \frac{r}{T^2} \cdot \frac{mn}{a^2} (aa - bb)$  ; c'est donc là le petit angle que l'axe de la terre décrit en un instant infiniment petit, le mouvement diurne de rotation étant pris pour unité.

Mouvement  
angulaire de  
l'axe.

Fig. 305.

Ce n'est pas dans le point où agit le soleil sur l'équateur que l'effet se manifeste, c'est à 90° de-là ; je suppose que dans un instant donné l'action du soleil tende à déplacer le point  $E$  de l'équateur (fig. 305) d'une quantité  $DE = r$ , tandis que le point  $E$ , par la rotation ordinaire, a décrit l'arc  $AE$ , il en résultera un mouvement composé  $AD$  ; l'équateur  $AEB$  prendra la situation  $ADC$  & s'écartera de la quantité  $CB$  ; ainsi l'écart est le plus grand à 90° du point  $A$ , où s'exerce la force perturbatrice.

3556. Le petit angle  $\frac{3}{2} \frac{r}{T^2} \frac{mn}{a^2} (aa - bb)$ , dont l'axe de la terre est détourné de sa situation par la force du soleil, à un instant donné, est le même que l'angle de l'équateur avec l'équateur moyen ; mais cet angle différentiel est plus ou moins grand, dans différens temps, à cause du changement de la déclinaison du soleil, ou de  $m$  &  $n$  ; il faut savoir ce qui en résulte après un temps fini, afin d'avoir la précession des équinoxes pour trois mois, ou pour le temps après lequel  $m$  &  $n$  se rétablissent, d'où nous la conclurons pour tout autre temps. Soit  $ESL$  (fig. 307), l'écliptique, &  $EAC$  l'équateur,  $BAD$  la position

Fig. 307.

position nouvelle que prend l'équateur par l'action du soleil, faisant l'angle  $BAE$  avec sa situation précédente, au moment où nous l'avons considéré, c'est-à-dire, le soleil étant au point  $S$  de l'écliptique, avec une déclinaison  $AS$ ; mettons  $k$  à la place de  $\frac{aa-bb}{aa}$  dans la valeur de

Fig. 307.

l'angle  $A$ , l'on aura  $\frac{3}{2} \frac{t^2}{T} kmn$  égal à l'angle  $BAE$  (3555).

Dans le triangle sphérique  $BAE$ , dont l'angle  $A$  est infiniment petit, on a cette proportion;  $\sin. B : \sin. EA :: \sin. A : \sin. BE$ , ou  $:: A : BE$  (892); donc  $BE$  qui est la rétrocession du point équinoxial  $B$  le long de l'écliptique

$BESL$ , dans un instant infiniment petit, sera  $= \frac{A \cdot \sin. EA}{\sin. B} =$

$\frac{3}{2} \frac{t^2}{T} kmn \frac{\sin. asc. dr.}{\sin. 23^{\circ} \frac{1}{2}}$ , parce que le point  $A$  est celui où répond

Différentielle  
de la préces-  
sion

le soleil pour le temps où l'on a calculé le petit mouvement de l'équateur, c'est-à-dire, où le sinus de la déclinaison du soleil étoit  $m$ . Cette valeur de  $BE$  est donc la différentielle de la précession des équinoxes; nous la mettrons ensuite sous une forme plus commode.

3557. L'équateur  $EAC$  qui prend la situation  $BAD$ , se trouve moins éloigné de l'écliptique sur le colure des solstices  $LDC$ , ou à  $90^{\circ}$  du point équinoxial  $E$ ; la différence  $CD$ , ou  $SR$  (fig. 308) est le petit changement de l'obliquité de l'écliptique, ou la nutation qui résulte de ce mouvement de l'équateur; car  $SR$  est la valeur de l'excès de l'angle  $\gamma$  sur l'angle  $A$ , or le changement des positions célestes ne peut dépendre que de la position de l'équinoxe  $A$  duquel on les compte, & de l'angle  $A$  que forme l'écliptique avec l'équateur; ce n'est pas  $IK$  mesure de l'angle  $D$  qui est la différence de ces angles  $\gamma$  &  $A$ , c'est  $SR$ ;  $IK$  est la différence des déclinaisons  $IL$  &  $KL$ , mais ces déclinaisons ne sont pas à égales distances de l'équinoxe, car l'une répond à la longitude  $\gamma$   $L$ , & l'autre à la longitude  $AL$ , donc  $IK$  n'est jamais une quantité dont on ait besoin dans nos calculs; mais on emploie  $SR$ , différence entre l'angle  $\gamma$  & l'angle  $A$ , combinée avec

Fig. 308.

Nutation.

la différence  $\gamma A$  qui a lieu dans la position du point équinoxial.

Quand je dis que  $SR$  est la différence entre l'angle  $\gamma$  & l'angle  $A$ , je suppose  $RL$  est égal à  $rl$ , mais cela est vrai en  $R$  ou à  $90^\circ$  du point  $A$ , où l'arc  $Rr$  est sensiblement parallèle à  $LL$ .

Fig. 307.

Pour trouver la valeur de la nutation  $CD$  (fig. 307), on observera que dans le triangle  $CAD$ ,  $R: \sin. AC$  ou  $\cos. AE :: \sin. A : \sin. CD :: A : CD$ ; donc la nutation  $CD = A. \cos. AE = \frac{3t^2}{2T^2} kmn \cos. AE$ ; il y faut introduire la longitude du soleil pour l'avoir sous une forme plus astronomique.

3558. Dans le triangle sphérique  $EAS$  rectangle en  $S$ , la déclinaison du soleil  $= AS$ ; son ascension droite  $= EA$ , sa longitude  $= ES$ , on a donc  $\sin. AS = \sin. ES. \sin. E = px$  (3665);  $\cos. ES = \cos. AE \cos. AS = y$  (3670); donc  $\sin. \text{déclin.} \cos. \text{déclin.} \cos. AE = fxy$ ;

Longitude $ES = z$
$\sin. \text{longit. ou fin. } ES = x$
$\cos. \text{longit.} = y$
$\sin. 23^\circ \frac{1}{2}, \text{ ou fin. } AES = p$
$\cos. 23^\circ \frac{1}{2} = q$
$\cos. \text{longit.} = y = \sqrt{1 - xx}$

Différentielle  
de la nutation.

donc  $mn. \cos. \text{asc. dr.} = pxy$ ; ainsi la différentielle de la nutation, c'est-à-dire, le petit arc  $CD$  fera  $\frac{3t^2}{2T^2} kpxy$ .

3559. Puisque cet angle est une fraction du mouvement diurne qui a été supposé égal à 1, il n'y a qu'à le multiplier par  $366 \frac{1}{4}$ , ou  $\frac{T}{t} (3356)$ , & ce fera la même fraction du mouvement annuel, qui fera  $\frac{3t}{2T} kpxy$ ; ainsi multipliant par cette quantité une partie quelconque du mouvement annuel, tel que le petit arc  $dz$  de l'écliptique décrit en un temps infiniment petit par le soleil; on aura le mouvement de précession pour le même temps; enfin écrivant pour  $y$  sa valeur  $\sqrt{1 - xx}$ , & à la place de  $dz$  sa valeur  $\frac{dx}{\sqrt{1 - xx}}$  (3323), l'on aura la différentielle de la nutation pour le moment actuel  $\frac{3t}{2T} kpx dx$ ,

Nutation  
totale.



dont l'intégrale  $\frac{3}{4} k p x^2$  est la nutation totale pour l'espace de temps que le soleil a employé à parcourir un arc  $z$  de l'écliptique.

3560. Il faut trouver aussi la précession des équinoxes, ou la quantité totale de  $BE$  pour un temps fini; on fera ces deux proportions (892),  $ER : CD :: \sin. EA : \sin. CA$  ou  $\cos. EA$  (892) ::  $\tan. EA : 1$ , &  $EB : ER :: 1 : \sin. B$ ; multipliant terme à terme,  $EB : CD :: \tan. EA : \sin. B$ ; mais  $\tan. EA = \cos. E. \tan. ES$  (3668) =  $\cos. E \frac{\sin. \text{long.}}{\cos. \text{long.}} = \frac{q x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; donc  $EB : CD :: \frac{q x}{\sqrt{1-x^2}} : p$ ; si

l'on met encore pour  $CD$  sa valeur  $\frac{3}{2} k p x dx$  (3559), on trouvera  $EB = \frac{3}{2} k \cdot \frac{q x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ; c'est la différentielle de

la précession, des équinoxes, entant qu'elle dépend du soleil. L'intégrale de  $\frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$  qui dépend de la quadrature

du cercle est  $\frac{z - x\sqrt{1-x^2}}{2}$  (3325); donc l'intégrale cher-

chée est  $\frac{3}{2} k \cdot \frac{q}{2} (z - x\sqrt{1-x^2})$ ; c'est la précession des équinoxes pour le temps que le soleil a employé à parcourir l'arc  $z$  de l'écliptique; la seconde partie de cette expression est une partie variable ou une inégalité de la précession, qui n'est que d'une seconde; ainsi nous la négligerons totalement.

3561. La partie  $\frac{3}{4} k q z$  de cette valeur, est la plus importante; on voit qu'elle va toujours en croissant, ce qui prouve que la précession des équinoxes augmente continuellement, comme la longitude  $z$  du soleil; pour en trouver la valeur numérique on considérera qu'au bout de trois mois on a  $z = 90^\circ = 324000''$ ;  $x = 1$ ; on a aussi  $q = \cos. 23^\circ 28' = 0,917$ ;  $t = 1$  jour;  $T = 365\frac{1}{4}$ , 256;  $k = \frac{aa-bb}{aa} = \frac{1}{115}$ , ou à peu-près le double de l'aplatissement de la terre; en employant tous ces nombres on aura  $\frac{3}{4} k q z = 5'' 28$ ; c'est la précession moyenne pour trois

Précession  
des équinoxes.

Précession annuelle 21". mois; ainsi le quadruple  $21'' 12$  sera la précession moyenne annuelle des équinoxes produite par l'action du soleil, en supposant la terre homogène, & l'aplatissement  $\frac{1}{13}$ . Nous verrons bientôt que suivant les observations cette quantité ne surpasse pas  $16''$  (3575).

Erreur de Newton.

3562. M. d'Alembert trouve par sa théorie cette précession de  $23''$  environ (*Recherches*, &c. pag. 159). M. Euler trouve aussi environ  $22''$ ; mais Newton ne trouve que  $9''$ , & M. le Chevalier d'Arcy  $10'' \frac{1}{3}$ , (*Mém.* 1759, pag. 421). Après l'examen le plus détaillé, je me suis convaincu que Newton s'est trompé de moitié, comme M. Simpson l'a fait voir, c'est-à-dire, que la méthode même de Newton devoit donner environ  $21''$ ; & si cette quantité est plus grande d'un tiers que ne l'indiquent les observations (3576), cela vient probablement de ce que la terre n'est pas homogène, comme nous l'avons supposé, ou que le rapport des forces du soleil & de la lune n'est pas bien connu. On peut voir à ce sujet les auteurs cités (3526); ces discussions sont trop longues pour trouver place ici; je passe à la précession & à la nutation que la lune doit produire, en agissant de la même manière que le soleil (3528) sur chaque partie de la terre.

De la précession lunaire.

3563. LA LUNE, en agissant sur le sphéroïde, tout ainsi que le soleil, y produit un mouvement semblable: la précession produite par le moyen de la lune, se déduira facilement de celle du soleil; mais il faudra faire entrer dans ce calcul la situation des nœuds de la lune, ce qui exigera une opération trigonométrique de plus, parce que la déclinaison dont le sinus & le cosinus entrent dans les formules précédentes renferme le lieu du nœud, quand il s'agit de la lune, dont l'obliquité n'est pas constante sur l'équateur comme celle de l'écliptique.

fig. 308.

Soit  $\gamma B$  (fig. 308) l'écliptique supposée immobile;  $\gamma ED \cong FI$  l'équateur dans sa première situation,  $AGRDEH$  l'équateur altéré par l'action de la lune dans un instant infiniment petit;  $FGNFH$  l'orbite de la lune, dont le nœud est au point  $N$  de l'écliptique, l'angle  $N$  étant de  $5^\circ 8' 46''$  (1500); c'est l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire.

3564. L'action du soleil produit chaque année  $21''$  de précession (3561), en supposant la terre homogène, cela se réduit à  $14''\frac{1}{2}$ , suivant les observations, comme nous le ferons bientôt remarquer (3576); ainsi la lune dont la masse est 2 fois  $\frac{1}{2}$  celle du soleil (3412) en produira deux fois & demi autant, toutes choses égales; mais supposons en général la force égale à  $m$ , la précession solaire  $= p$ , & la durée d'un mois  $= t$ , alors la précession causée par la lune dans un mois sera  $\frac{m p t}{T}$ , c'est-à-dire,

Longit. $\Omega = \gamma N = z$
Sin. $\gamma N = x$
Cof. $\gamma N = y$
Sin. $\gamma = 23^{\circ}\frac{1}{2} = a$
Cof. $\gamma = 23^{\circ}\frac{1}{2} = b$
Sin. $N = 5^{\circ} 9' = c$
Cofin. $N = 5^{\circ} 9' = d$
Circonf. $= 6, 28 = e$
Force $\mathbb{C} = 2\frac{1}{2} = m$
Précess. $14''\frac{1}{2} = p$
Révol. $\mathbb{C} 271 = t$
Année $= 365 = T$
18 ans $= n$

en raison de sa force, & du temps pendant lequel elle agit, & cela sur l'orbite de la lune, & en supposant que l'inclinaison de cette orbite sur l'équateur soit toujours la même que l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, c'est-à-dire, que l'angle  $E$  soit de  $23^{\circ}\frac{1}{2}$ , comme l'angle  $\gamma$ . Mais si l'angle d'inclinaison est plus petit, que  $23^{\circ}\frac{1}{2}$ , la précession devient plus grande dans le rapport des cosinus, car dans l'expression de l'article 3561 on auroit au lieu de  $q$ , ou du cosinus de  $23^{\circ}\frac{1}{2}$ , un autre cof. qui seroit celui de l'angle  $E$ ; donc il faut diviser l'expression par  $q$ , & ensuite la multiplier par le cosinus de l'angle  $E$ ; alors la précession  $EG$  mesurée sur l'orbite de la lune, pendant une révolution de la lune, ou pendant un mois sera  $\frac{m p t}{T} \cdot \frac{\text{cof. } E}{\text{cof. } 23^{\circ}\frac{1}{2}}$  sur l'orbite de la lune.

Effet de l'inclinaison de la lune.

3565. Pour rapporter cette quantité à l'écliptique,  $\gamma A$  sur laquelle on a coutume de compter la précession, l'on observera que l'inclinaison de l'axe de la terre ou de l'équateur terrestre doit se trouver la même à chaque demi-révolution du soleil ou de la lune, c'est-à-dire, à leur passage dans l'équateur; en effet la somme de tous les petits changemens de l'axe, qui arrivent par l'action de la lune, recommence à chaque révolution; & supposant le nœud  $N$  immobile pendant un mois; la lune dans

*Fig. 308.* une demi-révolution de *H* en *G* a nécessairement produit la plus grande différence qu'il puisse y avoir dans la position de l'équateur ; donc le point *D*, qui tient le milieu entre les points *G* & *H* où l'orbite de la lune coupe l'équateur, est celui où l'équateur mobile coupe l'équateur primitif ; ainsi  $DE=DF=90^\circ$  ; mais *S* étant le point solsticial  $\gamma S$  est aussi  $=90^\circ$ , en sorte que  $DS=\gamma E$ . Dans le triangle *DEG* l'on a cette proportion,  $\sin. ED$  ou *R* :  $\sin. G :: \sin. EG : \sin. D$ , ou  $:: EG : D$  ; donc le petit angle  $D=EG$ .  $\sin. G=EG$ .  $\sin. E$ . Dans le triangle sphérique  $\gamma DA$  l'on a aussi cette proportion,  $\sin. A : \sin. \gamma D$  (ou  $\cos. \gamma E$ ) ::  $\sin. D : \sin. \gamma A$  ou  $:: D : \gamma A$  ; donc on a  $\gamma A = \frac{D. \cos. \gamma E}{\sin. A} = \frac{EG. \sin. E. \cos. \gamma E}{\sin. 23^\circ} = \frac{m p t}{T}$ .

Différentielle  
de la préces-  
sion causée par  
la lune.

$\frac{\sin. E. \cos. E. \cos. \gamma E}{\sin. \gamma. \cos. \gamma}$  ; c'est la valeur de la précession causée par la lune dans le petit espace d'un mois, mesurée le long de l'écliptique ; elle doit varier d'un mois à l'autre à cause du changement de l'angle *E*, ainsi nous ne considérerons la petite précession d'un mois que comme la différentielle de la précession totale de 18 ans ; nous en chercherons l'intégrale quand nous aurons trouvé celle de la nutation.

3566. On trouvera de même la valeur de la petite nutation *SR* pour le même intervalle de temps, ou la différentielle de la nutation, c'est-à-dire, la quantité dont l'équateur se trouve rapproché de l'écliptique, sur le colure des solstices *SRL*, dans l'espace d'un mois ; pour cela on fera cette proportion,  $R : \sin. DS :: D : RS$ , donc  $RS=D. \sin. DS=D. \sin. \gamma E$ , mais  $D=EG. \sin. E$ , donc  $RS=EG. \sin. E. \sin. \gamma E = \frac{m p t \cos. E}{T \cos. \gamma} \sin. E \sin. \gamma E$  ; il faut substituer dans cette expression l'inclinaison *N* qui est à peu-près constante, & la longitude  $\gamma N$  du nœud qui est à peu-près uniforme, en considérant que  $\sin. E. \sin. \gamma N :: \sin. N : \sin. \gamma E$  ; ainsi  $RS = \frac{m p t \sin. N. \sin. \gamma N \cos. E}{T \cos. \gamma}$ . On doit encore éliminer de cette expression l'angle *E*, parce que cet angle change par le mouvement des nœuds de la lune ; dans le triangle  $\gamma EN$  on a  $\cos. E = \cos. \gamma N$ .

fin.  $N$ . fin.  $\gamma$  — cof.  $N$ . cof.  $\gamma$  (3716, 3736) ou  $yc a - db$ ; & parce que l'angle  $E$  est obtus, la perpendiculaire tombera hors du triangle, le cosinus de  $E$  sera négatif, & l'on aura cof.  $E = bd - acy$ ; donc la petite nutation sera  $\frac{mp\gamma}{T} \cdot \frac{cx(bd - acy)}{b}$  le nœud étant supposé en  $N$ ; nous la considérerons comme une différentielle dont l'intégrale sera la nutation totale qui doit avoir lieu après que le nœud  $N$  aura fait le tour du ciel.

Différentielle  
de la nutation.

3567. Il faut exprimer cette différentielle de la nutation par le moyen de la différentielle de la longitude du nœud qui sera maintenant appelée  $dz$ ; pour cela je considère que la durée  $t$  d'une révolution de la lune est à la durée  $n$  d'une révolution entière du nœud, comme  $dz$  qui est le mouvement moyen du nœud en un mois, est à la circonférence entière du cercle que nous appel-

rons  $c$ ; donc  $t = \frac{ndz}{c} = \frac{ndx}{c\sqrt{1-xx}}$  (3323). Supposons  $T=1$ ,

enforte que  $n$  soit égal à 18,6 (1488), & substituons la valeur de  $t$  dans la différentielle de la nutation, en mettant  $\sqrt{1-xx}$  à la place de  $y$ , on aura  $mpn \cdot \frac{c}{eb}$

$(\frac{dbxdx}{\sqrt{1-xx}} - acxdx)$  dont l'intégrale (3298, 3300) est  $\frac{mpnc}{eb}$

$(-db\sqrt{1-xx} - \frac{acx^2}{2})$ ; or quand  $x=0$ , il faut que

la nutation soit nulle, puisque c'est du point équinoxial que nous comptons les mouvemens, & que c'est à ce point que commence l'action périodique de la lune; donc l'intégrale trouvée doit être  $=0$  quand  $x=0$ , cependant

$-db\sqrt{1-xx} - \frac{acx^2}{2}$  devient alors  $= -db$ , donc il

faut ajouter  $+db$  à l'intégrale trouvée (3305); & cette

intégrale complete sera  $\frac{mpnc}{eb} (bd - bd\sqrt{1-xx} - \frac{1}{2}$

$acxx = \frac{mpnc}{eb} (db \cdot \sin. \text{verse } z - \frac{1}{4} ac \cdot \sin. \text{verse } 2z)$ , parce

que le carré du sinus d'un arc est égal à la moitié du sinus verse du double de l'arc (3626). Telle est la nutation

Nutation  
entière,

entière, ou la diminution de l'obliquité de l'écliptique

Fig. 303.

causée par la lune depuis que le nœud étoit dans l'équinoxe du Bélier jusqu'au temps où il est arrivé en  $N$ ; cette expression se réduit à un nombre de secondes, puisque  $p$  est exprimée en secondes, étant égale à  $14'' \frac{1}{2}$ , suivant les observations (3576), & que toutes les autres quantités de l'expression précédente sont des fractions du rayon, même la quantité  $e$ , ou la circonférence du cercle égale à 6,41 (art. 3359).

3568. La différentielle de la précession  $\frac{mpt}{T} \cdot \frac{\sin.E \cdot \cos.E \cdot \cos.\gamma E}{\sin.\gamma \cdot \cos.\gamma}$  est à la différentielle de la nutation  $\frac{mpn}{T} \cdot \frac{\cos.E \cdot \sin.E \cdot \sin.\gamma E}{\cos.\gamma}$ , comme  $\frac{\cos.\gamma E}{\sin.\gamma}$  est à  $\sin.\gamma E$ , ou comme  $\cotang.\gamma E$  est à  $\sin.\gamma$ ; ainsi la différentielle de la nutation multipliée par  $\frac{\cot.\gamma E}{\sin.\gamma}$ , doit donner la différentielle de la précession; mais  $\cot.\gamma E = \frac{ad+bcx}{cx}$  (3731), donc  $\frac{\cot.\gamma E}{\sin.\gamma} = \frac{ad+bc\sqrt{1-xx}}{acx}$ ; ainsi multipliant cette quantité par la différentielle de la nutation  $= \frac{mpnc}{be} \left( \frac{dbx}{\sqrt{1-xx}} - acx \right) dx$ , on aura celle de la précession  $= \frac{mpn}{abe} \cdot \left( \frac{abd^2}{\sqrt{1-xx}} + (bb-aa)dc - abc^2 \sqrt{1-xx} \right) dx$ , dont l'intégrale, en nommant  $z$  l'arc dont  $x$  est le sinus, fera (3323, 3324)  $= \frac{mpn}{abe} (ad^2bz + (bb-aa)dcx - \frac{1}{2}abc^2z - \frac{1}{2}abc^2x\sqrt{1-xx})$  ou  $\frac{mpn}{abe} [(dd-\frac{1}{2}cc)abz + (bb-aa)dc \cdot \sin.z - \frac{1}{4}abcc \cdot \sin.2z]$  (3625). Telle est la valeur de la précession vraie causée par l'action de la lune, pendant le temps que le nœud emploie à parcourir l'arc  $z$ .

Précession  
entière.

3569. Il s'agit maintenant d'exprimer en nombres la nutation & la précession: lorsque le nœud de la lune a achevé une demi-révolution, l'on a  $z = 180^\circ$ ; mais le sinus verse de  $180^\circ$  est 2, & le sinus verse de  $2z$  ou de  $360^\circ = 0$ ; donc après une demi-révolution du nœud la nutation  $\frac{mpnc}{eb} (db \sin.v.z - \frac{1}{4}ac \sin.v.2z)$  (3567) devient

$\frac{m p n c}{e b} \cdot 2 b d$ , ou  $\frac{2 m p n c d}{e}$ ; cette quantité revient à  $19'' 2$ , quand on suppose  $2 \frac{1}{2}$  pour la force de la lune, ou  $m = 2 \frac{1}{2}$ ; car alors il faut supposer la précession solaire  $p = 14'' \frac{1}{2}$ ; pour que les deux ensemble fussent  $50'' 3$  qui est la précession observée; mais si l'on veut que la nutation soit de  $18''$ , & supposer rigoureusement exactes les observations de M. Bradley (2858), on supposera  $m = 2,09$ , &  $p = 16'' 28$ , alors on trouvera la nutation de 18 secondes, comme dans l'exemple ci-joint.

Log.	2...0,30103
2,09	...0,32015
16,28	...1,21184
18,613	...1,26982
Sin.	5°...8,95310
Cof.	5°...9,99824
6,28	...9,20192
<hr/>	
18'' 0...	1,25610

3570. Pour exprimer aussi en nombres la précession trouvée, on suppose que le nœud ait fait une demi-révolution; alors  $z = \frac{e}{2}$ ;  $\sin. z$  &  $\sin. 2z = 0$ ; donc les deux derniers termes de la valeur trouvée disparaissent, & la précession entière devient  $\frac{m p n}{2} (dd - \frac{1}{2} cc)$ , & parce que le carré d'un cosinus  $dd = 1 - cc$ , elle revient à  $\frac{m p n}{2} (1 - \frac{1}{2} cc)$ ; donc pendant une révolution entière des nœuds la précession fera double de cette quantité, ou  $m p n (1 - \frac{1}{2} cc)$ .

Précession  
en 18 ans.

3571. On voit par cette expression que la moyenne précession causée par la lune, est à la précession  $m p n$  qui auroit lieu si la lune tournoit dans l'écliptique (3564), comme  $1 - \frac{1}{2} cc$  est à 1, ou comme 0,9879 est à 1.

3572. En comparant les expressions (3569, 3570), on voit que la quantité de la nutation, qui est de  $18''$  suivant les calculs précédens, pendant neuf ans ou pendant une demi-révolution du nœud, est à la précession correspondante, comme  $\frac{4 c d}{e}$  est à  $1 - \frac{1}{2} cc$ , c'est-à-dire, comme 1 est à 17,35.

3573. L'inégalité ou l'équation de la précession, se trouvera en retranchant de la précession vraie pour un temps quelconque, la précession moyenne pour le même temps. Soit  $z$  la longitude du nœud pour un

certain espace de temps, la précession moyenne pendant une demi-révolution du nœud étant  $\frac{m p n}{2} (d d - \frac{1}{2} c c)$ , on aura pour le temps correspondant à l'arc  $z$ , la précession  $= \frac{z}{c} \cdot m p n (d d - \frac{1}{2} c c)$ ; cette précession moyenne retranchée de la vraie précession trouvée ci-devant (3568), donne pour différence ou pour équation  $\frac{m p n}{a b e} [(b b - a a) d c \sin. z - \frac{1}{4} a b c^2 \sin. 2 z]$ . Nous négligerons le second terme qui renferme le carré du sinus  $c$  d'un angle de  $5^\circ$ , & qui ne peut jamais produire qu'un quart de seconde; nous aurons donc pour la plus grande équation de la précession, le nœud étant dans le solstice, c'est-à-dire,  $\sin. z$  étant égal à 1,  $\frac{m p n c d}{a b e} (b b - a a)$ .

Equation de  
la précession.

Rapport de  
la précession  
à la nutation.

3574. Cette équation de la précession est à la nutation de  $18''$  ou  $\frac{2 m p n c d}{e} (3569)$ , comme  $b b - a a : 2 a b$ , comme

1 est à  $\frac{2 a b}{b b - a a}$  ou à la tangente du double de l'obliquité de l'écliptique (3633); cette règle qui suit de la théorie est conforme à l'hypothèse que j'ai suivie dans le calcul de la nutation (2874), & qui n'est que la construction de l'expression précédente. En effet si l'on suppose que  $PQ$  (fig. 242) soit à  $PB$  comme  $b b - a a$  est à  $b$ , ou comme le cosinus de  $46^\circ 56'$  est au cosinus de  $23^\circ 28'$  (3633), c'est-à-dire, comme 0,7444 est à 1, ou à peu près comme 3 est à 4, & qu'on prenne  $BPO$  égal à la longitude du nœud, le lieu du pôle fera en  $M$ ; or  $PQ : BV :: \frac{b b - a a}{2} : b$ , & tang.  $PEQ : \text{tang. } PQ :: PEQ : PQ :: R : \sin. 23^\circ :: 1 : a$ ; donc multipliant terme à terme,  $PEQ : BV :: \frac{b b - a a}{2} : a b :: b b - a a : 2 a b$ ; c'est la proportion qui doit être par la théorie précédente entre la plus grande précession, égale à l'angle  $BEQ$ , & la nutation totale de  $18''$ .

Fig. 242.

3575. Ainsi la théorie détermine le rapport entre la nutation observée en latitude, & l'inégalité de la précession des équinoxes, en sorte que nous pouvons déterminer celle-ci par le moyen de la première. Si nous suppo-



sons avec M. Bradley que la nutation est de  $18''$ , la plus grande équation de la précession fera  $16'' 8$ , la précession causée par le soleil fera  $16'' 3$  & celle de la lune  $33'' 7$ ; alors la force de la lune seroit 2,09, c'est-à-dire, un peu plus que le double de celle du soleil ( $3569$ ).

3576. Mais si la nutation observée étoit de  $19''$  on auroit  $17'' 8$  pour l'équation,  $14'' 5$  pour la précession solaire,  $35'' 5$  pour celle que cause la lune, &  $2\frac{1}{2}$  pour la force de la lune, ainsi que je l'ai supposé ( $3413$ ,  $3569$ ); cette quantité peut s'accorder avec les observations de M. Bradley, pourvu qu'on y suppose seulement  $1''$  d'erreur, ce qui est possible dans les observations, & par ce moyen l'on concilieroit les observations des marées avec celles de la nutation; c'est pourquoi j'ai supposé, dans le cours de cet ouvrage, que la force de la lune étoit deux fois & demie celle du soleil; on peut, par une espèce de milieu, ne la supposer que  $2\frac{1}{4}$ ; il en résultera toujours que la précession causée par le soleil n'est pas de  $21''$  comme par la théorie ( $3561$ ), mais de  $15\frac{1}{2}$ , & que la terre n'est pas homogène. Le degré d'aplatissement qu'on y observe, prouve aussi la même chose ( $3579$ ).

Force de la lune =  $2\frac{1}{2}$ .

3577. Les  $35''$  de précession moyenne, qui sont l'effet de la lune, seroient produites d'une manière aussi uniforme que celles du soleil ( $3560$ ) si la lune étoit toujours à la même déclinaison quand elle répond au même point de l'équateur; mais à cause du mouvement de ses nœuds ( $1487$ ), il arrive que dans ses différentes révolutions elle s'éloigne plus ou moins de l'équateur, & agit sur lui avec plus ou moins de force. Quand le nœud ascendant est dans le Bélier, le plus grand éloignement de la lune par rapport à l'équateur, va jusqu'à  $28^{\circ}\frac{1}{4}$ ; mais quand le nœud ascendant est dans la balance, neuf ans après, la lune ne s'éloigne jamais de l'équateur que de  $18^{\circ}\frac{1}{4}$  à chaque révolution; alors son attraction totale sur le sphéroïde, dans le cours d'une révolution, est beaucoup moindre, puisqu'on a vu qu'elle dépend du sinus  $m$  de la déclinaison ( $3539$ ); c'est pourquoi la précession

Idee générale de la nutation.

annuelle est si inégale dans l'espace de 18 ans, & la nutation si considérable.

3578. Ceux qui aiment à avoir des idées plus développées que ne les donne le calcul, verront avec plaisir l'explication élémentaire d'une singularité dont j'ai vu quelques personnes embarrassées, & dont on ne trouveroit pas l'explication dans les auteurs; cela fera comprendre sur-tout la manière dont l'attraction de la lune produit le changement de l'obliquité de l'écliptique. Lorsque le nœud ascendant est dans le Bélier, c'est alors que la lune s'éloigne le plus de l'équateur, & qu'elle a le plus d'action pour changer le plan de l'équateur, & par conséquent l'obliquité de l'éclipt. : soit  $\gamma G \simeq$  l'écliptique (fig. 306);  $\gamma M \simeq$  l'équateur;  $EG$  l'orbite de la lune; cette planète s'écarte beaucoup au nord de l'équateur quand son nœud ascendant  $G$  est dans le Bélier, alors la lune attire l'équateur terrestre de ce côté-là avec plus de force. Il semble qu'alors l'équateur  $EM$  devroit se rapprocher de l'écliptique  $EG$ ; c'est cependant alors même que l'angle est le plus grand, & que l'obliquité de l'écliptique, au lieu d'être de  $23^{\circ} 28' 0''$ , se trouve de  $23^{\circ} 28' 9''$ .

Effet qui paroît singulier.

Pour avoir le dénouement de cette difficulté, il faut se rappeler que ce n'est pas au point où agit la lune sur l'équateur terrestre que se fait le plus fort déplacement de l'équateur, mais à  $90^{\circ}$  plus loin (3555). Ainsi quand la lune; en parcourant  $LA$  (fig. 309), agit le plus sur l'équateur  $\gamma Q$  vers les points solstitiaux, c'est vers les équinoxes  $\gamma$  &  $\omega$  que cet effet devient sensible, il n'en résulte donc rien pour changer l'obliquité de l'écliptique ou la distance du point  $E$  de l'écliptique au point  $Q$  de l'équateur: voyons dans quel temps se fait le plus grand changement.

Fig. 306. Quand le nœud de la lune est en  $G$  (fig. 306) dans le solstice, la lune traversant l'équateur en  $E$ , n'agit point pour incliner l'équateur; car pour agir il faut qu'elle en soit à une certaine distance, & plus elle en est éloignée, plus elle agit. La lune étant en  $G$ , la plus éloignée de l'équateur qu'il est possible, c'est-là où elle attire le plus; si.

*MO* est le mouvement diurne de l'équateur terrestre en 1" de temps, & *OF* la quantité de force que la lune exerce perpendiculairement à son plan, l'équateur prendra la direction *MF*; donc sur le colure des solstices *NS* où se mesure l'obliquité de l'écliptique, l'équateur *MS* paroîtra plus éloigné de l'écliptique *N*; donc l'obliquité de l'écliptique paroîtra augmentée par l'action de la lune.

Pendant tout le temps que le nœud ascendant *G* sera dans la partie boréale de l'écliptique ou dans les signes ascendants, cet effet aura lieu; voilà pourquoi il s'accumule de plus en plus, & enfin quand le nœud *G* de la lune par son mouvement rétrograde arrive en  $\gamma$ , l'action est nulle, mais l'équation résultante de l'effet qui a été produit jusqu'à ce moment-là, est la plus grande, tout ainsi que dans le mouv. ellipt. des planètes, l'équation est la plus grande quand la vitesse cesse d'augmenter (1256); voilà pourquoi l'obliquité de l'écliptique est la plus grande (2861), dans le temps où véritablement l'action de la lune sur l'équateur est située le moins avantageusement pour produire cette augmentation, & qu'elle sembleroit devoir faire tout le contraire. Au reste ce sont ici des considérations vagues; dont on auroit de la peine à tirer des conséquences, sans le secours des calculs que j'ai détaillés ci-dessus. Ainsi la précession des équinoxes qui de tous les phénomènes de l'attraction a donné le plus d'embarras aux Géomètres, se trouve expliquée d'une manière simple & élémentaire, & forme une nouvelle démonstration de cette loi générale du monde, comme je l'avois annoncé (3383).

*Figure de la terre suivant les loix de l'Attraction.*

3579. NOUS avons prouvé par observation l'aplatissement de la terre (2672), il faut le prouver actuellement par la théorie générale. Si la terre étoit une masse fluide & homogène, elle auroit la figure d'un ellipsoïde dont l'axe seroit plus petit de  $\frac{1}{230}$  que le diamètre de l'équateur. Cette proposition que Newton ne démontra qu'im-

parfaitement, a été prouvée par M. Mac-Laurin & par M. Clairaut ; elle me donnera lieu d'expliquer les principes de l'Hydrostatique & les attractions des sphéroïdes ; il en résultera une introduction aux ouvrages des géomètres qui ont approfondi cette matière, tels que M.<sup>s</sup>. Clairaut, d'Alembert, Simpson, (*Mathemat. dissert.* 1743) Mac-Laurin, Bouguer, le P. Boscowich, &c. qui ont étendu leurs recherches plus loin que le cas du sphéroïde homogène & de la pesanteur ordinaire.

On a déjà vu dans la précession (3576), un fait qui prouve que la terre est hétérogène <sup>(a)</sup> ; les observations faites sur la figure de la terre le prouvent également ; parce que le degré d'aplatissement qui auroit lieu dans le cas du sphéroïde homogène, & l'augmentation de pesanteur de l'équateur vers les poles, indiquée par la longueur du pendule (3373) ne sont pas exactement tels que nous les observons.

Principes  
d'Hydrostatique.

La ligne du zénit, la ligne verticale, la ligne du fil à-plomb, la direction de la pesanteur, est perpendiculaire à la surface de la terre, quelle que soit la quantité de son aplatissement ; c'est un principe dont j'ai fait sentir la certitude, soit par l'expérience, soit par le raisonnement (2660), & qui sera nécessaire dans les démonstrations suivantes, car nous supposerons que le sphéroïde est en équilibre dans toutes ses parties, lorsque la pesanteur est perpendiculaire à la surface du sphéroïde, dans tous ses points, & que toutes les colonnes ont une égale pesanteur ; cela est rigoureusement vrai, dans le cas de la loi de pesanteur qui a lieu dans la nature, quoique cela ne soit pas général pour toutes les loix de pesanteur qu'on pourroit imaginer.

Pour démontrer que la figure de la terre doit être elliptique en supposant une masse fluide qui tourne sur son axe, il faut connoître si les attractions qui ont lieu en divers points de la surface d'un sphéroïde elliptique, sont telles qu'elles soient dans tous les points en équilibre avec

(a) Ομοῖος, *similis* ; Γένος, *genus* ; Ἑτερος, *alter*.

la force centrifuge qui a lieu dans le même sphéroïde elliptique ; car si cela est , on fera certain que la figure du sphéroïde tournant sur son axe ne cessera point d'être une ellipse ; telle est la méthode de M. Clairaut (*Figure de la terre*, pag. 158 , & suiv.) ; que nous allons expliquer.

3580. THÉORÈME. Soient deux ellipses semblables & concentriques  $AMBL$ ,  $QSRHI$  (*fig. 310*) , & une ligne  $MQN$  tangente en  $Q$  à l'ellipse intérieure ; concevons que le plan de ces deux ellipses tourne autour de l'axe  $MQN$  en faisant seulement un angle infiniment petit ; les deux tranches ou solides infiniment minces & elliptiques (3282) produites par les ellipses  $AMBN$ ,  $QSRTQ$  exerceront dans la direction  $QB$  du petit axe une attraction égale , la première sur le corpuscule  $N$ , l'autre sur le corpuscule  $Q$ .

*Fig. 310.*

DÉMONSTRATION. Supposons deux lignes  $QR$ , &  $QT$  dans la petite ellipse , également éloignées de l'axe  $QB$ , & deux lignes  $NK$  &  $NL$  dans la grande ellipse parallèles à  $QR$  & à  $QT$  ; les lignes  $QR$  &  $QT$ , avec les petites lignes infiniment proches , tels que  $Qr$ , décriront , par le mouvement de ce plan , deux petites pyramides qui sont les élémens du solide décrit par le mouvement de la petite ellipse  $QSRTQ$ . De même les lignes  $NK$  &  $NL$ , chacune avec une autre ligne infiniment proche , telle que  $Nk$ , décriront deux autres petites pyramides inégales , mais dont la somme est évidemment égale à la somme de deux pyramides  $QR$  &  $QT$ , puisque  $NK + NL = 2 QR$  (3635) , & que les pyramides sont semblables , étant engendrées par un seul & même mouvement & parallèles entr'elles. Ces attractions des pyramides  $QR$  &  $QT$  dans la direction  $QH$  seront les mêmes que les attractions des pyramides  $NK$  &  $NL$  sur le point  $N$  dans une direction parallèle à  $QH$ , puisque l'angle  $RQM$  est égal à l'angle  $KNM$  & à l'angle  $LNZ$ , ce qui rendra les forces décomposées égales aussi bien que les forces absolues ; on dira la même chose de tous les autres élémens dont la tranche est composée. Et lorsque  $QR$  &  $QT$  seront

Fig. 310. arrivées à une inclinaison assez grande pour faire passer  $ML$  dans le segment  $MAN$ , on verra que les attractions des pyramides dont est composé le solide, produit par la révolution de  $MANM$ , étant retranchées des attractions des pyramides qui leur correspondent, dans le solide produit par  $MBN$ , & qui sont opposées, le reste sera encore égal aux attractions des pyramides correspondantes dans le solide produit par l'ellipse  $RQT$ ; donc l'attraction restante de la plus grande tranche sur le point  $N$ , dans la direction parallèle à  $QB$ , fera encore égale à l'attraction de la petite tranche sur le point  $Q$  dans la direction  $QH$ .

3581. COROLL. Delà il suit que les deux sphéroïdes elliptiques semblables, dont  $AMB$ ,  $QSH$  sont les méridiens, & dont les tranches ci-dessus expliquées sont les élémens, exercent aussi une même attraction, l'un sur le point  $Q$ , suivant  $QB$ , l'autre sur le point  $N$  dans une direction parallèle à  $QB$ . Il en seroit de même si la tangente  $MQN$  de la petite ellipse étoit parallèle au petit axe, au lieu d'être parallèle au grand axe, c'est-à-dire, qu'on prit  $SD$  au lieu de  $QM$ ; l'attraction du petit sphéroïde sur le point  $S$  seroit égale à l'attraction du grand sphéroïde sur le point  $D$ , l'une & l'autre considérée dans une direction parallèle au grand axe.

La figure de la terre est elliptique.

3582. Il n'en faut pas d'avantage pour démontrer que la figure d'une masse fluide qui tourne sur son axe est une figure elliptique, & pour cela nous allons démontrer d'abord que les attractions que nous avons déterminées dans un sphéroïde elliptique, combinées avec la force centrifuge qui est toujours parallèle au grand axe du méridien ou perpendiculaire au petit axe, produisent une force qui est perpendiculaire à la surface du sphéroïde.

Fig. 311. Soit l'attraction du sphéroïde sur un corpuscule  $E$  (fig. 311), situé sous l'équateur, égale à  $E$  (3588); l'attraction sur un corpuscule situé au pôle, égale à  $P$  (3585), la force centrifuge sous l'équateur  $= F$  (3395); soit un point  $N$  dont il faut déterminer la pesanteur, pour savoir vers quel point elle se dirigera.

L'attraction

*Fig. de la terre suiv. les loix de l'Attract. 64x*

L'attraction en  $N$  décomposée suivant  $NR$ , fera la même qu'au pôle  $X$  d'un sphéroïde semblable à  $PNE$ , qui auroit  $CX$  pour demi-axe ( $3581$ ); donc  $P \cdot \frac{CX}{CP}$  fera la force qui agit en  $N$  parallèlement à l'axe  $PC$  ( $3586$ ); car les attractions des corps semblables & homogènes, étant comme les masses & en raison inverse des carrés des distances, sont comme les simples rayons; de même l'attraction du sphéroïde  $PEp$  sur le point  $N$  dans la direction  $NX$ , fera la même qu'à l'équateur  $R$  d'un sphéroïde semblable, où  $CR$  seroit le demi-diamètre de l'équateur; donc ( $3581$ ) on aura  $E \frac{CR}{CE}$  ou  $E \frac{NX}{CE}$  pour l'attraction au point  $N$ , suivant  $NX$ . Il en faut retrancher la force centrifuge  $F \cdot \frac{NX}{CE}$  qui a lieu au point  $N$  ( $3394$ ); donc  $(E - F) \frac{NX}{CE}$  fera la force totale qui agit en  $N$  suivant  $NX$ , & qu'on peut exprimer par une ligne  $NV$ , la force perpendiculaire à celle-là étant exprimée par  $NS$ . La force composée qui en résulte, sera exprimée par une diagonale  $NT$  qui prolongée rencontre en  $G$  l'axe  $PP$ ; & si  $XG$  est égale à la sous-normale de l'ellipse, c'est-à-dire, à  $\frac{C E^2}{C P^2} CX$ ; ( $3274$ ), il s'ensuit nécessairement que la force totale du point  $N$  est dirigée suivant la normale, & par conséquent perpendiculaire à la surface de la terre: pour cela, il suffit qu'on ait cette proportion,  $VT:NV:: XG:NX$ , car on en conclut que,  $P \cdot \frac{CX}{CP} : \frac{NX}{CE} (E - F):: \frac{C E^2}{C P^2} \cdot CX:NX$ , ou ce qui revient au même,  $P:E - F:: CE:CP$ , & dès-lors la force d'un point quelconque ne dépend plus de sa situation, & les deux forces qui agissent en  $N$ , se réduisant à une force  $NT$  perpendiculaire à la surface du sphéroïde, il tournera sans changer de figure ( $3579$ ); donc la figure naturelle de ce fluide

La terre est elliptique.

Ainsi toutes les fois que les différens points d'un cercle sont sollicités par des forces parallèles entre elles

& proportionnelles aux ordonnées de ce cercle, il se change en une ellipse dont le grand axe est parallèle à la direction de cette force étrangère; & comme tous les méridiens de la terre sont dans le même cas, ils deviennent tous des ellipses, & la figure de la terre qui en résulte se trouve comme formée ou engendrée par un méridien tournant autour du petit axe. Dans le cas des marées nous verrons que la même force produit un sphéroïde allongé (3592).

Quelle doit  
être la vitesse  
de rotation.

3583. Pour que la figure de la terre continue d'être une ellipse, dont les axes soient entre eux comme  $CE : CP$ , il faut que la vitesse de rotation soit telle que par la force centrifuge  $F$  qui en résulte, l'on ait cette proportion  $P : E - F :: CE : CP$ , alors toutes les colonnes pèseront également; il y aura sur toutes les parties du sphéroïde une pression perpendiculaire à la surface, égale dans tous les points, puisque dans cette proportion à laquelle nous sommes parvenus il n'y a aucun terme qui dépende de la situation du point  $M$ ; chaque partie n'aura donc d'autre mouvement que celui de la rotation commune à toute la masse, & le sphéroïde elliptique tournera sur son axe sans changer de figure.

APRÈS avoir démontré que le sphéroïde est elliptique, il faut trouver quelle sera la quantité de son aplatissement, suivant la vitesse de rotation qui est connue, & suivant la force d'attraction que le sphéroïde exerce sur des particules de matière situées au pôle & sous l'équateur; c'est-à-dire, trouver les rapports des quantités  $E$  &  $F$ . L'on partagera le sphéroïde en petites pyramides, & l'on cherchera d'abord l'attraction de chacune.

Attraction  
d'une pyramide  
de infinité  
petite.

Fig. 312.

3584. L'ATTRACTION d'une petite pyramide  $BD$  (fig. 312) sur le corpuscule  $B$  placé à son sommet, est égale à la base divisée par la hauteur; & cette attraction décomposée suivant  $BG$ , est égale à la base divisée par la hauteur, & multipliée par le cosinus de l'angle  $DBG$ .

Soit  $X$  la surface de la base d'une petite pyramide  $BD$ ;  $\frac{X \cdot Dd}{B D^2}$  sera l'attraction de l'élément de la pyramide (3386),



&  $\frac{X \cdot D d \cdot \cos. GBD}{BD^2}$  fera l'attraction de ce même élément suivant la direction  $BG$  (3439). Au lieu de la base  $X$  on peut mettre  $\alpha BD^2$ , car cette base est proportionnelle au carré de la hauteur ou de la distance  $BD$ ; l'attraction élémentaire sera donc  $\alpha \cdot D d \cdot \cosin. GBD$ , dont l'intégrale est  $\alpha \cdot BD \cdot \cos. GBD$ , & remettant pour  $\alpha$  sa valeur  $\frac{X}{BD^2}$ , on trouvera  $\frac{X}{BD} \cosin. GBD$  pour l'attraction de cette pyramide infiniment petite dans la direction  $BG$ .

3585. *TROUVER l'attraction d'un sphéroïde  $PEp$  ; (fig. 311) sur un corpuscule  $P$  placé au pôle. Soit  $Mm$  une portion infiniment petite du méridien  $EMp$ ; ayant tiré les lignes  $PM$ ,  $Pm$ , & le petit arc  $MA$  perpendiculaire sur  $Pm$ , on imaginera que la courbe tourne autour de l'axe  $PCp$ , d'une quantité infiniment petite; alors  $PMA$  formera une pyramide que l'on peut regarder comme un des élémens du sphéroïde entier, que la courbe  $PEp$  décrirait si elle faisoit une révolution complète. Soit l'angle infiniment petit qui mesure le mouvement du plan  $PEp = \alpha$ , le rayon étant pris pour unité; soit le demi-axe  $PC = 1$ , le rayon  $CE$  de l'équateur  $= m$ , l'abscisse  $PQ = z$ , l'ordonnée  $QM = u$ , le cosinus de l'angle  $MPQ$  pour le rayon  $1 = s$ , on aura  $u\alpha$  égal à l'arc ou à la petite ligne droite décrite par le point  $M$ , pendant le mouvement infiniment petit du plan  $PEMp$  autour de l'axe, car un petit arc est égal au rayon multiplié par l'angle (3357); ce petit arc, l'un des côtés de la base de la pyramide, étant multiplié par l'autre côté  $MA$ , donnera la surface de la base de cette pyramide,  $= u\alpha \cdot MA$ ; donc l'attraction de la pyramide décomposée suivant  $PC$ , sera  $\frac{u\alpha s \cdot MA}{PM}$  (3584); mais  $\frac{MA}{PM} = \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$  (3307); c'est-à-dire, que la différentielle d'un arc est à celle du cosinus  $s$  comme le rayon est au sinus; donc l'attraction de la petite pyramide sera  $\frac{\alpha u s ds}{\sqrt{1-s^2}}$ , dont il faut éliminer la lettre  $u$ , pour mettre  $s$  à sa place, afin de n'avoir*

Fig. 311.

# 644 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

qu'une seule inconnue dans cette différentielle. Par la propriété de l'ellipse on a  $u^2 = 2mmz - m^2z^2$  (3254); d'un autre côté, le cosinus de l'angle  $MPQ = \frac{PQ}{FM}$

$$(3613) = \frac{z}{\sqrt{zz+uu}} = s, \text{ d'où l'on tire } zz = ssz + ssuu,$$

$$\text{ou } z = \frac{su}{\sqrt{1-ss}}, zz = \frac{s^2u^2}{1-ss}; \text{ substituant ces valeurs de } z$$

& de  $zz$  dans l'expression de  $u^2$ , on aura  $u(1 + \frac{m^2s^2}{1-ss})$

$$= \frac{2mms}{\sqrt{1-ss}} \text{ \& } u = \frac{2mms(1-ss)}{(1-ss+m^2ss)\sqrt{1-ss}};$$

mettant  $nn$  à la place de  $mm-1$ , & substituant cette valeur de  $u$  dans l'expression  $\frac{au ds}{\sqrt{1-ss}}$ , elle deviendra  $\frac{2am^2s^2 ds}{1+n^2s^2} = 2am^2s^2 ds$

$- 2an^2m^2s^4 ds$  (3287), car à cause de la petitesse de  $n^2$  on néglige les termes suivans; l'intégrale est  $\frac{2}{3}am^2s^3$

$-\frac{2}{5}an^2m^2s^5$  (3300), & faisant  $s=1$  &  $a=c$  (3358)

pour avoir la somme de tous les élémens qui composent le sphéroïde, cette intégrale devient  $\frac{2}{3}cm^2 - \frac{2}{5}cm^2n^2$ . A la

place de  $m$  qui est le rayon de l'équateur, mettons  $1+\delta$ , enforte que  $\delta$  soit l'aplatissement de la terre, qui est une

fraction très-petite du demi-axe  $CP$ , dont nous pourrions négliger le carré & les puissances ultérieures; alors  $m^2$

$$= 1+2\delta$$

$$(3287), \text{ \& } nn = mm - 1 = 2\delta; \text{ substituant ces valeurs on aura pour l'intégrale précédente } \frac{2}{3}c + \frac{8}{15}c\delta$$

$$= \frac{2}{3}c(1 + \frac{4}{5}\delta); \text{ c'est l'attraction d'un sphéroïde (dont le demi-axe est égal à } 1, \text{ \& l'aplatissement à } \delta), \text{ sur un cor-$$

puscule situé au pôle. C'est cette quantité qui est appelée  $P$  dans les articles 3582, 3589.

3586. Si l'on suppose  $\delta=0$ , comme cela arrive dans un globe, dont le rayon est  $CP=1$ , l'on aura  $\frac{2}{3}c$  pour l'attraction de ce globe sur un corpuscule placé à sa superficie.

Delà il suit que cette attraction est proportionnelle à la circonférence ou au rayon du globe qui attire; enforte qu'un globe d'un rayon double attireroit un corps situé au pôle avec une force double. Il en est de même de deux sphéroïdes semblables, puisque la quantité d'attraction qui

dépend de  $\delta$ , augmenteroit proportionnellement à  $\delta$ , &

Attraction  
polaire du  
sphéroïde.

Attraction  
du globe.

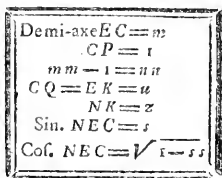
deviendrait double dans un sphéroïde dont le rayon seroit double.

3587. Delà il suit que l'attraction du sphéroïde sur des points situés à diverses distances est en raison inverse des carrés des distances ; car si l'on appelle la distance  $r$ , en imaginant un sphéroïde semblable qui s'étende jusques-là, l'on aura l'attraction proportionnelle à  $r$ , ou à  $\frac{r^3}{r^2}$ , c'est-à-dire, à la masse du sphéroïde qui est  $r^3$ , divisée par le carré de la distance.

3588. TROUVER l'attraction qu'un même sphéroïde elliptique exerce sur un corpuscule placé sous l'équateur. Soit  $PC$  le demi-axe (fig. 313),  $CE$  le rayon de l'équateur, &  $EK$  parallèle à l'axe  $PCR$  ; supposons un plan qui passe par la ligne  $EK$  & qui coupe le sphéroïde ; la section sera une ellipse semblable à l'ellipse  $EPAR$  (3283), parce que ce plan étant parallèle à l'axe  $PR$  de la terre est nécessairement parallèle à quelqu'un des méridiens du sphéroïde, qui se coupent tous sur l'axe  $PR$ . Si l'on prend  $EH=PR$ , & qu'on suppose sur le diamètre  $EH$  une sphère coupée de même par des plans qui passent par la ligne  $EK$ , ces plans formeront une infinité d'éléments ou de tranches infiniment minces en tournant autour de la ligne  $EK$  ; on trouvera la proportion qu'il y a entre l'attraction d'un des éléments de la sphère & l'attraction de l'élément correspondant du sphéroïde, & l'on en déduira l'attraction du sphéroïde au moyen de ce que nous connoissons celle de la sphère (3586).

De l'attraction sous l'équateur.  
Fig. 313.

Si l'ellipse  $EPAR$  fait un mouvement infiniment petit, en décrivant un petit angle  $\alpha$  autour du point  $E$  & de la ligne  $EK$ , elle formera une tranche elliptique infiniment mince, dont l'élément, ou la différentielle est une petite pyramide  $ENL$  ; le mouvement du point  $N$  pendant le même temps lui fera décrire une petite ligne droite, ou plutôt un petit arc, dont la valeur est l'angle  $\alpha$  multiplié par le rayon  $NK$ ,



ou  $az$  (3357); c'est un des côtés de la base de cette petite pyramide, l'autre côté est  $NL$ ; ainsi la surface de la base sera  $az \cdot NL$ ; l'attraction de la pyramide sera donc (3584)  $\frac{az \cdot NL}{EN} \sqrt{1-s^2}$  dans la direction  $EC$ ; mais  $\frac{NL}{EN}$  est le petit angle  $NEL$  (3584), ou la différentielle de l'angle  $NEC$ , & la différentielle de l'angle multipliée par le cosinus est égale à la différentielle du sinus (3307); donc on aura  $\frac{NL}{EN} \sqrt{1-s^2} = ds$ , ainsi l'attraction de la pyramide  $ENL$  se réduira à  $az ds$ , dont il faut éliminer la lettre  $z$ .

Par la propriété de l'ellipse,  $PQ \cdot QR : QN^2 :: PC^2 : CE^2$  (3254); donc  $1-uu : zz :: 2mz + mm :: 1 : mm$ ; donc  $uu = \frac{2mz - zz}{mm}$ . Le sinus de l'angle  $NEC$  ou  $ENK$ , est égal à  $\frac{EK}{NE} = \frac{u}{\sqrt{uu + zz}} = s$ ; de ces deux équations l'on tirera aisément une valeur de  $z$  en  $s$ ; car puisque  $s = \frac{u}{\sqrt{uu + zz}}$ ,  $uu = \frac{s^2 zz}{1-s^2}$ ; donc égalant les valeurs de  $uu$  l'on a  $\frac{2mz - zz}{mm} = \frac{s^2 zz}{1-s^2}$ ;  $2m(1-s^2) - z(1-s^2) = m^2 s^2 z$ ; donc  $z = \frac{2m(1-s^2)}{1+mmss-s^2}$ , & comme  $mm-1=nn$ ,  $z = \frac{2m(1-s^2)}{1+nnss}$ ; substituant cette valeur de  $z$  dans  $az ds$ , elle deviendra  $\frac{2ma(1-s^2)ds}{1+nnss}$ . Si l'on réduit en série cette fraction, en négligeant le carré de  $nn$  (3287), on aura l'attraction de la petite pyram.  $= 2ma(1-s^2)(1-nnss)ds = 2ma(1-s^2-nnss+nnss^3)ds$ , dont l'intégrale (3300) est  $2ma\left(s - \frac{s^3}{3} - \frac{nnss^3}{3} + \frac{nnss^5}{5}\right)$ , c'est l'attraction de la tranche décrite par le secteur  $AEN$ , & si l'on fait  $s=1$ , l'on aura l'attraction de la tranche semi-elliptique décrite par  $ERA$ ,  $2ma\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15}nn\right)$ ; substituant pour  $m$  la valeur  $1+\delta$  (3585), & pour  $nn$  la valeur  $2\delta$ , elle devient  $2a\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\delta\right)$ . Si l'on fait  $\delta=0$ , l'on aura l'attraction d'une tranche semi-circulaire infiniment mince, qui seroit décrite de la même façon par le mouvement du

*Fig. de la terre suiv. les loix de l'Attract. 647*

de mi-cercle, dont  $EH$  feroit le diamètre, & cette attraction est  $\frac{4}{3}\alpha$ .

Le rapport entre les attractions d'une sphère décrite sur  $EH$ , & du sphéroïde  $ERAP$ , est le même que celui de leurs élémens, puisqu'ils ont le même nombre d'élé-mens; ainsi les attractions totales sont entre elles comme l'attraction de la tranche semi-elliptique est à celle de la tranche semi-circulaire, c'est-à-dire, comme  $2\alpha(\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\delta)$  est à  $\frac{4}{3}\alpha$ , ou comme  $1 + \frac{2}{3}\delta$  est à 1; donc il suffira de multiplier l'attraction de la sphère que l'on fait être égale à  $\frac{2}{3}c$  (3586) par  $1 + \frac{2}{3}\delta$ , pour avoir celle du sphéroïde, qui sera par conséquent  $\frac{2}{3}c(1 + \frac{2}{3}\delta)$  (<sup>a</sup>); c'est la quantité que nous avons appelée  $E$  (3582). Les quantités  $P$  &  $E$  sont calculées dans la *Théor. de la Fig. de la T.* de M. Clairaut, sans supposer que le carré de  $\delta$  soit une quantité négligeable; mais j'ai cru pouvoir omettre ici tout ce qui rendroit le calcul plus compliqué, sans donner dans le résultat un centième de différence.

3589. Au moyen des valeurs de  $P$  & de  $E$  nous pouvons connoître l'aplatissement de la terre. Pour que le sphéroïde elliptique tourne sur son axe sans changer de figure, il faut qu'on ait cette proportion (3583),  $P : E :: CE : CP$ , ou  $\frac{2}{3}c(1 + \frac{2}{3}\delta) : \frac{2}{3}c(1 + \frac{2}{3}\delta) - F :: 1 + \delta : 1$ ; d'où il est aisé de tirer la valeur de  $F$ ; nous négligerons le carré de  $\delta$ , ou le produit de  $F$  par  $\delta$ , qui est considérablement plus petit que  $F$ , & nous aurons  $F = \frac{2}{3}c \cdot \frac{4}{3}\delta$ ; c'est l'expression de la force centrifuge en supposant connu l'aplatissement de la terre. La force centrifuge sous l'équateur est  $\frac{1}{189}$  de la pesanteur (3395). Appellons  $\Phi$  la fraction  $\frac{1}{189}$  (3395), nous aurons donc  $\Phi = \frac{F}{E - F}$ ; car  $F$  est à  $E - F$ , comme la force centrifuge est à sa différence d'avec la pesanteur; substituant les valeurs de  $E$  & de  $F$  en  $\delta$ , & négligeant les puissances de  $\delta$ , l'on aura  $\Phi = \frac{4}{3}\delta$ , ou  $\delta = \frac{3}{4}\Phi = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{189} = \frac{1}{231}$ . Donc l'aplatissement de la

Aplatissement  
de la terre.

(<sup>a</sup>) Si l'on suppose que le point attiré  $E$  soit hors de l'ellipse à une distance  $g$  du centre  $C$ , on trouvera par la même méthode que l'attraction du sphéroïde diminue en raison inverse de  $g^3$ .

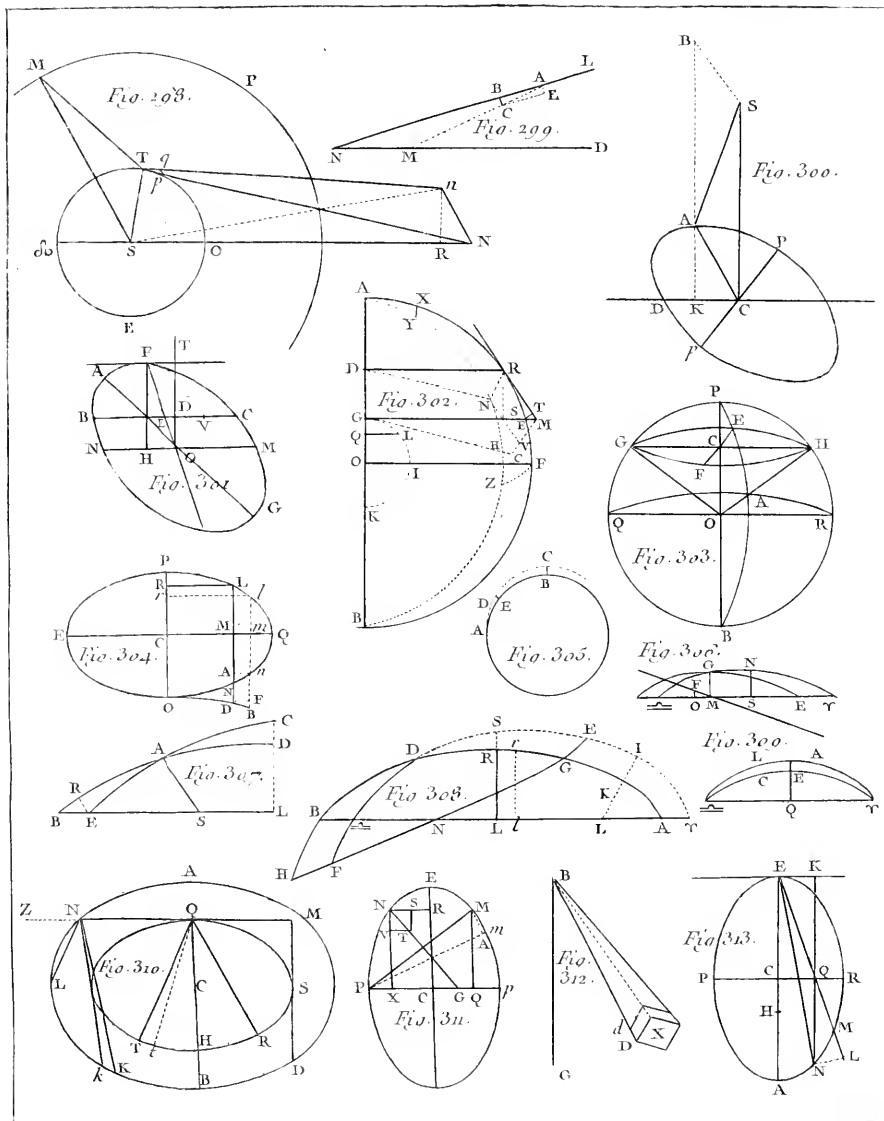
## 648 ASTRONOMIE, Liv. XXII.

terre doit être de  $\frac{1}{231}$  en vertu des loix de l'attraction ; si la terre est homogène & qu'elle ait été fluide dans le principe , Newton trouvoit seulement  $\frac{1}{137}$  (Liv. III. prop. 19). Cette quantité d'aplatissement ne diffère pas beaucoup de ce qu'on trouve par observation (2692) ; & il paroît que la différence vient de ce que la terre est plus dense vers le centre qu'à la surface : ainsi l'on peut regarder ceci comme une nouvelle démonstration du mouvement de la terre ( 1099 ), & de la théorie de l'Attraction , dont on a vu tant de preuves dans ce XXII<sup>e</sup> Liv.

### DU FLUX ET DU REFLUX DE LA MER.

Phénomènes  
des marées,

3590. LA THÉORIE de la figure de la terre conduit naturellement à celle du flux & du reflux de la mer, parce que les marées viennent d'un changement dans la figure de notre globe, produit par une force étrangère qui suit la même loi. Il y a dans les marées trois phénomènes principaux extrêmement remarquables ; le premier revient deux fois le jour, le second deux fois le mois, le troisième deux fois l'année. Tous les jours au passage de la lune par le méridien , ou quelque temps après, on voit les eaux de l'Océan s'élever sur nos rivages ; on assure qu'à S. Malo cette hauteur va jusqu'à plus de 100 pieds. Parvenues à cette hauteur les eaux se retirent peu-à-peu ; environ six heures après leur plus grande élévation elles sont à leur plus grand abaissement ; après quoi elles remontent de nouveau lorsque la lune passe à la partie inférieure du méridien, en sorte que la haute mer & la basse mer, le *Flot* & le *Jusan* s'observent deux fois le jour, & retardent chaque jour de 48', plus ou moins, comme le passage de la lune au méridien. Le second phénomène consiste en ce que les marées augmentent sensiblement au temps des nouvelles lunes & des pleines lunes, ou un jour & demi après, & l'augmentation est sur-tout très-sensible quand la lune est périgée. Enfin le troisième phénomène des marées est l'augmentation qui arrive vers les deux équinoxes ; en sorte que le cas où les marées sont les plus fortes







fortes de toutes est celui d'une syzygie périgée qui arrive dans le temps de l'équinoxe : nous expliquerons encore mieux les phénomènes en expliquant leur cause.

Le plus ancien Auteur qui ait parlé des marées, comme l'observe Strabon (vers les deux tiers de son premier livre), est Homère (Odyss. xii. 105), à l'occasion de Charibde; Homère dit qu'elle s'élève & se retire trois fois le jour; Strabon pense que le mot *τρεις* a été mis à cause de la figure poétique, pour le mot *δύς*, deux fois; on pourroit croire aussi qu'Homère étoit mal informé ou qu'il y a eu corruption dans le texte. (*Costard, Hist. of astron. pag. 256, 268*).

Histoire de  
nos connois-  
sances.

Hérodote en parlant de la mer Rouge, & Diodore de Sicile (*pag. 174*), font mention d'un flux grand & rapide; mais sans rien dire de la cause, *ῥᾶν δε πολὺν καὶ σφοδρὴν*. Le premier des Grecs qui fit attention à la cause des marées, fut Pytheas de Marseille; il avoit été en Angleterre, comme le dit Strabon, & il avoit dû y observer les marées de l'Océan; Plutarque nous apprend qu'il les regardoit, en effet, comme étant réglées en quelque sorte par la lune; il est vrai qu'il ne parle que d'une marée par mois, mais c'est sans doute une faute de Plutarque. Les marées du Golphe Arabe ou de la mer Rouge étant très-fortes pourroient servir, dit M. Costard, à expliquer le passage des Israélites, dont il est parlé dans l'Exode ch. xiv., sur-tout si l'on suppose qu'un vent de *N. E.* pouvoit augmenter encore la chute ou l'abaissement des eaux.

Aristote, dans la multitude de ses ouvrages de physique, faits 300 ans avant J. C., ne parle presque pas des marées, on n'y trouve que trois passages forts courts à ce sujet; le premier, où il dit qu'il y a un grand flux des eaux qui sont vers le Nord ou du côté de l'Ourse, (*Météorol. L. II. Sum. 1. T. I. pag. 759. édit. de Geneve, 1606*); le second, où il dit qu'on parle d'élévation de la mer réglées sur la lune (*De Mundo, c. 4. in fine*); le troisième, où il dit que la marée d'une grande mer est plus forte que celle d'une mer plus petite (*Probl. sect. 23*,

T. II. pag. 972 ). Nous ne voyons rien qui annonce qu'Aristote se soit occupé de ces phénomènes au point d'être mort du désespoir que sa curiosité lui causa ; comme l'ont écrit S. Justin & S. Grégoire de Nazianze , cités par Moréri.

M. Costard , dans son histoire de l'astronomie ( pag. 264 ) observe que les Grecs étoient peu au fait des phénomènes de la marée ; puisque Agatharchides qui écrivoit vers l'an 114 avant J. C. croyoit que la marée arrivoit toujours à 3 heures & à 9 ( *Hudson Geog. min.* T. I. pag. 28 ) ; mais de nos jours , M. Richard a bien dit que c'est depuis midi jusqu'à trois heures ( *Voy. d'Italie* , T. II. pag. 251 ) ; enforte qu'il faisoit en 1764 la même faute qu'Agatharchides , 114 ans avant J. C. C'est au temps de César , que les Romains instruits par leurs conquêtes commencent à montrer des connoissances dans cette partie de la physique ; César en parle dans ses commentaires ( L. IV ). Strabon explique d'après Posidonius , que le mouvement de l'Océan imite celui des cieux , qu'il y a un mouvement diurne , un menstruel , un annuel ; que la mer s'élève quand la lune est dans le méridien , soit au-dessus soit au-dessous de l'horizon , & qu'elle est basse au lever & au coucher de la lune. Que les marées augmentent dans les nouvelles & dans les pleines lunes , & dans le solstice d'été. Strabon ( L. III. pag. 173 ).

Cause des  
Marées.

Pline explique non-seulement les phénomènes , mais la cause , quand il dit ( L. II. c. 97 ) : *Causa in sole lunaque... ut ancillantes syderi avido trahentique secum haustu maria* , &c. Senèque en parle avec exactitude ( *Quæst. nar.* III. 28. *Quare bonis viris mala accidunt* c. 1 ). Macrobe , auteur du 4<sup>e</sup> siècle décrit très-bien les mouvemens de l'Océan , à l'occasion de la période de 7 jours ( *Somm. Scip.* I. 6 ).

Les différentes manières dont on a cherché en différens temps à expliquer l'effet de la lune sur les marées sont si peu satisfaisantes , que je ne crois pas devoir même les indiquer. V. Plutarque , *de Plac. phil.* L. III. c. 17. Galilée , *de Syst. mundi* , Dial. 4. Riccioli , *Almag.* II. p. 374.

Gaffendi, *Op. II. pag. 27.* Je passe à l'explication de Képler, qui le premier apperçut l'effet de l'attraction universelle dans les marées; il en parle d'une manière éloquente dans deux ouvrages: *De Stella martis* (1206), *Epitome astron. pag. 555*, comme je l'ai déjà rapporté (3377).

Newton après la découverte du principe & de la loi générale de l'attraction, apperçut facilement les effets que le soleil & la lune devoient produire sur les marées, & il traita cette matière dans son livre des principes avec sa supériorité ordinaire. Enfin, l'académie des Sciences ayant résolu vers 1738 de traiter tout de nouveau & d'approfondir les branches du système du monde que Newton n'avoit pu épuiser, proposa pour le prix de 1740 la question des marées; les pièces de MM. Bernoulli, Euler & Mac-Laurin, qui partagerent le prix sont d'excellens traités sur cette matière; mais je vais reprendre cette théorie, & démontrer avec une extrême simplicité toutes les circonstances générales des marées, sans supposer autre chose que ce que j'ai déjà démontré.

3592. La première chose qui se présente à démontrer, c'est que l'attraction de la lune ou du soleil considérée séparément, agissant sur une couche de fluide très-mince qui environne un globe, doit faire prendre à ces eaux une figure elliptique; M. Mac-laurin le démontra d'une manière ingénieuse dans sa pièce de 1740; M. Clairaut a imité sa démonstration dans sa Théorie de la figure de la terre, comme on l'a vu (3579); & il est aisé d'appliquer aux marées la même démonstration; pour cela il suffit de considérer trois choses; 1°. La force de la lune sur les différens points de la terre est proportionnelle à la distance de chaque point, au plan perpendiculaire au rayon lunaire (3530); elle est donc proportionnelle à des lignes parallèles au grand axe de l'ellipse, qui naturellement doit se diriger vers la lune; 2°. La force centrifuge que nous avons considérée quand il étoit question de la figure de la terre étoit également parallèle au grand axe de l'ellipse du méridien dans les diffé-

Figure allongée des eaux.

rens points de la terre ( 3394 , 3582 ) ;  $3^{\circ}$ . Une force dont la direction s'exerce ainsi par des lignes parallèles, dans les différens points d'une sphère, & dont l'intensité est proportionnelle aux mêmes lignes, change la sphère en une ellipse dont le grand axe est parallèle à la direction de cette force étrangère ( 3582 ).

Ainsi les eaux s'élèvent non-seulement vers le côté où est l'astre qui les attire, mais encore du côté opposé; parce que si l'astre attire les eaux supérieures plus qu'il n'attire le centre de la terre, il attire aussi le centre de la terre plus qu'il n'attire les eaux inférieures, & celles-ci restent en arrière du centre autant que les eaux supérieures vont en avant du côté de l'astre qui les attire. Et comme tous les cercles de la terre qui ont leur commune section dirigée vers la lune prennent la même forme, il en résulte un ellipsoïde allongé.

Degré d'allongement.

Le degré d'ellipticité d'un pareil sphéroïde est égal à  $\frac{1}{4}$  de la force perturbatrice au point où elle est la plus grande ( 3589 ) ; ainsi quand nous aurons déterminé la force attractive, nous la multiplierons par  $\frac{1}{4}$  pour avoir l'aplatissement ou l'allongement que cette force produit, c'est-à-dire, la différence des demi-axes.

La force perturbatrice du soleil sur les eaux de l'Océan au point où elle est la plus grande, est égale à la masse du soleil multipliée par 3, comme dans la théorie de la  $\mathcal{C}$ , & divisée par le cube de la distance du soleil, ou multipliée par le cube du sinus de la parallaxe du soleil ( 3530 ). Si donc on suppose la masse du soleil 307831 ( 3405 ), sa parallaxe  $9''$  & le rayon moyen de la terre 3290200 toises ( 2691 ), on trouve que l'aplatissement de ce sphéroïde est de 22 pouces &  $\frac{7}{10}$ , c'est la quantité dont la force seule du soleil est capable d'élever les eaux de la mer sous l'équateur, comme on le voit par le calcul ci après. Nous verrons bientôt que la lune peut en produire trois fois autant; ce qui feroit en tout 8 pieds de marée dans une mer libre; mais cette hauteur est souvent diminuée par la résistance du fond; car elle n'est que de 3 pieds à

l'Isle de S<sup>te</sup> Hélene, au Cap de Bonne-Espérance, dans les Philippines & les Molucques; & elle est souvent augmentée par la figure des côtes, puisqu'à S. Malo, il y a jusqu'à 70 pieds de marée, & même d'avantage.

Masse. . . . .	5488312
(Sin. 9'') <sup>3</sup> . . . . .	6919452
Rayon de la Terre. . . . .	6517222
3 . . . . .	0477121
72 . . . . .	1857332
$\frac{5}{7}$ . . . . .	0056910
22 P, 7 . . . . .	1356349

Élévation  
totale de l'eau.

3593. Ce n'est pas précisément vers le soleil ou vers la lune qu'est dirigé le sommet de cette ellipsoïde aqueux, car on observe que la marée n'arrive qu'environ  $2^h \frac{1}{4}$  après leur passage au méridien dans les mers libres; c'est ainsi que M. de la Caille l'a observé au Cap (*Mém. acad.* 1751, pag. 456). M. Maskelyne, à  $2^h \frac{1}{4}$  à l'Isle de Sainte-Hélene, (*Phil. transf.* 1762, pag. 591). Ainsi quand nous parlerons dans les articles suivans de l'astre qui produit la marée, il faudra entendre un point qui est à  $35^\circ$  environ plus oriental que le vrai lieu de l'astre. Et à l'égard des côtes qui sont plus reculées, la marée est encore plus retardée, comme on le voit par la table de l'*Etablissement du Port*, qui est dans la *Connoissance des Temps*, & dans tous les livres de Navigation, tels que celui du P. Fournier, de M. Bouguer, &c.

3594. Dans une ellipse peu aplatie les excès des rayons sur le petit demi-axe sont comme les carrés des sinus des distances au petit axe (2680); ainsi le sphéroïde aqueux faisant successivement avec le soleil tout le tour de la terre, les pays situés sous le grand axe seront inondés, ceux qui seront sous le petit axe auront basse mer, & la différence entre la basse mer & la hauteur de l'eau pour un moment quelconque sera l'excès d'un des rayons sur le petit axe de l'ellipse.

Marées à différentes heures.

La hauteur de la marée au-dessus des basses eaux, en un lieu quelconque, est donc égale à la plus grande hauteur de l'eau multipliée par le carré du cosinus de la distance de l'observateur au sommet de l'ellipsoïde; ou de la distance entre le zénit du lieu & l'astre qui produit la marée, en supposant l'ellipsoïde dirigé à l'astre même;

ainsi la plus basse mer arrive quand l'astre est à l'horizon, & la plus haute mer quand l'astre est au méridien.

Dela il suit que si le lieu donné & l'astre qui produit la marée sont tous deux sous l'équateur, la hauteur de la marée est comme le carré du cosinus de l'angle horaire; & l'élévation croît à peu-près comme les carrés des temps aux environs du méridien; c'est aussi ce que l'observation a fait voir (*Mém. acad.* 1720, pag. 360).

Marées à différentes latitudes.

Si le lieu donné est éloigné de l'équateur, la hauteur de la marée est comme le carré du cosinus de la latitude; mais aussi-tôt que la latitude est assez grande pour que la lune ne se couche point dans certains temps, il n'y a plus qu'une seule marée dans les 24 heures; parce que la lune n'approche qu'une fois de l'horizon. Sous le pôle même il n'y a point de marée diurne, puisque la lune reste sensiblement pendant toute la journée à la même distance du zénit, & le sphéroïde aqueux tourne, sans s'élever à une heure plus qu'à une autre. Dans les autres cas, il y a deux marées, l'une répond à peu-près au passage supérieur de la lune par le méridien, l'autre au passage inférieur; mais elles sont fort inégales.

A différentes déclinaisons.

Si l'astre n'est pas dans l'équateur, la marée pour un pays situé sous l'équateur sera comme le carré du cosinus de la déclinaison, parce que cette déclinaison sera elle-même la distance de l'astre au zénit, ou la distance du point donné au sommet de l'ellipsoïde. Si le lieu donné n'est pas dans l'équateur, la marée supérieure sera la plus grande, suivant la théorie, quand l'astre passera le plus près du zénit; c'est-à-dire, quand la déclinaison de l'astre sera du côté du pôle élevé; mais la marée inférieure sera plus petite que quand l'astre étoit dans l'équateur, parce que le point opposé à l'astre sera plus éloigné du zénit que l'équateur, quand l'astre sera dans la partie inférieure du méridien.

Marées des équinoxes.

L'on observe cependant que les marées en Europe sont plus grandes en général dans les équinoxes que dans le solstice d'été; cela vient probablement de quelques circonstances particulières; 1°. Les vents du Sud & de l'Ouest

sont alors plus fréquens & plus forts; 2°. La marée du solstice est plus gênée entre les continens de l'Afrique & de l'Amérique, & plus resserrée que celle des équinoxes; elle peut donc être moins sensible sur nos côtes; 3°. Dans les solstices il y a deux marées, dont une forte & l'autre foible, & qui se compensent mutuellement, au lieu que dans le temps des équinoxes il y en a deux à peu-près égales, dont l'effet total est plus sensible. Ajoutons cependant qu'il n'est point aussi général qu'on le dit communément que les marées des équinoxes soient les plus grandes de l'année.

3595. Si la force du soleil est capable de changer la surface des eaux de l'Océan en un sphéroïde allongé dont le sommet est dirigé vers le soleil, la lune doit produire un effet semblable; aussi les marées qu'on observe participent-elles des mouvemens du soleil & de la lune. Dans les syzygies, c'est-à-dire, les nouvelles lunes & les pleines lunes, le sphéroïde aqueux produit par la force du soleil, & celui qui est produit par la force de la lune, sont dirigés dans le même sens; ainsi l'allongement du sphéroïde est égal à la somme des allongemens que le soleil & la lune sont capables de produire séparément; mais dans les quadratures les axes de ces deux sphéroïdes sont à angles droits, & le grand axe du sphéroïde solaire augmente le petit axe du sphéroïde lunaire. Ainsi les marées des syzygies sont la somme des effets du soleil & de la lune, tandis que les marées des quadratures sont la différence. Les hauteurs des marées peuvent donc nous faire connoître le rapport des forces du soleil & de la lune. M. Bernoulli ayant appris qu'à S. Malo la mer varioit de 50 pieds dans les marées moyennes des syzygies, & de 15 pieds dans celles des quadratures, en conclut que le rapport des deux forces du soleil & de la lune est celui de 13 à 7 (3412); mais après avoir examiné diverses observations sur-tout les intervalles des marées (3596), il en conclut que la force de la lune est  $2\frac{1}{2}$  fois celle du soleil, dans les moyennes distances.

Marées des  
syzygies.

Force de  
la lune.

Quand la lune est apogée sa force diminue comme le

cube de sa distance augmente (3444), enforte que si la force moyenne de la lune est  $2\frac{1}{2}$ , la plus grande force dans le périégée sera égale à 3, & la plus petite = 2 seulement, dans l'apogée; en effet, les cubes des parallaxes extrêmes, ou de  $53' 51''$ , & de  $61' 29''$  sont à peu-près comme 2 est à 3.

Les cubes des distances du soleil à la terre en hiver & en été sont entre eux comme 1 est à 1, 106. La force du soleil est donc plus grande en hiver d'un dixième, & si sur 22 ou 23 pieds de marée qu'il y a Brest quand la lune est périégée, il y en a  $5\frac{3}{4}$  pour l'action du soleil, il doit y avoir en hiver 7 pouces d'élévation de plus qu'en été, par le seul effet des distances du soleil à la terre.

3596. Jusqu'ici nous n'avons parlé des marées que pour le cas des syzygies ou des quadratures; examinons ce qui se passe dans les temps intermédiaires. Quand la lune & le soleil sont à quelque distance l'un de l'autre, chacun produit une élévation différente dans un lieu donné, & la somme de ces deux élévations est la hauteur de la marée qu'il s'agit de déterminer. La force de la lune étant deux ou trois fois plus grande que celle du soleil, le point de la haute mer approche deux ou trois fois plus de la lune que du soleil, & n'est jamais éloigné de la lune de  $15^\circ$ . Ainsi le passage de la lune au méridien est ce qui influe le plus sur le temps de la haute mer; aussi la différence entre le passage de la lune & le moment de la haute mer n'est jamais de plus de  $63'$ , lors même que la lune est périégée & qu'elle est à  $60^\circ$  du soleil. M. Bernoulli a déterminé, par ses formules, le *maximum* de cette différence entre le passage de la lune & la haute mer; mais il est aisé de le déterminer par le calcul astronomique, à l'aide de quelques fausses positions, pour toutes les distances du soleil à la lune. Soit *C* le centre de la terre (fig. 333), *S* le soleil, *L* la lune, *H* le point de la haute mer, *LS* la distance du soleil à la lune supposée de  $60^\circ$ , *LH* la distance de la lune au point de la haute mer; la hauteur de la plus grande marée par l'action seule du soleil



leil étant appelée 1, l'on aura  $\cos. SH^2$  pour la hauteur en  $H$ , produite par le soleil (3594), & 3  $\cos. LH^2$  pour la hauteur produite en  $H$  par l'action de la lune périgée. Si l'on suppose  $LH$  de  $9^\circ$  &  $SH$  de  $41^\circ$ , l'on trouvera ces deux termes 0,3961 & 2,9266 ; ainsi la hauteur totale de la marée fera 3,3227. Si l'on suppose  $9^\circ \frac{1}{2}$  on aura 2,9183 & 0,4046 ce qui fait 3,3229 ; si l'on suppose  $10^\circ$  on aura 2,9095 & 0,4132, ce qui donne la marée 3,3227 ; il est facile de voir que le *maximum* de leur somme est à  $9^\circ \frac{1}{2}$  ; c'est la plus grande hauteur de la marée quand le soleil & la lune sont à  $60^\circ$  l'un de l'autre, & que la lune est périgée. Pour savoir combien de temps le point  $H$  doit passer au méridien plutôt que la lune, on considérera que le retardement diurne de la lune étant alors de  $1^h 6'$ , ces  $9^\circ \frac{1}{2}$  font  $40'$  de temps, ainsi la haute-mer précédera de  $40'$  le passage de la lune au méridien ; suivant la table de M. Bernoulli, c'est  $38' \frac{1}{2}$ . Quand la lune est apogée & que sa force est seulement double de celle du soleil, le *maximum* pour  $60^\circ$  de distance est de 2,3660 & ce point est à  $15^\circ$  de la lune ; ces  $15^\circ$  font  $62' \frac{3}{4}$  en temps lunaire ; M. Bernoulli ne trouve que  $58'$ .

Différence  
entre ces ma-  
rées & les  
passages de la  
lune.

Cette différence entre le passage de la lune au méridien, & l'heure de la marée a encore servi à M. Bernoulli à déterminer le rapport des forces de la lune & du soleil (3412). Supposons que dans les moyennes distances  $SH$  réponde à  $34'$  de temps ; & que  $HL$  soit de  $14'$ , il est aisé de prouver que ces deux quantités sont en raison inverse des forces du soleil & de la lune, d'où il résultera que ces forces sont entre elles comme 14 est à 34 ou à peu près comme 1 est à  $2 \frac{1}{2}$ . Pour prouver que  $HL$  est à  $SH$  comme la force du soleil est à celle de la lune, prenons en général le nombre  $m$  pour exprimer ce rapport ; la hauteur en  $H$  est  $\cos. SH^2 + m \cos. HL^2$  (3594) ou  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2SH + \frac{m}{2} + \frac{m}{2} \cos. 2HL$  (3627) ; la différentielle doit être égale à zéro (3299) ; c'est-à-dire,  $(3308)$ ,  $\sin. 2SH . d. SH + m \sin. 2HL . d. HL = 0$ , mais  $d. SH = -d. HL$ , puisque  $SH$  augmente autant que  $LH$

## 658 ASTRONOMIE, LIV. XXII.

diminue donc fin.  $2 SH = m$  fin.  $2 HL$  ; & comme dans les petits arcs les sinus sont proportionnels aux arcs , on a  $SH = m . HL$ . La table de M. Bernoulli paroît être faite sur un nombre plus petit que  $2\frac{1}{2}$  ; car suivant son exemple  $LH$  répond à  $15'$ ,  $SH$  à  $35'$ ,  $SL$  à  $50'$  ; or  $35 : 15 :: 7 : 3$ , ce qui donne  $m = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$  au lieu de  $2\frac{1}{2}$  qui est cependant la force de la lune suivant M. Bernoulli.

Règle générale pour le calcul des marées.

3597. De tous les principes établis dans les articles précédens , il résulte une règle générale pour calculer la hauteur de la marée dans un lieu & un temps quelconque. Il faut trouver 1<sup>o</sup>, le lieu du soleil & de la lune , & leurs distances à la terre, 2<sup>o</sup>, calculer leurs déclinaisons , leurs hauteurs pour le lieu donné (1034) , supposant l'angle horaire plus grand de  $3^h \frac{1}{4}$  si c'est à Brest,  $6^h$  à S. Malo ou à Plymouth, &c. plus ou moins suivant l'heure du port, dont on trouve une table dans la connoissance des temps & dans tous les livres de navigation. Quand cette hauteur calculée sera zéro, l'on aura la base mer dans le lieu donné , car le sommet du sphéroïde sera dans l'horizon. Hors delà le carré du sinus de cette hauteur du sommet du sphéroïde aqueux , multiplié par le plus grand effet de la lune à la distance donnée (3595) , donnera la hauteur de la marée , ou la différence de la plus basse mer lunaire à celle qui a lieu au moment donné ; on fera le même calcul pour le soleil , & l'on ajoutera ensemble les deux hauteurs pour avoir la marée totale.

3598. Il est bon de la rapporter au point fixe ou au niveau naturel pour la combiner avec celle du soleil rapportée au même niveau ; mais pour avoir ce point de niveau, il est nécessaire de démontrer la proposition suivante.

LA HAUTEUR de l'eau vers le sommet du sphéroïde aqueux est double de sa dépression à  $90^\circ$  delà , l'une & l'autre étant comptées du terme naturel ou du niveau que les eaux atteindroient s'il n'y avoit point de marée. En effet , conservant les dénominations de l'art. 3333 , on trouve  $x = \frac{1}{3}\beta$ , c'est l'abaissement vers le petit axe ; ainsi l'élévation vers le grand axe est  $\frac{2}{3}\beta$ . L'endroit où le globe coupe l'ellipsoïde est à  $54^\circ 44'$  du grand axe, car

il faut que le carré du cosinus de cette distance fasse  $\frac{1}{3}$ , & la racine de  $\frac{1}{3}$  est le cosinus de  $54^{\circ} 44'$ . Ainsi quand on veut prendre un point fixe pour y rapporter les hauteurs de l'eau, il faut le prendre au-dessus des basses eaux, d'un tiers seulement de la différence entre la basse mer & la haute mer; afin que la montée soit double de la descente dans les syzygies. A Brest il y a 23 pieds de marée dans les cas les plus favorables; le tiers est 7 pieds 8 pouces, c'est la hauteur du niveau naturel de la mer au-dessus des basses eaux; plusieurs observateurs se sont trompés en prenant le milieu pour terme moyen.

Dans les marées des quadratures la hauteur totale étant la différence des effets de la lune & du soleil, si on les appelle  $l$  &  $s$  on aura  $\frac{2}{3}l - \frac{1}{3}s$  pour l'élévation, &  $\frac{1}{3}l - \frac{2}{3}s$  pour la dépression; ainsi leur rapport dépend de celui des forces  $l$  &  $s$ ; si ce rapport est celui de 5 à 2 (3595), l'élévation des eaux au-dessus du point fixe sera 8 fois plus grande que leur dépression, car en substituant pour  $l$  la valeur  $\frac{5}{2}s$ , la première quantité sera  $\frac{2 \cdot 5 - 1}{3}s = \frac{5}{3}s$ , & la seconde  $\frac{1 \cdot 5 - 2}{3}s = -\frac{1}{3}s$  seulement; c'est en effet ce que trouve M. Bernoulli à la fin de la pièce que nous avons citée.

3599. On objecte souvent aux attractionnaires que si l'attraction étoit la cause des marées, elle devoit avoir lieu dans les petites mers comme dans les grandes; il est donc nécessaire de montrer que dans de petites mers la marée doit être insensible. Supposons que  $SX$  (fig. 333), soit le globe terrestre,  $ABY$  le sphéroïde aqueux qui auroit lieu si la mer étoit libre & couvroit toute la terre; s'il y a un petit espace de mer qui n'ait que la largeur  $ZX$  d'orient en occident, les eaux ne peuvent pas prendre la courbure  $YS$ , car n'y ayant pas des eaux environnantes pour prendre la place de celles qui s'élèveroient, elles sont réduites à prendre une courbure semblable  $OR$ , enforte que  $YO$  soit égale & parallèle à  $SR$ , la surface  $COR$  étant toujours égale à la surface  $CZX$ . Par-là on voit sans aucun calcul que la marée y sera d'autant moins sensible que la longueur de la mer en longitude seramoindre, puisque la surface du triangle

Marées dans  
les petites  
mers.

Fig. 333.

$ZCX$  diminue comme  $ZX$  & que l'inclinaison des lignes  $OR$ ,  $ZX$ , ne sauroit jamais être plus grande que l'angle formé par le cercle & par l'ellipse en  $M$ ; aussi M. Bernoulli démontre par ses formules que la marée totale de cette mer est à celle qui auroit lieu dans la mer libre, comme la longueur  $ZX$  de cette mer d'orient en occident est au sinus total.

Il suit encore que la pleine mer y arrive quand la distance  $DM$  de l'astre au lieu donné est d'environ  $54^\circ$ , parce que c'est en  $M$  qu'est la plus grande inclinaison, & que c'est à  $54^\circ$  du sommet  $B$  qu'est l'intersection du cercle & de l'ellipse (3598). M. Bernoulli prouve également que si la mer avoit  $90^\circ$  d'étendue, la marée y feroit plus petite d'un sixième seulement que dans la mer libre; & elle y arriveroit  $1^h 5'$  plus tard que si toute la terre étoit inondée.

On voit aussi par ce qui précède que dans une mer étroite lorsque l'eau s'élève vers un rivage  $R$ , elle s'abaisse vers le rivage opposé en  $O$ .

Marées extraordinaires.

Je ne parlerai pas ici des modifications particulières que la loi générale des marées éprouve en différens pays, par la situation des mers & des rivages; on peut voir ce que Newton dit de Batsham dans le Tunquin, où il n'y a qu'une marée par jour; ce qu'on a écrit sur les marées extraordinaires de l'Europe, dans le second tome des voyages de Spon, & dans le dictionn. de la Martinière, & sur celle du détroit de Gibraltar, dans les *Transf. Philos.* 1762.

Quant au détail des observations qu'on a faites en France sur les marées, on les trouvera sur-tout dans les mémoires de l'académie, années 1710, 1712, 1713, 1714, 1720, & dans les pièces qui ont remporté le prix (3591).

L'attraction universelle est donc aujourd'hui démontrée par toutes les espèces de phénom. que nous avons parcourus, & nous n'avons à désirer que la perfection des méthodes & de l'analyse qui doivent nous en faire trouver jusques aux moindres circonstances, & dont nous avons donné ici tous les fondemens, avec les principaux résultats.

Conclusion.



# LIVRE VINGT-TROISIEME.

## TRIGONOMETRIE RECTILIGNE

### ET SPHÉRIQUE.

Nous avons renvoyé à ce XXIII<sup>e</sup> livre un grand nombre de propositions, qui auroient fait dans le cours des autres livres de trop longues digressions, & qui d'ailleurs devoient être présentées dans un certain ordre, & avec un enchaînement convenable. Ce livre auroit pu être placé à la tête de tout l'Ouvrage, comme dans les Leçons de M. de la Caille ; mais il y auroit annoncé l'astronomie sous un aspect trop rebutant ; d'ailleurs on peut très-bien lire le reste de l'Ouvrage, & le comprendre, sans remonter à toutes les démonstrations de Trigonométrie qu'il suppose.

### *Usage des sinus dans l'Astronomie.*

3600. Les sinus dans l'astronomie prennent sans cesse la place des angles & des arcs : il est donc essentiel d'en donner une idée simple, & de dissiper l'obscurité qui semble y être attachée pour un grand nombre de lecteurs ; nous allons donc considérer les sinus dans leurs usages les plus familiers ; on verra combien la considération en est essentielle dans l'astronomie & la trigonométrie, & en même temps combien l'idée en est simple.

Soit un triangle rectiligne *ABC* (fig. 314), rectangle en *C* ; que du centre *A* l'on décrive un arc de cercle *BD*, qui est la mesure de l'angle *A* ; on appelle *Sinus* de l'arc *BD*, la perpendiculaire *BC*, abaissée de l'extrémité *B* de l'arc sur le rayon *AD* qui passe par l'autre extrémité *D* du même arc. Ainsi la ligne *BC* est le *Sinus* de l'angle *A* ou de l'arc *BD* qui en est la mesure ; *AC* en est le *Cosinus*, *CD* le *Sinus verse*.

Planche A.LI,  
Fig. 314.

Définition  
des sinus.

Fig. 314.

3601. Les sinus ou perpendiculaires, tels que  $BC$ , ne suivent pas la même marche, le même progrès que les arcs dont ils sont les sinus; si, par exemple, l'arc  $lD$  est de  $45^\circ$  en sorte que l'arc  $DG$  de  $90^\circ$  en soit le double, la hauteur, ou la perpendiculaire  $AG$  ne sera pas double de la perpendiculaire  $BC$ ; on voit bien que la partie  $BG$  rampe, ou monte plus obliquement que la partie  $BD$ ; & sa hauteur, ou son sinus ne doit pas croître aussi rapidement que dans l'arc  $BD$ , quoique la longueur des arcs soit la même. Ainsi la marche, ou la proportion des sinus  $BC$ ,  $AG$ , est différente de celle de leurs arcs  $DB$ ,  $DG$ ; les géomètres ont calculé avec soin des tables de sinus pour tous les angles (3904), c'est-à-dire, qu'en supposant  $BD$  de  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ , &c. ils ont calculé les différentes longueurs des perpendiculaires, telles que  $BC$ ; le plus grand de tous ces sinus est le sinus total, ou le rayon lui-même  $AG$ , parce que l'arc  $DG$  de  $90^\circ$ , a la plus grande hauteur, la plus grande de toutes les perpendiculaires.

Utilité des sinus.

Fig. 315.

3602. Ces sinus viennent souvent se placer dans l'astronomie à la place de leurs arcs, & il est essentiel de les bien comprendre. Je suppose qu'une planète décrive une orbite  $APBD$  (fig. 315) autour du centre  $C$ , & que je sois placé au point  $O$  pour considérer son mouvement, cette planète en partant de la ligne des centres  $A$ , décrira un arc  $AP$ , elle ne me paroîtra éloignée de la ligne des centres que de la quantité  $PE$ , qui est le sinus de l'arc  $AP$  décrit par la planète; lorsqu'elle aura fait  $90^\circ$ , ou  $CB$ , elle sera la plus éloignée du centre  $C$  par rapport à mon œil, parce que le rayon, ou sinus total  $BC$  fera lui-même la distance apparente de la planète au centre  $C$  (en supposant la distance de l'œil extrêmement grande); au-delà du point  $B$  elle paroîtra revenir à la ligne des centres, parce que les sinus, tels que  $IG$ , diminueront de la même manière qu'ils avoient augmenté dans le premier quart-de-cercle  $AB$ , jusqu'à ce qu'en  $D$  l'arc parcouru étant de  $180^\circ$ , le sinus ou la perpendiculaire s'évanouisse comme en  $A$ .

La planète passant de l'autre côté de la ligne des centres au-delà du point  $D$ , le sinus qui avoit diminué

jusqu'à zéro, recommence à augmenter dans l'autre sens, par les mêmes degrés que dans le premier quart. Fig. 315

3603. Ainsi dans ce cas-là ce sont les sinus & non point les arcs parcourus par la planète, qui mesurent son mouvement vu du point  $O$ ; il est donc essentiel alors de recourir aux tables des sinus pour savoir à quelle distance la planète paroîtra relativement à la ligne des centres  $OACD$  en différens temps de sa révolution ou à différens degrés de son orbite. Cet exemple suffit pour faire voir la nécessité d'employer les sinus dans l'astronomie; on en a vu bien d'autres dans le cours de cet ouvrage. Toutes les fois qu'une équation, ou un effet périodique, dépend de la longueur d'un arc, qu'on appelle *Argument* de cette équation, elle est ordinairement proportionnelle au sinus de cet arc; on en a vu plusieurs exemples (1472, 3495, &c.).

Argument  
d'une équation.

3604. Nous ferons à cette occasion deux remarques essentielles, qu'il faut bien concevoir & retenir avec soin, parce qu'elles sont d'un usage continuel dans les ouvrages modernes, & dans les formules où il entre des sinus; la première c'est que les sinus deviennent négatifs ou changent de signe au-delà de  $180^\circ$ , c'est-à-dire, dans le  $3^\circ$  & le  $4^\circ$  quart-de-cercle; en effet, le sinus  $EP$  augmente de valeur jusqu'à ce qu'il soit égal au rayon  $CB$ , il diminue ensuite jusqu'au point  $D$  où il devient nul, mais aussi-tôt il renaît de l'autre côté du point  $B$ ; or toute quantité qui ayant diminué jusqu'à zéro, continue sa marche de la même manière qu'auparavant, doit augmenter dans un sens contraire; c'est-à-dire, qu'elle devient négative, si l'on suppose qu'elle étoit d'abord positive, puisqu'elle est en sens contraire de ce qu'elle étoit. Ainsi l'équation —  $7'' \sin. t$  (3495) nous apprend qu'il faut ôter  $7''$  de la longitude du soleil, lorsque l'angle  $t$  est de  $3^\circ$ ; mais il faudra les ajouter lorsque l'angle  $t$  sera de neuf signes; & cette équation sera toujours additive dès que l'angle  $t$  sera de plus de  $180^\circ$ .

Remarques  
essentielle  
sur les sinus.

Les sinus  
changent de  
signe à  $180^\circ$ .

3605. On doit faire une remarque semblable sur les cosinus; nous avons dit que si  $PE$  est le sinus de l'arc

*Fig. 315.* *AP*, *CE* s'appelle son cosinus ou le sinus de son complément à  $90^\circ$ , c'est-à-dire, de l'arc *PB*; le cosinus *CE* diminue visiblement à mesure que l'arc *AP* augmente, & il s'évanouit quand cet arc parvient à  $90^\circ$ , alors *CE* est réduite au seul point *C*, enforte que  $\cos. 90^\circ$  ou  $\cos. 3$  signes  $= 0$ . Au-delà du point *B*, le  $\cos.$  passe de l'autre côté du centre *C*; car quand la planète est en *F* le cosinus de son élongation ou de l'arc *AF* est *CG*, qui est opposé à *CE*, & négatif par rapport à lui; le cosinus *CG* devient le plus grand lorsque la planète est en *D*, car il est égal alors au rayon même du cercle ou au sinus total, enforte que  $\cos. 0 = 1$  &  $\cos. 180^\circ = -1$ ; ce cosinus diminue ensuite jusqu'à ce que la planète étant au point *H*, le cosinus redevienne égal à zéro; enforte que  $\cos. 270^\circ = 0$ , ou  $\cos.$  neuf signes  $= 0$ ; enfin le cosinus depuis *H* jusqu'en *A*, se trouve de la même quantité & du même signe que dans le premier quart *AP* de la révolution, d'où suit la règle, suivante: *Les sinus changent de signe dans le troisième & le quatrième quart-de-cercle; les cosinus changent dans le second & dans le troisième.*

Règle  
essentielle.]

3606. Il n'en est pas d'une tangente telle que *AT* comme du sinus; lorsque son arc *AR* surpasse  $90^\circ$ , elle change de signe quoiqu'elle paroisse du même côté que le sinus, parce que le point de rencontre *T* de la tangente *AT* & du rayon *CT* passe de l'autre côté, & se trouve sur le rayon prolongé au-delà du centre, vers la partie opposée.

3607. Pour avoir le sinus d'un arc *ABDK* qui surpasse  $180^\circ$ , il suffit de retrancher  $180$ , & de prendre le sinus de l'arc *DK*, parce que le sinus de deux degrés ou celui de  $182$  est le même, comme on le voit par la figure, où la ligne *KG* est le sinus de *DK*, de *KA* & de *ADK*; ainsi quand une quantité varie comme les sinus, elle devient nulle à  $180^\circ$ , & recommence à croître après  $180$  de la même manière qu'elle croissoit vers zéro; par la même raison le sinus de  $380^\circ$  est le même que celui de  $20^\circ$ .

Les sinus  
sont des frac-  
tions.

3608. LA SECONDE REMARQUE importante que nous avons à faire sur les sinus, est la manière de  
les



les considérer comme des fractions du rayon ; les tables des sinus ne sont proprement que des suites de fractions décimales dont l'unité est le rayon ou le sinus total , c'est-à-dire , le sinus de  $90^{\circ}$  ; par exemple, je trouve dans les tables que pour  $90^{\circ}$  le sinus est 100 ; & que pour  $30^{\circ}$  il est 50 , c'est-à-dire , la moitié de 100 , je puis donc dire également que le sinus total est 1 & que le sin. de  $30^{\circ}$  est  $\frac{1}{2}$  , ou 0, 5 , pour l'exprimer dans la forme des décimales. De même le sinus de  $10^{\circ}$  sera 0, 17 , c'est-à-dire ,  $\frac{17}{100}$  du rayon ou du sinus total pris toujours pour unité.

3609. Ainsi toutes les fois qu'une quantité se trouve multipliée par un sinus ; comme quand nous disons 20'' sin.  $30^{\circ}$ , cela veut dire que ces 20'' sont multipliées par une fraction ; & cette fraction, sin.  $30^{\circ}$ , n'est autre chose que une demie , parce qu'on sous-entend toujours que ce sinus se rapporte au sinus total dont il est une partie.

Les sinus sont les fractions du rayon.

Dans la fig. 315, supposons que la plus grande distance de la planète au centre C, par exemple d'un satellite par rapport à Jupiter , où le rayon CB, soit de 20'', on pourra dire en général que sa distance apparente PE vue de la terre dans toute autre position du satellite sur son orbite , est égale à 20'' sin. AP. En effet, lorsque le sinus de l'arc AP où la perpendiculaire PE sera la moitié de BC, la distance PE ne paroîtra que de 10'', parce que 20'' sin. AP feront 20'' multipliées par une demie ; quand le sinus de AP sera la dixième partie du rayon, 20'' sin. AP fera 2'' ou la dixième partie de 20''. Telle est la manière usitée actuellement de considérer les sinus ; on sent bien qu'il en est de même des cosinus, ainsi 20'' cos.  $60^{\circ}$  est égal à  $\frac{20''}{2} = 10''$ , parce que cos.  $60^{\circ} = \sin. 30^{\circ}$ , n'est autre chose que  $\frac{1}{2}$ .

Fig. 315.

3610. A l'égard des tangentes elles ne sont des fractions proprement dites que jusqu'à  $45^{\circ}$  ; au-delà de ce terme ce sont des nombres plus grands que l'unité. Ainsi 20'' tang.  $56^{\circ} 19' = 30$ , parce que la tangente de  $56^{\circ} 19'$  est égale à  $1\frac{1}{2}$  ; comme il est aisé de s'en appercevoir en ouvrant les tables de sinus.

3611. La troisième remarque essentielle sur les sinus

Expression  
des sinus en  
lignes.  
Fig. 314.

a pour objet leur expression en lignes, dont nous avons fait un usage fréquent. Si l'on a un triangle rectangle  $ABC$  (fig. 314) dont l'hypothénuse  $AB$  soit prise pour rayon, le côté  $BC$  peut s'exprimer par  $AB \cdot \sin. A$ , & le côté  $AC$  par  $AB \cdot \cos. A$ ; car suivant les premiers principes de la trigonométrie rectiligne on a cette proportion  $R : \sin. A :: AB : BC$ , ce qui revient à  $1 : \sin. A :: AB : BC$ , puisque par le mot de rayon nous entendons toujours l'unité (3608); donc on a  $BC = \frac{AB \cdot \sin. A}{1} = AB \sin. A$ . Par la même raison l'on a  $1 : \cos. A :: AB : AC$ , c'est-à-dire,  $AC = AB \cdot \cos. A$ . Si l'on décrit sur le rayon  $AB$  un arc de cercle  $DBG$ ,  $BC$  est visiblement le sinus de l'arc  $ED$ ,  $AC$  égal à  $BE$  est le sinus de l'arc  $EG$  ou le cosinus de l'arc  $BD$ , c'est-à-dire, de l'angle  $A$ ; si donc le sinus  $BC$  de l'angle  $A$  étoit la moitié du rayon  $BA$ , l'on auroit  $BC = \frac{1}{2} AB$ , donc en général quelle fraction que soit  $BC$  du rayon  $AB$ , elle sera exprimée par  $AB \cdot \sin. A$ , puisque  $\sin. A$ , comme on l'a dit ci-dessus, n'est jamais qu'une fraction du rayon, ou, ce qui revient au même, le rayon multiplié par une fraction. C'est-à-dire, enfin que la perpendiculaire d'un triangle rectangle est égale à l'hypothénuse multipliée par une fraction, & que cette fraction se trouve dans les tables de sinus.

3612. Delà il suit que si la même ligne droite répond à deux arcs de rayons différens, les fractions qui dans nos tables expriment les sinus de ces arcs seront en raison inverse des rayons; car  $\sin. BD$  étant égal à  $BC$  divisée par le rayon, si  $BC$  est la même & que ce rayon change,  $\sin. B$  augmentera d'autant plus que le rayon diminuera (3151).

3613. Nous nous servons souvent d'une autre expression pour les sinus, par exemple, le sinus de l'angle  $A$  ou de l'arc  $BD = \frac{BC}{BA}$ ; cette expression revient au même que celle des livres de trigonométrie ordinaire, car  $AB$  est à  $BC$  comme le rayon est au sinus de l'arc  $BD$ , mais par le mot de rayon nous entendons toujours l'unité, donc

$AB : BC :: 1 : \sin. BD$ , donc  $\sin. BD = \frac{BC}{AB}$ , qui est une fraction de l'unité. Il en seroit de même des cosinus & des tangentes.

3614. C'est par le moyen de cette expression que nous démontrerons une propriété des triangles rectilignes, dont nous avons fait usage à l'article 1197. Soit un triangle  $STV$  (fig. 63), & la perpendiculaire  $TX$  abaissée sur le prolongement de  $SV$ ; on a  $ST^2 = TX^2 + SX^2 = TX^2 + SV^2 + 2SV.VX + VX^2$ , mais  $TX^2 = TV^2 - VX^2$ ; donc  $ST^2 = TV^2 + SV^2 + 2SV.VX$ ; ajoutant de part & d'autre  $2SV.TV$ , l'on aura  $2SV.TV - 2SV.VX = SV^2 + 2SV.TV + TV^2 - ST^2$ , d'où l'on tire la proportion  $2SV.TV : 1 :: \overline{SV+TV}^2 - ST^2 : 1 - \frac{VX}{TV}$  ou  $1 - \cos. V$ ; ou ce qui revient au même  $4SV.TV : (SV+TV)^2 - ST^2 :: 2R : \sin. \text{verfe } V$ .

Fig. 63.

3615. On trouvera dans les leçons d'astronomie de M. de la Caille, plusieurs formules de trigonométrie, qu'il a démontrées, & qui servent à substituer des sinus pour des tangentes, &c. dans différens calculs algébriques; mais elles ne m'ont pas paru d'un assez grand usage pour devoir les replacer ici; je vais seulement rappeler celles des produits des sinus & des cosinus, dont on a vu l'usage essentiel & continu dans les calculs des deux livres précédens.

3616. Je supposerai aussi comme des choses qui n'ont pas besoin de démonstration, quelques propriétés des triangles  $TDE$ ,  $TAN$  (fig. 320): 1°.  $TN : AN :: TE : ED$ , c'est-à-dire, le rayon est à la tangente d'un arc, comme le cosinus est au sinus; 2°.  $TA = \sqrt{TN^2 + AN^2} = \sqrt{1 + tt}$ , en nommant  $t$  la tangente  $AN$ ; 3°.  $TA : AN :: TD : DE$ , ou  $\sqrt{1 + tt} : t :: 1 : \sinus$ , donc le sinus est  $\frac{t}{\sqrt{1 + tt}}$ . Le cosinus qui est égal au sinus divisé par la tangente devient  $\frac{1}{\sqrt{1 + tt}}$ . La sécante est égale à  $\frac{1}{\sin}$ , la cosécante  $= \frac{1}{\cos}$ .

3617. CONNOISSANT les sinus & les cosinus de deux

# 668 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

*arcs, trouver les sinus & les cosinus de la somme & de la différence des deux arcs.*

*Fig. 316.* Je suppose que  $AB$  &  $AD$  (*fig. 316*) soient les deux arcs donnés, dont les sinus sont  $AF$  &  $DG$ , & dont les cosinus sont  $CF$  &  $CG$ ; la somme de ces deux arcs est l'arc  $BD$ , dont le sinus est  $DE$  & le cosinus  $CE$ ; ayant abaissé la perpendiculaire  $GM$  sur le sinus  $DE$ , l'on aura deux triangles semblables  $ACF$  &  $DGM$ , qui donnent cette proportion,  $CA:CF::DG:DM$ , donc  $DM = \frac{CF \cdot DG}{CA}$ ; de même en abaissant la perpendiculaire  $GH$ , on aura par les triangles semblables  $CAF$ ,  $CGH$ ,  $CA:CG::AF:GH$ , donc  $GH = \frac{AF \cdot CG}{CA} = ME$ ; ajoutant ensemble les valeurs de  $DM$  & de  $ME$ , l'on aura  $DE$ , ou le sinus de la somme  $DB$ ,  $= \frac{AF \cdot CG + CF \cdot DG}{CA}$ ; mais  $\frac{AF}{CA}$  est le sinus de l'arc  $AB$  (*3613*), & ainsi des trois autres lignes; donc si l'on appelle  $A$  &  $B$  les deux arcs donnés, l'on aura  $\sin. (A+B) = \sin. A \cdot \cos. B + \cos. A \cdot \sin. B$ .

Sinus de la  
somme.

*3618.* Les triangles semblables  $CAF$  &  $DGM$  donnent encore cette proportion,  $CA:AF::DG:GM$ ; donc  $GM = \frac{AF \cdot DG}{CA} = EH$ ; par les triangles semblables  $CAF$ ,  $CGH$ , l'on a aussi  $CA:CG::CF:CH$ ; donc  $CH = \frac{CF \cdot CG}{CA}$ , la différence entre les valeurs de  $CH$  & de  $EH$ , fera la valeur de  $CE = \frac{CF \cdot CG - AF \cdot DG}{CA}$ ; donc faisant  $CA = 1$ , l'on a  $\cos. (A+B) = \cos. A \cdot \cos. B - \sin. A \cdot \sin. B$ .

Cosinus de  
la somme.

*3619.* Si l'on prolonge  $DG$  jusqu'en  $N$ , & qu'on tire les perpendiculaires  $EN$ ,  $EP$ , l'on aura des triangles semblables  $CAF$ ,  $DEN$ ; donc  $CA:CF::DE:DN$ , &  $DN = \frac{DE \cdot CF}{CA}$ . Par les triangles semblables  $CAF$ ,  $CEP$  on a  $CA:AF::CE:EP$ ; donc  $EP = \frac{AF \cdot CE}{CA} = GN$ ; si l'on retranche la valeur de  $GN$  de celle de  $DN$ , on aura  $DG = \frac{DE \cdot CF - AF \cdot CE}{CA}$ ; si l'on appelle  $A$  le plus grand arc  $DB$ , &

*B* le plus petit arc *AB*, leur différence est l'arc *AD*; la valeur de *DG* devient  $\sin. (A - B) = \sin. A. \cos. B - \sin. B. \cos. A$ . Sinus de la différence.  
Fig. 316.

3620. Les triangles semblables *CAF*, *CEP*, donnent encore cette proportion,  $CA : CF :: CE : CP$ , donc  $CP = \frac{CE \cdot CF}{CA}$ ; mais à cause des triangles semblables *CAF*, *DEN*, on a aussi  $CA : AF :: DE : EN$ , ou  $EN = \frac{DE \cdot AF}{CA} = PG$ , donc la somme  $CG = CP + PG = \frac{CE \cdot CF + DE \cdot AF}{CA}$ ; nommant encore *A* & *B* les arcs *DB* & *AB*, on a *CG*, cosinus de leur différence *AD*, ou  $\cos. (A - B) = \cos. A. \cos. B + \sin. A. \sin. B$ . Cosinus de la différence.

En considérant la somme, ou la différence des équations démontrées dans les quatre articles précédens, on en conclura aisément les quatre valeurs suivantes qui sont d'un usage continuel dans les calculs de l'attraction, pour résoudre les produits des sinus en sinus simples des arcs multiples.

$$3621. \sin. A. \cos. B = \frac{1}{2} \sin. (A + B) + \frac{1}{2} \sin. (A - B)$$

$$3622. \sin. A. \sin. B = \frac{1}{2} \cos. (A - B) - \frac{1}{2} \cos. (A + B)$$

$$3623. \cos. A. \cos. B = \frac{1}{2} \cos. (A + B) + \frac{1}{2} \cos. (A - B)$$

$$3624. \cos. A. \sin. B = \frac{1}{2} \sin. (A + B) - \frac{1}{2} \sin. (A - B)$$

Si l'on fait  $B = A$ , ces quatre équations produiront les trois suivantes, que nous avons aussi employées fort souvent dans les calculs de l'attraction; il suffit, pour les concevoir, de se rappeler que le cosinus de zéro = 1 (3605).

$$3625. \sin. A. \cos. A = \frac{1}{2} \sin. 2A.$$

3626.  $\sin. A^2$  ou  $(\sin. A)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. 2A$ . L'on voit par cette équation pourquoi nous avons pris à la place des carrés des sinus des latitudes, les sinus versés des latitudes doubles (2692, 3567).

$$3627. \cos. A^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2A.$$

Si à la place de *A* l'on met  $\frac{1}{2} A$ , la formule 3626 devient :

$$3628. 2 (\sin. \frac{1}{2} A)^2 = 1 - \cos. A.$$

3629.  $\text{Cof. } B - \text{cof. } A = 2 \sin. \frac{A+B}{2} \cdot \sin. \frac{A-B}{2}$ ; en effet, soit  $a+b=A$ , &  $a-b=B$ , c'est-à-dire,  $a = \frac{A+B}{2}$ , &  $b = \frac{A-B}{2}$ ; donc par la formule 3622, on aura  $\sin. \frac{A+B}{2} \cdot \sin. \frac{A-B}{2} = \frac{1}{2} \text{cof. } B - \frac{1}{2} \text{cof. } A$ ; donc  $\text{cof. } B - \text{cof. } A = 2 \sin. \frac{A+B}{2} \cdot \sin. \frac{A-B}{2}$ . Cette équation servira à la démonstration d'un théorème fondamental de la trigonométrie sphérique (3743).

3630. Connoissant la valeur de  $\sin. A^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cof. } 2A$ , il est aisé de trouver  $\sin. A^3$  ou le cube de  $\sin. A$ ; car il ne faut que multiplier  $\sin. A^2$  par  $\sin. A$ , on aura  $\sin. A^3 = \frac{1}{2} \sin. A - \frac{1}{2} \text{cof. } 2A \cdot \sin. A$ ; si l'on développe le dernier terme du second membre, savoir  $-\frac{1}{2} \text{cof. } 2A \cdot \sin. A$ ; par le moyen de la formule 3624, on aura  $\frac{1}{4} \sin. 3A - \frac{1}{4} \sin. A$ , qui étant retranché de  $\frac{1}{2} \sin. A$  donnera  $\sin. A^3 = \frac{1}{4} \sin. A - \frac{1}{4} \sin. 3A$ .

3631. Pour trouver de même  $\text{cof. } A^3$ , l'on multipliera  $\text{cof. } A^2$  ou  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{cof. } 2A$  (3627), par  $\text{cof. } A$ , l'on aura  $\frac{1}{2} \text{cof. } A + \frac{1}{2} \text{cof. } 2A \cdot \text{cof. } A$ ; le second terme développé par la formule 3623, fera  $\frac{1}{4} \text{cof. } 3A + \frac{1}{4} \text{cof. } A$ , qui ajouté à  $\frac{1}{2} \text{cof. } A$ , donne  $\frac{1}{4} \text{cof. } A + \frac{1}{4} \text{cof. } 3A$ .

3632. On aura par des opérations semblables,  $\sin. A^4$  &  $\text{cof. } A^4$ : il ne s'agit que de multiplier les valeurs de  $\sin. A^3$  & de  $\text{cof. } A^3$  par  $\sin. A$  &  $\text{cof. } A$ , & de développer chacun des termes du produit par les formules précédentes.

$$\sin. A^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \text{cof. } 2A + \frac{1}{8} \text{cof. } 4A.$$

$$\text{Cof. } A^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \text{cof. } 2A + \frac{1}{8} \text{cof. } 4A.$$

Ces premiers termes  $\sin. A$ ,  $\sin. A^2$ ,  $\sin. A^3$ ,  $\sin. A^4$  suffisent en faisant évanouir les fractions, pour faire apercevoir la loi suivant laquelle ils augmentent, & pour continuer la série; mais on a rarement besoin des termes ultérieurs. Voyez M. Euler, *Introd. in anal. infin.* I. 220.

3633. APRÈS avoir démontré ces formules essentielles à nos calculs, je passe à quelques autres propositions de trigonométrie rectiligne, qui ne se trouvent point dans

les livres ordinaires, & qui font employées dans cette astronomie.

Si dans les formules 3617 & 3618, on fait  $A=B$ , on aura  $\sin. 2A = 2 \sin. A \cdot \cos. A$ ,  $\cos. 2A = \cos. A^2 - \sin. A^2$ ; donc  $\tan. 2A \left( = \frac{\sin. 2A}{\cos. 2A} \right) = \frac{2 \sin. A \cos. A}{\cos. A^2 - \sin. A^2}$ . Nous en avons fait usage pour la nutation (3574).

Soit un arc  $KD = KG$  (fig. 334)  $= A$  &  $KK = B$ ; ayant partagé  $RG$  &  $RD$  en deux parties égales en  $S$  & en  $P$  & tiré les tangentes  $RM$ ,  $RL$ , on a  $RM = \tan. \frac{1}{2}(A+B)$ ,  $RL = \tan. \frac{1}{2}(A-B)$ ; l'angle  $RHG$  ayant pour mesure la moitié de  $RG$  est égal à l'angle  $RCM$ , donc les triangles rectangles  $GIH$ ,  $CRM$  sont semblables; donc  $IH : IG :: CR : RM$ , ou  $\cos. A + \cos. B : \sin. A + \sin. B :: 1 : \tan. \frac{1}{2}(A+B)$ . De même par les triangles semblables  $IGR$ ,  $CRL$ , on a  $IG : IR :: CR : RL$  ou  $\sin. A + \sin. B : \cos. B - \cos. A :: 1 : \tan. \frac{1}{2}(A-B)$ , par conséquent  $\frac{\sin. A + \sin. B}{\cos. A + \cos. B} = \tan. \frac{1}{2}(A+B)$  &  $\frac{\sin. A + \sin. B}{\cos. B - \cos. A} = \cot. \frac{1}{2}(A-B)$ ; divisant la première équation par la seconde,  $\frac{\cos. B - \cos. A}{\cos. A + \cos. B} = \tan. \frac{1}{2}(A+B) \tan. \frac{1}{2}(A-B)$ ; nous en ferons usage (3733).

Fig. 334.

Si l'on appelle  $n$  la tangente d'un arc  $KR$ , on aura la cosécante du double, ou  $CB = \frac{1+n^2}{2n}$ ; car puisque  $KR = RP$ , l'angle  $RCB = BDC$ , donc  $CB = BD = AD - AB = \cot. KR - \cot. 2KR = \frac{1}{n} - \cotang. 2KR$ ; mais si la  $\tan. = n$  la  $\cot.$  du double est  $\frac{1-n^2}{2n}$  (3638) donc  $CB = \frac{1}{n} - \frac{1-n^2}{2n} = \frac{1+n^2}{2n}$ . Nous en ferons usage (3982).

Cosécante d'un arc double.

On trouvera plusieurs autres formules semblables dans M. Euler, dans les leçons de M. de la Caille, pages 9 & suiv. dans M. Mauduit; mais nous n'en ferons aucun usage.

3634. Soient deux cercles concentriques  $QARFQ$ ,  $MkLNM$ , (fig. 317) une ligne  $AQM$  tangente au cercle intérieur en  $Q$ , avec une perpendiculaire  $AE$ , une ligne  $QR$  tirée à volonté dans le petit cercle, une ligne

Fig. 317.

*Fig. 317.* *NK* tirée de l'extrémité *N* de la ligne *MON*, parallèlement à *QR*, & une autre ligne *NL* faisant un angle *LNE* égal à l'angle *ENK*, avec la ligne *NE* parallèle au diamètre *QCF*; on aura  $NK + NL = 2 QR$ ; en effet *NK* est le double du sin. de la demi-somme des arcs *NE* & *EK*, *NL* est le double du sinus de leur demi-différence; ainsi l'on a  $\sin. \frac{1}{2} NL = \sin. (\frac{1}{2} NLE - \frac{1}{2} LE)$ , donc on a (3619)  $\sin. \frac{1}{2} NL = \sin. \frac{1}{2} NLE \cos. \frac{1}{2} LE - \sin. \frac{1}{2} LE \cos. \frac{1}{2} NLE$ ,  $\sin. \frac{1}{2} NLEK = \sin. (\frac{1}{2} NE + \frac{1}{2} EK) = \sin. (\frac{1}{2} NLE + \frac{1}{2} LE) = \sin. \frac{1}{2} NLE \cos. \frac{1}{2} LE + \sin. \frac{1}{2} LE \cos. \frac{1}{2} NLE$ , donc la somme des deux sinus de  $\frac{1}{2} NL$  & de  $\frac{1}{2} NK = 2 \sin. \frac{1}{2} NLE \cos. \frac{1}{2} LE$ , & la somme des deux cordes *NL* & *NK*  $= 4 \sin. \frac{1}{2} NLE \cos. \frac{1}{2} LE$ . Mais  $QO = CQ \cos. CQO$  (3611)  $= CQ \cos. \frac{1}{2} FR = CQ \cos. \frac{1}{2} LE$ ,  $QR = 2 CQ \cos. \frac{1}{2} LE$ , & parce  $CQ = \frac{1}{2} N = \sin. \frac{1}{2} NLE$ ,  $QR = 2 \sin. \frac{1}{2} NLE \cos. \frac{1}{2} LE$ ;  $2 QR = 4 \sin. \frac{1}{2} NLE \cos. \frac{1}{2} LE$ , c'est-à-dire, la même chose que la somme des deux cordes; ainsi *NK* + *NL* sont égales à  $2 QR$ .

3635. De là il suit que si ces deux cercles devenoient des ellipses comme dans la *fig. 310*, la même propriété auroit lieu; car si l'on incline sur le plan des deux ellipses des cercles dont les diamètres soient égaux aux grands axes des ellipses, & que le sinus de l'inclinaison soit au sinus total, comme le petit axe de chaque ellipse est au grand axe, ce qui a lieu toutes les fois que ces cercles se meuvent autour de la même ligne, on pourra considérer ces ellipses comme les projections de ces cercles (1827), & les lignes *QR NK* (*fig. 317*) formeront par leurs projections des lignes qui auront entre elles le même rapport; puisque toutes les lignes diminueront dans le sens du petit axe, suivant le rapport du sinus total au sinus de l'inclinaison; donc ce qui est vrai des cercles sera également vrai pour les ellipses, & l'on aura  $NK + NL = 2 QR$ , nous en avons fait usage pour la figure de la terre (3580).

Tangente  
de la moitié  
d'un angle.  
*Fig. 318.*

3636. Soit un triangle rectangle *MPF* (*fig. 318*), dont l'angle *PFM* soit divisé en deux parties égales, la tangente



tangente de la moitié de l'angle  $PFM$  sera égale à  $\frac{PM}{PF+FM}$ . Fig. 316.

Car ayant pris  $FA=FM$ , on aura l'angle  $A$  égal à la moitié de l'angle  $MFP$ , & la tangente de l'angle  $A = \frac{PM}{PA}$

(3611)  $= \frac{PM}{PF+FA} = \frac{PM}{PF+FM}$ . Nous en avons fait usage (1240).

Delà il suit que  $\frac{\sin. F}{1 + \cos. F} = \text{tang. } \frac{1}{2} F$ ; mais  $\frac{\sin. F}{1 + \cos. F} = \frac{1 - \cos. F}{\sin. F}$ ; donc  $\frac{1 - \cos. F}{\sin. F} = \text{tang. } \frac{1}{2} F$ ; &  $\frac{1}{\sin. F} = \text{tang. } \frac{1}{2} F = \cotang. F$  (3990).

3637. Dans un triangle rectiligne tel que  $FOM$  dont on connoît deux côtés  $FO$ ,  $FM$ , & l'angle compris  $OFM$ , le 3<sup>e</sup> côté  $OM$  est égal à  $\sqrt{FO^2 - 2 OF.FM. \cos. F + FM^2}$ ; car ayant abaissé la perpendiculaire  $MH$  sur le côté  $FO$  prolongé en  $H$ , l'on a  $FH = FM \cos. F$ , &  $OH = FO - FH = FO - FM \cos. F$ ; on a aussi  $MH = FM \sin. F$ , donc  $MO^2 = FM^2 \cos. F^2 - 2 FM.FO. \cos. F + FO^2 + FM^2 \sin. F^2$ ; mais  $\sin. F^2 + \cos. F^2 = 1$ , donc  $MO^2 = FM^2 + FO^2 - 2 FM.FO. \cos. F$ , &  $MO = \sqrt{FM^2 + FO^2 - 2 FM.FO. \cos. F}$ ; nous nous sommes servi de cette propriété (1197, 3290).

3638. Si les tangentes de deux arcs  $A$  &  $B$  sont  $T$  &  $t$ , on aura  $\text{tang. } (A \pm B) = \frac{T \pm t}{1 \mp Tt}$ ; car  $\text{tang. } (A \pm B) = \frac{\sin. A \pm B}{\cos. A \pm B} = \frac{\sin. A. \cos. B \pm \cos. A. \sin. B}{\cos. A. \cos. B \mp \sin. A. \sin. B}$  (3617 & suiv.), (divisant le numérateur & le dénominateur par  $\cos. A \cos. B$ )  $= \frac{\text{tang. } A \pm \text{tang. } B}{1 \mp \text{tang. } A. \text{tang. } B} = \frac{T \pm t}{1 \mp Tt}$ . Ceci servira pour la proposition suivante, & pour l'art. 3985. Nous avons déjà supposé (3633) que la tangente d'un arc étant  $t$ , la cotangente du double étoit  $\frac{1-t^2}{2t}$ , c'est une suite de ce qui précède.

Tangente de la somme & de la différence de deux arcs.

3639. TROUVER la différence entre l'hypothénuse d'un triangle sphérique rectangle & le plus grand côté, en supposant que le petit angle ne surpasse pas huit ou dix degrés; en sorte que la différence cherchée soit un arc sensiblement égal à sa tangente. Soit le triangle sphérique  $BCD$

Réduction à l'écliptique.

Fig. 323

(fig. 323) rectangle en  $D$ , dans lequel on cherche la différence entre  $BC$  &  $BD$ ; on a d'abord cette proportion (3668)  $R : \cos. B :: \tan. BC : \tan. BD$ ; ainsi  $\tan. BD = \cos. B \tan. BC$ ; & si l'on appelle  $s$  le sin. versé de l'angle  $B$ ,  $1 - s$  son cosinus,  $z$  la tangente de l'arc  $BC$ , l'on aura  $\tan. BD = (1 - s)z$ ; donc la tangente de la différence entre les arcs  $BC$  &  $BD$ , ou la différence elle-même, si elle est fort petite, & qu'elle soit égale à sa tangente, fera (3638)  $\frac{z - (1 - s)z}{1 + z(1 - s)z} = \frac{sz}{1 + zz - szz} =$

$\frac{sz}{(1 + zz) \left(1 - \frac{szz}{1 + zz}\right)}$ ; mais  $1 - \frac{szz}{1 + zz}$  en faisant la division actuelle est  $= 1 + \frac{szz}{1 + zz}$ ; car on peut négliger les termes suivans (3288) à cause de la petitesse de  $s$  & de  $\frac{szz}{1 + zz}$ ; donc la différ. des deux arcs  $BC$  &  $BD$  est  $\frac{sz}{1 + zz} \left(1 + \frac{szz}{1 + zz}\right)$  ou  $\frac{sz}{1 + zz} + \frac{sz \cdot szz}{(1 + zz)(1 + zz)} = \frac{sz}{\sqrt{1 + zz}}$ .

$\frac{1}{\sqrt{1 + zz}} + \frac{s^2 zz}{1 + zz} \cdot \frac{z}{\sqrt{1 + zz}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + zz}}$ ; mais lorsque  $z$  est la tangente d'un arc  $BC$ , que j'appellerai  $A$ , son sinus est  $\frac{z}{\sqrt{1 + zz}}$ , &  $\frac{1}{\sqrt{1 + zz}}$  en est le cosinus (3616); donc la différence des arcs  $BC$  &  $BD$  sera  $s \cdot \cos. A \cdot \sin. A + s^2 \cdot \sin. A^2 \cdot \sin. A \cdot \cos. A$ . & développant ces produits (3625, 3626), l'on a  $\frac{1}{2} s \sin. 2A + \frac{1}{4} s^2 \sin. 2A - \frac{1}{8} s^2 \sin. 4A$ ; c'est la réduction à l'écliptique, en supposant que  $BC$  soit l'argument de latitude (1133).

Si l'on abaisse un arc  $DK$  perpendiculaire sur  $BC$ ,  $BK$  sera plus petit que  $BD$  par la même raison que  $BD$  est plus petit que  $BC$ ; ainsi la différence entre  $BC$  &  $BK$ ; où l'arc  $CK$  fera sensiblement le double de la réduction, sur-tout si l'angle  $B$  est fort petit; il sera donc égal à  $s \sin. 2A$ ; c'est la différence entre la conjonction & le milieu de l'éclipse, qui a lieu pour les éclipses de lune, & mêmes pour celles des satellites de Jupiter, en la diminuant de moitié (2911).

3640. On aura par la même méthode une expression du cosinus de  $CD$ , dont on a besoin dans les calculs de la théorie de la lune, & que je vais y appliquer immédiatement. Soit  $TNS$  (fig. 319) le plan de l'écliptique, &  $TNV$  le plan de l'orbite de la lune, sur lequel on abaisse du centre  $S$  du soleil la perpendiculaire  $SV$ ; supposons  $SN$  &  $VN$  perpendiculaires à  $TN$ , l'angle  $SNV$  fera égal à l'inclinaison des deux plans (3651), l'angle  $STV$  fera égal à la latitude du soleil par rapport à l'orbite de la lune,  $\frac{TV}{TS}$  en fera le cosinus (3613); supposant  $TN=1$ ,  $NS=z$ , cos.

$SNV=1-s$ , on a  $TS=\sqrt{1+zz}$ ,  $NV=(1-s)z$ , car  $R : \cos. N :: NS : NV$  (3611); donc l'hypothénuse

$$TV=\sqrt{1+(1-s)^2zz}=\sqrt{1+zz-(2s-s^2)zz}=\sqrt{1+zz}\sqrt{1-\frac{(2s-s^2)zz}{1+zz}}; \text{ donc } \frac{TV}{TS}=\sqrt{1-\frac{(2s-s^2)zz}{1+zz}}$$

& réduisant ce binôme en série (3287)  $=1-\frac{(s-\frac{1}{2}s^2)z^2}{1+zz}-\frac{\frac{1}{2}s^2z^4}{(1+zz)^2}$ ; mais lorsque  $z$  est la tangente d'un angle  $STN$ ,

que j'appellerai  $A$ , son sinus est  $\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$  & son cosinus

$$\frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \text{ (3616); donc } \frac{z}{1+zz} = \sin. A. \cos. A = \frac{1}{2} \sin. 2A, \&$$

$$\frac{z^4}{(1+zz)^2} = \sin. A^4 = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cos. 2A + \frac{1}{8} \cos. 4A \text{ (3632);}$$

donc  $\frac{TV}{TS}$  ou le cosinus de l'angle  $STV$ , c'est-à-dire, le cosinus du petit côté d'un triangle sphérique dont  $A$  seroit l'hypothénuse &  $1-s$  le cosinus du petit angle, fera  $=1-\frac{1}{2}s+\frac{1}{16}s^2+\frac{1}{2}s \cos. 2A-\frac{1}{16}s^2 \cos. 4A$ . M. Clairaut a fait usage de ce théorème dans sa théorie de la lune, c'est pourquoi j'ai cru devoir en donner ici la démonstration, que l'auteur avoit supprimée pour abrégé. J'en ai moi-même indiqué l'usage (3472).

3641. Dans un triangle rectiligne rectangle  $STN$ , si l'angle  $T$  est supposé très-petit, la différence entre le grand côté  $TN$  & l'hypothénuse  $TS$  sera égale à la moitié du carré de la fraction qui exprime  $SN$  par rapport à

# 676 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

*TN*. Soit  $TN = 1$ ,  $SN = \alpha$ , enforte que  $\alpha$  soit une petite fraction de l'unité ou de  $TN$ , on aura  $TS^2 = 1 + \alpha^2$ , & élevant  $1 + \alpha^2$ , à la puissance  $\frac{1}{2}$  (3287), l'on aura  $TS = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2$  en négligeant les autres termes qui seroient beaucoup plus petits que  $\alpha^2$ . Si par exemple,  $SN$  est  $\frac{1}{100}$  de  $TN$  on aura  $\frac{1}{10000}$  de  $TN$  pour l'excès de l'hypothénuse  $TS$  sur le côté  $TN$ . Delà il suit que si  $AS$  est infiniment petite par rapport à  $TS$ , la différence de  $TS$  à  $TN$  fera un infiniment petit du second ordre, & devra se négliger totalement.

Fig. 320.

3642. Si les sinus  $BC$  &  $DE$  (fig. 320) de deux arcs  $BN$  &  $DN$ , sont dans un rapport constant, leurs cosinus seront en raison composée de celle de leurs sinus, & de la raison inverse des petites variations de ces deux arcs. Supposons que  $BF$  &  $DH$  font les changemens infiniment petits survenus à ces deux arcs, enforte que  $BC$  soit infiniment proche de  $FL$ , &  $DE$  infiniment proche de  $HM$ : on a vu ci-devant (3307) que  $DH : DI :: TD : TE$ , &  $BG : BF :: TC : TB$  ou  $TD$ ; donc  $\frac{TC}{TE} = \frac{DH.BG}{DI.BF}$ ; mais  $\frac{BG}{DI} = \frac{BC}{DE}$ ; car puisque les sinus restent dans le même rapport, leurs décroissmens leur sont proportionnels; donc  $\frac{TC}{TE} = \frac{BC}{DE} \cdot \frac{DH}{BF}$ . Ceci se rapporte à l'art. 1187.

Fig. 318.

3643. Etant données deux quantités inégales  $MP$ ,  $PF$  (fig. 318), si l'on fait cette porportion : la plus petite est à la plus grande, comme le rayon est à la tangente d'un angle  $PMF$ , & qu'on ôte  $45^\circ$  de l'angle  $PMF$ , en prenant  $PN = PM$  & tirant la ligne  $MN$ , le rayon fera à la tangente du reste ou de  $NMF$ , comme la somme des deux quantités est à leur différence. Ayant tiré par le point  $F$  une perpendiculaire  $FI$  sur  $MN$  prolongée en  $I$ , & tiré  $MD$  parallèle à  $PF$ ,  $MD$  fera la somme des deux quantités dont  $IN$  est la différence; or  $DM : FN :: ID : IF$ , donc, &c.

On démontre dans tous les livres de trigonométrie que dans un triangle rectiligne, dont on connoît deux côtés & l'angle compris, la somme des côtés est à leur diffé-

rence comme la tangente de la demi-somme des angles inconnus est à la tangente de leur demi-différence ; ainsi la tangente de l'angle *FMI* étant multipliée par celle du demi-supplément de l'angle compris entre les deux côtés donnera la tang. d'un angle, qui ajouté à ce demi-supplément formera le plus grand des deux angles inconnus. Nous en avons fait usage pour trouver les lieux des planètes ( 1143 , 3043 ), & dans les tables, pag. 105 & 118.

3644. *LA SOMME de deux sinus est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des arcs est à la tangente de la demi-différence.* En effet, la somme des côtés d'un triangle est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés est à la tangente de leur demi-différence ; mais dans tout triangle les côtés sont entre eux comme les sinus des angles opposés & peuvent être pris pour ces sinus, donc la somme des sinus de deux angles est à la différence de ces sinus comme la tangente de la demi-somme des angles dont ils sont les sinus est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles. Nous avons fait usage de cette proposition dans la théorie de la réfraction ( 2210 ).

Toutes les propositions précédentes appartiennent plutôt à des élémens de géométrie qu'à un traité d'astronomie, cependant comme on ne les trouve point expressément dans les livres, j'ai cru qu'il étoit utile d'en donner ici les démonstrations pour ne rien supposer qu'un lecteur attentif ne puisse trouver, avec les élémens ordinaires de la géométrie & du calcul.

## *DE LA TRIGONOMETRIE SPHERIQUE.*

3645. Nous sommes obligés en donnant un traité complet d'astronomie d'y comprendre la trigonométrie sphérique, mais nous l'abrégerons, en passant sous silence tout ce qui n'intéresse pas spécialement l'astronomie : nous supprimerons le détail de plusieurs propriétés des triangles sphériques, dont les livres ordinaires sont remplis ; ces détails servent à exercer ceux qui commencent, & à

leur rendre la trigonométrie plus familière ; mais comme un calculateur ne sauroit se passer des tables de logarithmes & de sinus , auxquelles on joint presque toujours un traité de trigonométrie , on y aura recours si les notions suivantes paroissent ne pas suffire.

Définition. 3646. UNE FIGURE PLANE est celle dont la surface peut être traversée en tout sens par une ligne droite. Je ne saurois trouver une définition plus exacte du mot de *plan* ou de figure plane ( 1119 ).

Prolongement des plans. 3647. Le plan d'un cercle ou d'une figure plane quelconque , est proprement la surface de cette figure ; dans l'astronomie on conçoit tous les plans prolongés infiniment dans l'immensité du ciel ; alors le *plan* d'un cercle est formé par l'assemblage de tous les diamètres de ce cercle prolongés sans bornes au delà de sa circonférence ; le plan est une surface infinie qui est le prolongement de la surface propre du cercle , & dont celle-ci fait partie.

Fig. 315. 3648. Supposons que *DBA* (fig. 315) , soit l'étendue de l'équateur terrestre , bornée par la grandeur de la terre *DHAPF* , son plan doit se concevoir sans bornes : une étoile *O* à une distance quelconque de la terre fera toujours dans le plan de l'équateur de la terre pourvu qu'il y ait un des diamètres de l'équateur qui aille passer par l'étoile , & l'on dira que cette étoile est dans l'équateur. Si cette étoile *O* au lieu d'être dans la surface , dans le plan même de notre figure , se conçoit relevée d'un demi-pouce au-dessus de la figure , alors le diamètre *DA* ne pourra point passer par l'étoile , & l'étoile ne fera plus dans le plan de l'équateur.

3649. Lorsqu'on dit en astronomie qu'un astre est dans l'équateur , dans l'écliptique , dans l'horizon , il faut toujours entendre les plans de tous ces cercles ; ainsi quand le soleil & la lune se lèvent ensemble , ils sont tous deux dans l'horizon , parce que le même plan qui borne notre vue , s'étend jusqu'à eux , quoique le soleil soit 380 fois plus loin de nous que la lune.

3650. Il faut cependant excepter de cette règle les parallèles ou petits cercles de la sphère dont les plans

ne peuvent ainsi se prolonger, dans l'astronomie, & occasionneroit des idées fausses si l'on vouloit s'en servir : ce sont des cônes qui ont leur sommet au centre de la sphère (3653).

3651. Parmi les premières définitions du onzième livre d'Euclide, on trouve celle-ci : l'inclinaison d'un plan sur un autre plan, est l'angle aigu que renferment les deux lignes tirées sur les deux plans, & perpendiculaires à leur commune section. Puisque cette vérité a paru assez claire aux anciens géomètres pour n'avoir pas même besoin d'explication, je pourrois me dispenser d'en parler plus au long ; cependant comme c'est une vérité essentielle, un principe fondamental auquel nous renverrons souvent, il est nécessaire de le bien concevoir, & il me paroît qu'on peut le démontrer d'une manière plus satisfaisante. Présentons une feuille de papier sur une autre, dans une situation inclinée ; la commune section de ces deux plans est la ligne sur laquelle une des feuilles rencontre & touche l'autre ; pour juger de l'angle d'inclinaison l'on verra bien qu'il faut former un angle dont les deux lignes soient l'une dans un plan & l'autre dans l'autre plan, mais toutes deux perpendiculaires à la commune section ; car si l'on tiroit ces lignes obliquement l'on formeroit des angles plus petits, sans aucune règle, qui n'auroient aucun rapport déterminé avec l'angle des deux plans, & qui n'auroient point une marche uniforme, ou égale à celle des deux plans. Enfin si l'on imagine les deux plans perpendiculaires l'un à l'autre, en sorte qu'ils fassent un angle droit, les lignes qui doivent mesurer leur angle doivent être perpendiculaires entre elles, ce qui n'arriveroit pas si elles n'étoient perpendiculaires à la commune section des deux plans ; donc pour mesurer l'angle de deux plans il faut tirer dans chaque plan une ligne perpendiculaire à la commune section ; ces lignes feront dans leur point de rencontre avec cette commune section, un angle égal à l'inclinaison des deux plans (1121).

Mesure des angles que forment des plans.

3652. La trigonométrie sphérique consiste à résoudre les triangles formés sur la surface d'un globe par trois

On ne considère que les grands cercles,

arcs de grands cercles; elle se réduit presque toute à trois théorèmes que nous démontrerons de la manière la plus simple, après que nous aurons donné quelques notions des propriétés générales des triangles sphériques.

3653. On ne considère dans la trigonométrie que les arcs de grands cercles, comme nous l'avons dit (30), parce que la plus courte distance d'un point à un autre sur la surface d'une sphère est un arc de grand cercle, au lieu qu'on pourroit par deux points donnés tirer une infinité d'arcs de petits cercles, de toutes les grandeurs, & d'un nombre quelconque de degrés, sans qu'il y eût jamais aucune règle pour connoître la longueur des côtés & la grandeur des angles, si l'on ne s'étoit pas borné à ne considérer que les grands cercles.

Poles d'un  
cercle.

3654. Nous avons expliqué au commencement de cet ouvrage, ce que c'est que l'axe d'un grand cercle (17 & 18); nous avons dit que les poles sont les extrémités de l'axe; ainsi les poles sont également éloignés de tous les points de la circonférence de leur cercle, & lorsqu'on a pris un point comme pole, on peut avec un compas ordinaire décrire le cercle dont il est le pole, pourvu qu'on prenne une ouverture de compas qui soit de  $90^\circ$ , ou d'un quart de la circonférence du globe, sur lequel on veut décrire le cercle.

Les grands  
cercles se cou-  
pent en deux  
parties égales.

3655. Deux grands cercles quelconques décrits sur la surface d'une sphère se coupent nécessairement en deux parties égales (30).

3656. Si deux grands cercles se coupent à angles droits, chacun des deux cercles passe par les poles de l'autre; car les poles sont sur un axe perpendiculaire au plan de leur cercle, donc ils sont dans un plan perpendiculaire au plan du cercle, & qui passe par son centre, donc ils sont sur le cercle qui lui est perpendiculaire. Il en est de même de deux ou de plusieurs arcs qui seroient perpendiculaires à un autre arc, car ils iroient tous concourir au pole de celui-ci, ou à  $90^\circ$  de distance de cet arc. Réciproquement un arc qui coupe deux ou plusieurs autres arcs, à  $90^\circ$  de distance de leur intersection, les coupe tous perpendiculairement



perpendiculairement, puisque tous ces cercles passent par les poles. Ces propriétés des triangles sphériques sont importantes.

3657. Soit  $BCF$  (fig. 322), le diamètre d'un globe ou d'une sphère, sur la circonférence de laquelle on ait décrit deux grands cercles  $BLF$ ,  $BMF$ , qui se coupent en deux parties égales en  $B$  & en  $F$ ; si l'on décrit un autre arc  $LM$ , à  $90^\circ$  des points  $B$  &  $F$ , cet arc aura pour poles les points  $B$  &  $F$ , il sera la mesure de la distance des points  $L$  &  $M$ , il sera égal à l'angle que formeroient au centre  $C$  de la sphère les rayons menés aux points  $L$  &  $M$ ; il sera donc égal à l'angle que forment les plans des deux cercles  $BAFCB$ ,  $BLFCB$ , ou égal à l'angle que formeroient au point  $B$  deux tangentes aux cercles  $BM$  &  $BL$ , c'est-à-dire, à l'angle sphérique  $LBM$ ; donc pour avoir la mesure d'un angle sphérique  $LBM$ , il faut décrire un cercle à  $90^\circ$  de distance du sommet  $B$  de l'angle donné; l'arc  $LM$  compris entre les côtés de l'angle, en fera la mesure, en même temps qu'il aura pour pole le sommet  $B$  du même angle.

Mesure des angles sphériques.

Fig. 322.

3658. Dans tout triangle sphérique rectangle, les angles sont de même espèce que les côtés opposés, c'est-à-dire, qu'un angle aigu est toujours opposé à un côté aigu, & un angle obtus à un côté obtus. Soit le triangle  $FKI$  rectangle en  $K$ , dont le côté  $FK$  & l'hypothénuse  $FI$  soient prolongés jusqu'au point  $B$  opposé au point  $F$ ; les arcs  $FKB$ ,  $FIB$  seront de  $180^\circ$  chacun; si  $FK$  est aigu,  $KB$  sera obtus; ainsi l'angle  $FIK$  aigu est opposé au côté aigu  $FK$  dans le triangle  $FKI$ , & l'angle obtus  $BIK$  est opposé au côté obtus  $BK$  dans le triangle  $BIK$  aussi rectangle en  $K$ ; ainsi l'on voit assez sans autre démonstration que si le côté  $FK$  qui est donné, dans un triangle sphérique rectangle, surpasse  $90^\circ$ , l'angle opposé surpassera aussi  $90^\circ$ , & *vice*ssim. M. de la Caille en donne une démonstration plus longue & plus rigoureuse, art. 147 & 148.

3659. Si les côtés d'un triangle sphérique rectangle sont de même espèce, c'est-à-dire, tous deux aigus ou tous deux obtus, l'hypothénuse sera toujours aigue,

Fig. 322. & s'ils sont de différente espèce, l'hypothénuse sera toujours plus grande que  $90^\circ$ .

DEMONSTRATION. Dans le triangle sphérique  $FIK$  rectangle en  $K$ , dont les côtés  $FK$  &  $KI$  sont aigus; il est clair que l'hypothénuse  $FI$  est aussi aiguë; car ayant pris  $FM$  de  $90^\circ$  on aura  $FL$  aussi de  $90^\circ$ , parce que l'arc  $LM$  aura pour pôle le point  $F$ , donc  $FI$  est plus petite que  $90^\circ$ . Supposons que dans le triangle  $BIK$  les côtés  $BK$  &  $BI$  soient obtus, & que l'angle  $B$  devienne un angle droit, alors l'hypothénuse  $KI$  sera aiguë, car si  $BK$  &  $BI$  surpassent  $90^\circ$ , leurs suppléments  $FK$  &  $FI$  seront moindres que  $90^\circ$ , donc dans le triangle  $FIK$  également rectangle en  $F$ , on aura l'hypothénuse  $IK$  plus petite que  $90^\circ$  suivant la première partie de notre démonstration: or l'hypothénuse  $KI$  est commune aux deux triangles; donc le triangle  $BKI$  rectangle en  $B$  & dont les côtés sont tous deux obtus, a aussi son hypothénuse aiguë.

3660. Si les côtés sont de différente espèce, comme dans le triangle  $BIK$  supposé rectangle en  $K$ , où  $BK$  est plus grand que  $90^\circ$ , &  $KI$  plus petit, l'hypothénuse  $BI$  est nécessairement plus grande que  $90^\circ$ , puisqu'alors son supplément  $IF$  est aigu, comme nous l'avons démontré.

3661. En considérant de même les triangles  $FKI$ ,  $EKI$  rectangles en  $K$ , on voit aisément, au moyen de ce qui précède, les six vérités suivantes. 1°. Si les deux angles obliques sont de même espèce, l'hypothénuse est moindre que  $90^\circ$ , comme dans le triangle  $FKI$  où les deux angles sont aigus. 2°. Si les deux angles obliques sont d'espèce différente, comme dans le triangle  $BKI$ , l'hypothénuse  $BI$  est plus grande que  $90^\circ$ , car les deux côtés seront aussi de différente espèce. 3°. Si l'hypothénuse est aiguë les angles & les côtés sont de même espèce. 4°. Si l'hypothénuse est plus grande que  $90^\circ$ , les angles & les côtés sont d'espèce différente, comme dans le triangle  $BIK$ , dont l'angle  $I$  est obtus, aussi bien que le côté  $BK$  & l'hypothénuse  $BI$ , tandis que l'angle  $B$  & le côté  $IK$  sont aigus. 5°. Si l'hypothénuse & l'un des côtés sont de même espèce, l'autre côté avec son angle opposé sont nécessairement

fairement aigus, comme dans le triangle  $BIK$ .  $6^\circ$ . L'hypothénuse & l'un des côtés étant d'espèces différentes, l'autre côté avec son angle opposé seront toujours plus grands que  $90^\circ$ ; ainsi dans le triangle  $BIK$  l'hypothénuse  $BI$  étant obtuse, & le côté  $IK$  aigu, il faut que l'autre côté  $BK$  soit obtus, aussi bien que son angle opposé  $BIK$ .

3662. La même figure suffit pour reconnoître dans Cas douteux. les triangles sphériques rectangles tous les cas douteux, c'est-à-dire, ceux où l'on ne peut trouver un côté & un angle à moins qu'on ne sache auparavant s'ils sont aigus ou obtus; les triangles  $IKI$ ,  $IKI$  tous deux rectangles en  $K$  ont le côté  $IK$  commun; l'angle  $F$  de l'un est égal à l'angle  $B$  de l'autre; mais quoique ces deux quantités soient les mêmes de part & d'autre, toutes les autres diffèrent, car l'hypothénuse  $FI$  est aiguë, l'hypothénuse  $BI$  est obtuse; le côté  $FK$  est aigu, le côté  $BK$  est obtus; l'angle  $FIK$  est aigu, l'angle  $BIK$  est obtus; ainsi étant donnés un angle & son côté opposé, on ne sauroit trouver les trois autres parties d'un triangle sphérique rectangle, sans savoir si elles sont au-dessus ou au-dessous de  $90^\circ$ ; c'est à quoi se réduisent tous les cas douteux dans les triangles rectangles (3685 & suiv.). Au reste on fait presque toujours en astronomie, par l'état de la question qu'on se propose de résoudre, si les quantités qu'on cherche sont plus petites que  $90^\circ$ ; par exemple, si l'on cherche le lieu du soleil par le moyen de sa déclinaison observée, & de l'obliquité de l'écliptique, on fait bien si le soleil étoit dans le premier ou dans le dernier quart de l'écliptique. Il y a aussi des cas douteux dans les triangles obliques (3698, 3703), mais ils sont analogues à ceux que je viens d'expliquer.

3663. On peut transformer un triangle sphérique en un autre, tel que les angles de celui-ci soient les supplémens des côtés du premier, & réciproquement. Soit le triangle  $ABC$  (fig. 326), dont les côtés soient prolongés de manière que  $ACG=90^\circ=ABH$ ,  $=BAI$ ,  $=BCL$ ,  $=CAN=CBM$ ; par les extrémités de ces six quarts de cercles, on tirera des arcs  $FE$ ,  $ED$ ,  $DF$  qui formeront un triangle  $DFE$ , appelé triangle polaire; le point  $A$  est

Triangle polaire.

Fig. 326.

le pôle de l'arc *FGHE*, puisque *AG* & *AH* sont l'un & l'autre de  $90^\circ$ ; de même le point *B* est le pôle de l'arc *DILF*, & le point *C* est le pôle de l'arc *DNME*; de-là il suit que le point *F* est le pôle du côté *AB*, car le point *A* est éloigné de  $90^\circ$  des points *F*, *G*, *H*, & le point *B* est éloigné de  $90^\circ$  des points *F*, *L*, *I*; donc les points *A* & *B* sont éloignés de  $90^\circ$  du point *I*, donc le point *I* est le pôle de l'arc *I A I H* (3656); l'arc *I H* est donc de  $90^\circ$ . On démontreroit de même que le point *E* est le pôle de *GCAN*, d'où il suit que *EG* est de  $90^\circ$ , donc  $EG + FH = 180^\circ = EG + IG + GH = EI + GH$ ; or *GH* est la mesure de l'angle *A* (3656), donc l'angle *A* ajouté avec le côté *EF* est égal à  $180^\circ$ , donc l'angle *A* du triangle donné est le supplément du côté *EF* du triangle polaire; on trouvera de même que l'angle *B* est le supplément de *DF*, & l'angle *C* supplément de *DE*. Par la même raison l'angle *E* du triangle polaire, mesuré par l'arc *GCAN* est le supplément du côté *CA*, car  $AG = 90^\circ = CN$ , dont  $GN = 180^\circ - CA$ . Ainsi le triangle polaire *DEF* est tel que ses côtés sont les suppléments des angles, & ses angles les suppléments des côtés donnés.

Origine de  
la Trigonométrie  
sphérique.

3664. Aussi-tôt que les premiers astronomes eurent imaginé deux ou trois cercles dans le ciel, l'horizon, le méridien, l'équateur & l'écliptique (art. 11, 15, 19, 64); ils durent chercher un moyen de mesurer l'écartement de ces cercles, à diverses distances des points de réunion; & delà naquit la trigonométrie sphérique. Soient deux arcs *BE* & *BF* (fig. 323), de l'écliptique & de l'équateur, chacun de  $90^\circ$ , & dont la plus grande distance *EF* parut être de  $24^\circ$ , les anciens astronomes se demandèrent d'abord de combien devoit être la distance *GH* de ces deux cercles, à moitié chemin, ou à  $45^\circ$  de leur intersection *B*, ce fut là le premier problème de trigonométrie sphérique; c'est même encore le problème fondamental, & le premier dont je vais donner la solution, par une méthode plus simple qu'on ne le fait dans les livres ordinaires.

1er théorème  
fondamental.

3665. DANS TOUT TRIANGLE sphérique BAD

(fig. 321), rectangle en A le rayon est au sinus de l'hypothénuse BD, comme le sinus d'un des angles B, est au sinus de son côté opposé AD. Fig. 321.

DÉMONSTRATION. Soit C le centre de la sphère ; sur la surface de laquelle sont tracés les arcs BA, AD, & DB ; soit CB la commune section des deux plans CBD & CBA ; du point D on concevra une ligne DF abaissée perpendiculairement sur le plan BCA du côté BA, cette perpendiculaire tombera en un point F, & du point F on tirera une ligne FE perpendiculaire sur la commune section CB ; du point D on tirera au point E une troisième ligne DE. Le plan du triangle DFE est perpendiculaire à la commune section CB, puisqu'une de ses lignes FE est perpendiculaire à CB, & que le triangle lui-même est perpendiculaire au plan CAB, à cause de la ligne DF abaissée perpendiculairement sur ce plan CAB ; ainsi la ligne DE est aussi perpendiculaire à CB, donc l'angle DET est égal à l'angle des deux plans CBA & CBD, par conséquent égal à l'angle sphérique DBA (3651, 3657). Dans le triangle DFE rectiligne rectangle en F, on a par les principes de la trigonométrie rectiligne la proportion suivante : le sinus total est à ED comme le sinus de l'angle E est à DF ; mais ED est le sinus de l'arc BD, puisque c'est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité D de l'arc, sur le rayon CB qui passe par l'autre extrémité, & Dt est le sinus de l'arc DA par la même raison ; enfin l'angle DEF est égal à l'angle sphérique B, donc la proportion se réduit à celle-ci  $R : \sin. BD :: \sin. B : \sin. DA$ , c'est-à-dire, que le sinus total est au sinus de l'hypothénuse BD, comme le sinus de l'angle B est au sinus du côté opposé AD. C. Q. F. D. Cette analogie a servi dans les articles 900, 906, 914, &c.

3666. Delà il suit que la distance DA de deux cercles BA & BD en différens points, mesurée perpendiculairement à l'un des cercles comme BA, est proportionnelle au sinus de la distance BD au point d'intersection, mesurée sur l'autre cercle ; ainsi que nous l'avons supposé (2925).

Cela revient encore au théorème de l'article 892, dont nous avons fait usage tant de fois.

Second théo-  
rème fonda-  
mental.

3667. *DANS TOUT TRIANGLE sphérique rectangle le rayon est au sinus d'un côté comme la tangente de l'angle adjacent à ce côté est à la tangente du côté opposé.* C'est ici le second théorème fondamental de la trigonométrie sphérique.

DÉMONSTRATION. Soit le triangle sphérique *BAD* (fig. 322) rectangle en *A*, du point *A* l'on abaissera la perpendiculaire *AE* sur la commune section *CEB* des deux plans *CBA* & *CBD* : on concevra aussi une ligne *AG* élevée du point *A* perpendiculairement sur les lignes *AE* & *AC*, jusqu'à la rencontre du rayon *CDG*, qui passe par l'autre extrémité *D* du côté *AD*; alors *AG* fera la tangente de l'arc *AD*, qui est l'un des côtés du triangle. Il faut concevoir cette ligne *AG* redressée perpendiculairement sur le plan de la figure; du sommet *G* de cette tangente on tirera une ligne au point *E*; cette ligne *GE* fera aussi perpendiculaire à la commune section *CB*, puisque le triangle *GAE* lui est perpendiculaire. Le point *G* étant sur le rayon *CD* prolongé, est aussi dans le plan du cercle *CBD*; ainsi la ligne *GE* est dans le même plan *CBDG*, l'angle *GEA* est donc formé par deux lignes qui sont perpendiculaires à la commune section des plans *CBA*, *CBD*, & qui sont chacune dans un de ces plans; donc cet angle *GEA* est égal à l'angle des deux plans (3651), ou à l'angle sphérique *B*. Dans le triangle rectiligne *AEG* rectangle en *A*, si l'on prend *EA* pour rayon le côté *AG* devient la tangente de l'angle *AEG* ou de l'angle sphérique *B*; donc on a cette proportion  $AE : AG :: R : \text{tang. } AEG$ , ou  $R : AE :: \text{tang. } AEG : AG$ , c'est-à-dire, que le rayon est au sinus du côté *AB* comme la tangente de l'angle *B* est à la tangente du côté opposé *AD*. On s'est servi de cette proposition dans les articles 898, 900, 914, &c. Le troisième théorème fondamental sera démontré plus bas (3743); il ne sert que dans un seul cas (3706).

3668. Par le moyen des deux théorèmes (3665, 3667),

on démontre facilement quatre autres analogies nécessaires pour la résolution des triangles sphériques rectangles. Soit le triangle  $BCD$  *fig. 323* rectan. en  $D$  dont l'hypoth. & les côtés soient prolongés jusqu'à la valeur de  $90^\circ$ , en sorte que  $BE$ ,  $BF$ , &  $DA$  soient des quart-de-cercles; par les points  $A$  &  $F$  l'on tirera l'arc  $AEF$ ; alors on aura le triangle  $ACE$  rectangle en  $E$ , dans lequel  $AC$  est le complément de  $CD$ ,  $CE$  le complément de  $BC$ ,  $AE$  le complément de  $EF$  ou de l'angle  $B$ ; enfin l'angle  $A$ , qui a pour mesure  $DF$  est le complément de  $BD$ . Ce triangle  $AEC$  sert à démontrer les quatre autres propriétés du triangle donné  $BCD$ .

Le nouveau triangle  $AEC$  rectangle en  $E$  donne cette proportion (3667)  $R : \sin. AE :: \tan. A : \tan. CE$ , c'est-à-dire,  $R : \cos. B :: \cot. BD : \cot. BC$ , donc dans le triangle primitif  $BCD$ , le rayon est au cosinus d'un angle, comme la cotangente du côté adjacent est à la cotangente de l'hypothénuse, ou comme la tangente de l'hypothénuse est à la tangente du côté adjacent. On en fait usage dans les articles 898, 900, 908, 914, 2706 & 3560.

3669. Le triangle  $AEC$  donne cette proportion (3665)  $R : \sin. AC :: \sin. C : \sin. AE$ ; donc  $R : \cos. CD :: \sin. C : \cos. B$ ; donc le rayon est au cosinus d'un côté, comme le sinus de l'angle adjacent à ce côté est au cosinus de l'autre angle. On s'en est servi dans les articles 898, 1661, 2837, 2841, 2845, 3064.

3670. Dans le triangle  $AEC$  l'on a par la même raison (3665)  $R : \sin. AC :: \sin. A : \sin. CE$ , donc  $R : \cos. CD :: \cos. BD : \cos. BC$ , c'est-à-dire, que le rayon est au cosinus d'un côté comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypothénuse. On l'a employée dans les art. 900, &c.

3671. Dans le triangle  $AEC$  l'on a encore cette proportion (3667)  $R : \sin. CE :: \tan. C : \tan. AE$ ; ou  $R : \cos. BC :: \tan. C : \cot. B$ ; donc le rayon est au cosinus de l'hypothénuse comme la tangente d'un des angles est à la cotangente de l'autre angle. Cette analogie est en usage dans les articles 908. &c.

Ces quatre proportions réunies à celles des deux pre-

miers théorèmes ( 3665 , 3667 ) suffisent pour les seize cas qui peuvent se présenter dans la solution des triangles sphériques rectangles, & que je vais détailler, de la manière qui est la plus commode pour l'usage : on en trouvera un exemple à l'article des logarithmes ( 3911 ).

*Table des Analogies qui satisfont aux seize cas des triangles sphériques rectangles.*

3672. CONNOISSANT les deux côtés, trouver l'hypothénuse. Le rayon est au cosinus d'un côté, comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypothénuse ( 3670 ).
3673. Connoissant les deux côtés, trouver les angles. Le rayon est au sinus du côté adjacent à l'angle cherché, comme la cotangente de l'autre côté est à la cotangente de l'angle cherché ( 3667 ).
3674. Connoissant un côté & l'angle adjacent, trouver l'hypothénuse. Le rayon est au cosinus de l'angle, comme la cotangente du côté est à la cotangente de l'hypothénuse ( 3668 ).
3675. Connoissant un côté & l'angle adjacent, trouver l'autre côté. Le rayon est au sinus du côté comme la tangente de l'angle adjacent est à la tangente du côté opposé à cet angle ( 3667 ).
3676. Connoissant un côté & l'angle adjacent, trouver l'autre angle. Le rayon est au cosinus du côté connu, comme le sinus de l'angle adjacent est au cosinus de l'angle opposé à ce côté ( 3669 ).
3677. Connoissant l'hypothénuse & un côté, trouver l'angle opposé à ce côté. Le sinus de l'hypothénuse est au rayon, comme le sinus du côté connu est au sinus de l'angle opposé ( 3665 ).
3678. Connoissant l'hypothénuse & un côté, trouver l'angle adjacent à ce côté. Le rayon est à la cotangente de l'hypothénuse comme la tangente du côté est au cosinus de l'angle adjacent ( 3668 ).



3679. Connoissant l'hypothénuse & un côté, trouver l'autre côté. Le cosinus du côté connu est au rayon, comme le cosinus de l'hypothénuse est au cosinus de l'autre côté (3670).
3680. Connoissant l'hypothénuse & un angle, trouver l'autre angle. Le rayon est au cosinus de l'hypothénuse comme la tangente de l'angle connu, est à la cotangente de l'autre angle (3671).
3681. Connoissant l'hypothénuse & un angle, trouver le côté opposé à cet angle. Le rayon est au sinus de l'hypothénuse comme le sinus de l'angle est au sinus du côté opposé à cet angle (3665).
3682. Connoissant l'hypothénuse & un angle, trouver le côté adjacent à cet angle. Le rayon est au cosinus de l'angle, comme la tang. de l'hypothénuse est à la tang. du côté adjacent à l'angle donné (3668).
3683. Connoissant les deux angles, trouver l'hypothénuse. Le rayon est à la cotang. d'un des angles, comme la cotang. de l'autre est au cos. de l'hypothénuse (3671).
3684. Connoissant les deux angles, trouver les côtés. Le sinus de l'angle adjacent au côté cherché est au rayon, comme le cos. de l'autre angle est au cos. du côté cherché (3669).
3685. Connoissant un côté & son angle opposé, trouver l'hypothénuse. Le sinus de l'angle connu est au rayon, comme le sinus du côté connu est au sinus de l'hypothénuse (3665). Il faut savoir d'ailleurs si elle est plus ou moins grande que  $90^\circ$  (3662).
3686. Connoissant un côté & son angle opposé, trouver l'autre côté. Le rayon est à la tangente du côté donné, comme la cotangente de l'angle connu est au sinus du côté cherché (3667); mais il faut savoir d'ailleurs s'il est aigu ou obtus (3662).
3687. Connoissant un côté & son angle opposé, trouver l'autre angle. Le cos. du côté connu est au rayon, comme le cosin. de l'angle connu est au sinus de l'autre angle (3669); mais il faut savoir d'ailleurs si cet angle est aigu ou obtus (3662).

Trois cas  
douteux.

## DES TRIANGLES SPHERIQUES

## OBLIQUANGLES.

3688. Les six propriétés des triangles sphériques rectangles démontrées jusqu'ici, sont suffisantes pour démontrer six propriétés des triangles sphériques en général, c'est-à-dire, des triangles obliques, & pour résoudre les douze problèmes qui peuvent se présenter dans un triangle. Parmi les douze cas de la trigonométrie sphérique, il y en a dont je ne connois aucune application dans l'astronomie ; tel est le cas des trois angles donnés (3707). Je ne laisserai pas de les expliquer tous succinctement, mais je ferai remarquer ceux dont l'usage est le plus fréquent.

3689. C'est souvent en divisant un triangle rectangle par le moyen d'une perpendiculaire qu'on parvient à le résoudre. Il n'y a que quatre cas où la perpendiculaire soit inutile (3698, 3703, 3706, 3707) ; mais il y en a huit où il faut l'employer.

Première  
propriété gé-  
nérale.

Fig. 324.

3690. *DANS TOUT TRIANGLE sphérique les sinus des angles sont comme les sinus des côtés opposés.* Soit le triangle *MON* (fig. 324) divisé en deux triangles rectangles par un arc perpendiculaire *OP*, l'on aura (art. 3665).

$$R : \sin. OM :: \sin. M : \sin. OP \} ; \text{ donc } \sin. OM : \sin.$$

$R : \sin. ON :: \sin. N : \sin. OP \} ON :: \sin. M : \sin. N,$   
& si l'on abaissoit la perpendiculaire de chacun des autres angles, on démontreroit la même chose pour tous les côtés comparés deux à deux avec les angles. On s'est servi de cette proportion dans les art. 914, &c.

3691. L'arc perpendiculaire *OP* tiré du sommet d'un angle *O* sur le côté opposé *MN*, forme deux segmens *MP*, *PN* sur ce côté *MN*, & l'angle duquel on abaisse la perpendiculaire, se trouve divisé en deux parties *MOP*, *PON*, que nous appellerons les angles verticaux. Si la perpendiculaire *OP* tombe au-dehors du triangle, comme dans la fig. 325, la somme des deux angles verticaux ne fera pas égale à l'angle donné *MON*, mais ce sera leur différence ; les angles formés par la perpendiculaire *OP*

Fig. 325.

avec les deux côtés  $OM$  &  $ON$  seront également compris sous le nom d'angles verticaux, & les démonstrations suivantes s'y appliqueront également. On appelle *angles à la base* les angles  $M$  &  $N$  adjacens au côté sur lequel tombe la perpendiculaire  $OP$ , soit que ce côté soit prolongé, ou non.

3692. Dans les triangles rectangles  $MOP$ ,  $PON$  (fig. 324 & 325), on a les proportions suivantes (3670)  $R : \cos. OP :: \cos. PM : \cos. OM$ ;  $R : \cos. OP :: \cos. PN : \cos. ON$ , donc  $\cos. PN : \cos. PM :: \cos. ON : \cos. OM$ ; c'est-à-dire, que les *cosinus des segmens sont comme les cosinus des côtés*.

Seconde  
propriété gé-  
nérale.  
Fig. 324, 325.

3693. Dans les triangles  $MOP$ ,  $PON$ , on a les proportions suivantes (3667)  $R : \sin. PM :: \tan. M : \tan. OP$ ; ou  $R : \cot. OP :: \sin. PM : \cot. M$ ; &  $R : \cot. OP :: \sin. PN : \cot. N$ ; donc  $\sin. PN : \sin. PM :: \cot. N : \cot. M$ , c'est-à-dire, que les *sinus des segmens sont comme les cotangentes des angles à la base*, ou en raison inverse des tangentes.

Troisième.

3694. Par les mêmes triangles on a aussi (3669).  
 $R : \cos. OP :: \sin. POM : \cos. M$ ; donc  $\sin. POM : \sin. R : \cos. OP :: \sin. PON : \cos. N$  }  $PON :: \cos. M : \cos. N$ .  
Donc les *sinus des angles verticaux sont comme les cosinus des angles à la base*.

Quatrième.

3695. Enfin l'on a ces deux proportions (3668),  
 $R : \cos. POM :: \cotang. OP : \cot. OM$   
 $R : \cos. PON :: \cotang. OP : \cot. ON$   
donc  $\cos. POM : \cos. PON :: \cot. OM : \cot. ON$ ; donc les *cosinus des angles verticaux sont comme les cotangentes des côtés*.

Cinquième.

3696. CONNOISSANT deux côtés & l'angle compris, trouver le troisième côté. L'on abaissera la perpendiculaire de l'extrémité du plus petit côté donné, sur l'autre côté donné, en le prolongeant, si cela est nécessaire; & l'on fera cette proportion (3668).

Solution des  
douze cas des  
triangl. obli-  
ques.

Le rayon

Est au cosinus de l'angle donné,

Comme la tangente du plus petit côté

*Est à la tangente du premier segment.*

Ce premier segment étant ôté du grand côté, ou ajouté si l'angle donné est obtus, on aura le second segment, & l'on fera cette autre proportion (3692).

*Le cosinus du premier segment*

*Est au cosinus du second segment*

*Comme le cosinus du petit côté donné,*

*Est au cosinus du côté cherché.*

Il sera obtus, si le segment adjacent est obtus, pourvu que la perpendiculaire ne le soit pas, ou si la perpendiculaire & le segment adjacent au côté cherché sont de différente espèce (3661), & l'on est sûr que la perpendiculaire n'est pas obtuse, si le côté de l'extrémité duquel on a abaissé la perpendiculaire est aigu. On trouve des usages de ce problème dans les articles 1034, &c. C'est un des plus utiles dans l'astronomie, parce qu'il sert à trouver la hauteur d'un astre pour un moment quelconque; la distance de la lune aux étoiles (3978), celle d'un lieu à un autre, le mouvement d'une comète sur son orbite (3057), &c. Ces analogies qui renferment des cosinus, sont sujettes à quelque défaut de précision, quand par un cosinus fort petit, on en cherche un qui est très-grand; voici donc une formule qui ne renferme que des sinus, & que nous appliquerons au triangle PZS (fig. 35), pour trouver la distance au zénit, (*Murdoch, philos. transf.* 1758, pag. 540):  $\sin. \frac{1}{2} ZS^2 = \sin. PZ \sin. PS \sin. \frac{1}{2} P^2 + \sin. \frac{1}{2} (PZ - PS)^2$ , on en verra un exemple à l'art. 3979.

3697. CONNOISSANT deux côtés & l'angle compris; trouver l'un des deux autres angles opposés aux côtés donnés. Abaissez la perpendiculaire sur le côté adjacent à l'angle cherché; & calculez le premier segment par cette proportion (3668).

*Le rayon*

*Est au cosinus de l'angle donné,*

*Comme la tangente du côté opposé à l'angle cherché*

*Est à la tangente du premier segment.*

Prenez la somme ou la différence de ce premier segment, & du côté adjacent à l'angle cherché, sur lequel on a abaissé

la perpendiculaire. Il faudra prendre la somme si l'angle donné est obtus ; la différence , si l'angle donné est aigu ; on aura ainsi le second segment, & l'on fera cette proportion (3693).

*Le sinus du second segment*

*Est au sinus du premier segment ,*

*Comme la tangente de l'angle donné*

*Est à la tangente de l'angle cherché.*

Si l'un des segments est plus grand que le côté dont il faut le soustraire, c'est-à-dire, sur lequel tombe la perpendiculaire, alors l'angle cherché ne sera pas de même espèce que l'angle donné. On trouvera des applications de ce problème dans les articles 1036, &c. pour trouver l'angle parallactique dans le calcul des éclipses.

3698. CONNOISSANT deux côtés & l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle opposé à l'autre côté. On fera cette proportion (3690).

*Le sinus du côté opposé à l'angle connu*

*Est au sinus du côté adjacent à l'angle connu ,*

*Comme le sinus de l'angle connu*

*Est au sinus de l'angle cherché.*

Cet angle peut être aigu ou obtus ; & il n'est pas déterminé par les données seules (3662).

3699. CONNOISSANT deux côtés & l'angle opposé à l'un d'eux, trouver le troisième côté. Abaissez la perpendiculaire sur le côté cherché, & faites ces deux proportions (3668, 3692).

1° Le rayon

*Est au cosinus de l'angle donné*

*Comme la tangente du côté adjacent à cet angle*

*Est à la tangente du premier segment.*

2° Le cosinus du côté adjacent à l'angle donné

*Est au cosinus du côté opposé à l'angle donné ,*

*Comme le cosinus du premier segment*

*Est au cosinus du second segment.*

Si les deux côtés donnés sont de même espèce, on ajoutera les deux segments pour avoir le côté cherché. S'ils

sont d'espèce différente, on retranchera le plus petit segment du plus grand, parce que dans ce cas, la perpendiculaire tombe au dehors du triangle.

3700. CONNOISSANT deux côtés & l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle compris par les côtés donnés. Abaissez la perpendiculaire de l'angle cherché, & faites ces deux proportions (3671, 3695).

1° Le rayon

*Est au cosinus du côté adjacent à l'angle donné,*

*Comme la tangente de l'angle donné*

*Est à la cotangente du premier des angles verticaux.*

2° La cotangente du côté adjacent à l'angle donné

*Est à la cotangente du côté opposé à l'angle donné,*

*Comme le cosinus du premier des angles verticaux*

*Est au cosinus du second angle vertical.*

On ajoutera les deux angles verticaux, si les deux côtés donnés sont de même espèce; on prendra leur différence, si les côtés donnés sont l'un aigu & l'autre obtus, & l'on aura l'angle cherché. Ces analogies ont servi pour trouver l'heure par le moyen des étoiles (1049).

3701. CONNOISSANT deux angles & le côté compris, trouver un des autres côtés. Abaissez la perpendiculaire d'un des angles donnés adjacens au côté cherché, & faites cette proportion (3671).

*Le rayon*

*Est au cosinus du côté connu,*

*Comme la tangente de l'angle opposé au côté cherché*

*Est à la cotangente du premier angle vertical.*

Si la perpendiculaire tombe au-dehors du triangle, du côté de l'angle donné, il faut prendre la somme de ce premier angle vertical & de l'angle adjacent au côté cherché; sinon leur différence; & l'on aura le second angle vertical, formé par la perpendic. & le côté cherché, & l'on dira (3695).

*Le cosinus du premier angle vertical*

*Est au cosinus du second angle vertical,*

*Comme la cotangente du côté donné*

*Est à la cotangente du côté cherché.*

Si le second angle vertical est de même espèce que l'angle opposé au côté cherché, celui-ci fera aigu ; sinon obtus.

3702. *CONNOISSANT deux angles & le côté compris ; connoître le troisième angle.* On abaissera la perpendiculaire d'un des angles connus sur le côté opposé que nous appellerons la base , & l'on fera cette analogie (3671).

*Le rayon*

*Est au cosinus du côté connu ;*

*Comme la tangente de l'angle sur la base*

*Est à la cotangente du premier angle vertical.*

On ajoutera ce premier angle vertical avec l'angle connu d'où est abaissée la perpendiculaire , si elle tombe hors du triangle , c'est-à-dire , si le premier angle vertical est plus grand que l'angle d'où l'on a abaissé la perpendiculaire , & encore si l'angle connu sur la base est d'une autre espèce que le côté donné ; mais dans les autres cas , on prendra leur différence , la perpendiculaire tombant au-dedans du triangle : l'on aura ainsi le second angle vertical ; alors on fera cette seconde proportion (3694).

*Le sinus du premier angle vertical*

*Est au sinus du second angle vertical ,*

*Comme le cosinus de l'angle donné sur la base*

*Est au cosinus de l'angle cherché.*

Si l'un des deux angles verticaux est moindre que l'angle donné d'où l'on a abaissé la perpendiculaire , c'est-à-dire , si la perpendiculaire tombe au-dedans du triangle , l'angle cherché fera de même espèce que l'angle donné sur la base.

3703. *CONNOISSANT deux angles & un côté opposé à l'un d'eux , trouver le côté opposé à l'autre angle connu.*

On fera cette proportion (3690).

*Le sinus de l'angle opposé au côté connu*

*Est au sinus de l'autre angle connu ,*

*Comme le sinus du côté connu*

*Est au sinus du côté cherché.*

Ce côté peut être aigu ou obtus ; les données ne suffisent pas pour l'indiquer (3662).

3704. CONNOISSANT deux angles & un côté opposé à l'un d'eux, trouver le troisième angle. On abaissera la perpendiculaire de l'angle cherché sur son côté opposé, que j'appelle la base, & l'on fera ces deux proportions ( 3671, 3694 ).

1° Le rayon

*Est au cosinus du côté donné,*

*Comme la tangente de l'angle donné sur la base adjacente au côté connu*

*Est à la cotangente du premier angle vertical.*

2° Le cosinus de l'angle donné sur la base, adjacent au côté connu,

*Est au cosinus de l'angle opposé au côté connu,*

*Comme le sinus du premier angle vertical*

*Est au sinus de l'autre angle vertical.*

On ajoutera ces deux angles verticaux, si les deux angles donnés sont de même espèce, c'est-à-dire, si la perpendiculaire tombe au-dedans du triangle, sinon l'on prendra leur différence, & l'on aura l'angle cherché.

3705. CONNOISSANT deux angles & le côté opposé à l'un d'eux, trouver le côté compris entre les deux angles. On abaissera la perpendiculaire de l'angle inconnu sur le côté cherché, & l'on fera ces deux proportions ( 3668, 3693 )

1° Le rayon

*Est au cosinus de l'angle adjacent au côté donné,*

*Comme la tangente de ce côté*

*Est à la tangente du premier segment.*

2° La tangente de l'angle opposé au côté donné

*Est à la tangente de l'angle adjacent au côté donné,*

*Comme le sinus du premier segment.*

*Est au sinus du second segment.*

Si les deux angles donnés sont de même espèce; on ajoutera ensemble les deux segments; car alors la perpendiculaire tombera au-dedans du triangle; sinon l'on prendra leur différence, pour avoir le côté cherché.



3706. CONNOISSANT les trois côtés d'un triangle sphérique, trouver un des angles. On prendra la demi-somme des trois côtés & l'on en retranchera successivement les deux côtés qui comprennent l'angle cherché, on aura deux différences. Après quoi l'on fera cette proportion ; *Le produit des sinus des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, est à 1, comme le produit des sinus des deux différences est au carré du sinus de la moitié de l'angle cherché.* Voyez la démonstration ( 3743 ), & l'exemple ( 1015 ). Ce problème est d'un très-grand usage en astronomie pour calculer le lever & le coucher des astres, & pour connoître l'heure par le moyen de la hauteur d'un astre.

3707. CONNOISSANT les trois angles, on trouveroit un côté par cette analogie qui se déduit de la précédente, quand on transforme le triangle donné (3663) : le produit des sinus des angles adjacens au côté cherché est au produit des cosinus des deux excès de la demi-somme des trois angles sur chacun des angles adjacens au côté cherché, comme l'unité est au carré du cosinus de la moitié du côté cherché. Mais cette analogie n'a été employée dans aucun problème de notre astronomie.

3708. Delà on peut conclure facilement un autre théorème qui sert à résoudre les triangles rectilignes, dont on connoît les trois côtés : le produit des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, est à 1, comme le produit des deux différences est au carré du sinus de la moitié de l'angle compris. Nous en avons fait usage ( 3151 ).

### *Autres propriétés des Triangles sphériques.*

3709. JE n'ai démontré jusqu'ici que les propriétés nécessaires pour la résolution des triangles ; il y en a beaucoup d'autres dont on fait usage dans l'astronomie & dans les recherches de calcul algébrique ; je vais les rapporter ici, à l'exemple de M. de la Caille ; mais ensuite j'y ajouterai les démonstrations que cet auteur avoit omises dans son livre.

# 698 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

Fig. 326.

DANS un triangle sphérique  $ABC$  (fig. 326), l'on a toujours les équations suivantes :

$$3710. \sin. A = \frac{\sin. BC \cdot \sin. C}{\sin. AB} = \frac{\sin. BC \cdot \sin. B}{\sin. AC}.$$

$$3711. \sin. B = \frac{\sin. AC \cdot \sin. A}{\sin. BC} = \frac{\sin. AC \cdot \sin. C}{\sin. AB}.$$

$$3712. \sin. C = \frac{\sin. AB \cdot \sin. B}{\sin. AC} = \frac{\sin. AB \cdot \sin. A}{\sin. BC}.$$

$$3713. \sin. AB = \frac{\sin. BC \cdot \sin. C}{\sin. A} = \frac{\sin. B \cdot \sin. C}{\sin. A}.$$

$$3714. \sin. AC = \frac{\sin. AB \cdot \sin. B}{\sin. C} = \frac{\sin. A \cdot \sin. B}{\sin. C}.$$

$$3715. \sin. BC = \frac{\sin. AC \cdot \sin. A}{\sin. B} = \frac{\sin. A \cdot \sin. A}{\sin. B}.$$

$$3716. \cos. A = \frac{\cos. BC - \cos. AC \cdot \cos. AB}{\sin. AC \cdot \sin. AB} = \cos. BC,$$

$\sin. B \cdot \sin. C - \cos. B \cdot \cos. C$ . Nous l'avons employée (2267); la démonstration se trouvera ci-après (3734).

$$3717. \cos. B = \frac{\cos. AC - \cos. AB \cdot \cos. BC}{\sin. AB \cdot \sin. BC} = \cos. AC,$$

$\sin. C \cdot \sin. A - \cos. C \cdot \cos. A$ . Nous l'avons employée (2945).

$$3718. \cos. C = \frac{\cos. AB - \cos. AC \cdot \cos. BC}{\sin. AC \cdot \sin. BC} = \cos. AB,$$

$\sin. A \cdot \sin. B - \cos. A \cdot \cos. B$ .

$$3719. \cos. AB = \sin. AC \cdot \sin. BC \cdot \cos. C + \cos. AC \cdot \cos. BC = \frac{\cos. C + \cos. A \cdot \cos. B}{\sin. A \cdot \sin. B}.$$

Voy. l'usage, 3153, 3193.

$$3720. \cos. AC = \cos. B \cdot \sin. AB \cdot \sin. BC + \cos. AB \cdot \cos. BC = \frac{\cos. B + \cos. C \cdot \cos. A}{\sin. C \cdot \sin. A}.$$

$$3721. \cos. BC = \cos. A \cdot \sin. AC \cdot \sin. AB + \cos. AB \cdot \cos. AC = \frac{\cos. A + \cos. B \cdot \cos. C}{\sin. B \cdot \sin. C}.$$

$$3722. \text{Tang. } A = \frac{\sin. B}{\cot. BC \cdot \sin. AB - \cos. B \cdot \cos. AB} = \frac{\sin. C}{\cot. BC \cdot \sin. AC - \cos. AC \cdot \cos. C}.$$

Cette expression est d'un grand usage (2706, 3826, &c.).

$$3723. \text{Tang. } B = \frac{\sin. C}{\cot. AC \cdot \sin. BC - \cos. C \cdot \cos. BC} = \frac{\sin. A}{\cot. AC \cdot \sin. AB - \cos. A \cdot \cos. A}.$$

$$3724. \text{Tang. } C = \frac{\sin. B}{\cot. A B. \sin. B C - \cosin. B. \cosin. B C} =$$

$$\frac{\sin. A}{\cot. A B. \sin. A C - \cosin. A C. \cosin. A}$$

$$3725. \text{Tang. } A B = \frac{\sin. B C}{\cotang. C. \sin. B + \cosin. B. \cosin. B C} =$$

$$\frac{\sin. A C}{\cot. C. \sin. A + \cosin. A C. \cosin. A}$$

$$3726. \text{Tang. } A C = \frac{\sin. B C}{\cot. B. \sin. C + \cosin. C. \cosin. B C} =$$

$$\frac{\sin. A B}{\cot. B. \sin. A + \cosin. A B. \cosin. A}$$

$$3727. \text{Tang. } B C = \frac{\sin. A C}{\cot. A C. \cosin. C - \sin. C. \cotang. A} =$$

$$\frac{\sin. A B}{\cot. B. \cosin. A B - \sin. B. \cot. A}. \text{ Nous en avons fait usage (2945).}$$

$$3728. \text{Cot. } A = \frac{\cot. B C. \sin. A B}{\sin. B} - \cosin. A B. \cot. B =$$

$$\frac{\cot. B C. \sin. A C}{\sin. C} - \cosin. A C. \cot. C.$$

$$3729. \text{Cot. } B = \frac{\cot. A C. \sin. B C}{\sin. C} - \cosin. B C. \cot. C =$$

$$\frac{\cot. A C. \sin. A B}{\sin. A} - \cosin. A C. \cot. A.$$

$$3730. \text{Cot. } C = \frac{\cot. A B. \sin. A C}{\sin. A} - \cosin. A C. \cot. A =$$

$$\frac{\cot. A B. \sin. B C}{\sin. B} - \cosin. B C. \cot. B.$$

$$3731. \text{Cot. } A B = \frac{\cot. C. \sin. B}{\sin. B C} + \cosin. B. \cot. B C =$$

$$\frac{\sin. A. \cot. C}{\sin. A C} + \cot. A C. \cosin. A.$$

$$3732. \text{Cot. } A C = \frac{\cot. B. \sin. C}{\sin. B C} + \cosin. C. \cot. B C =$$

$$\frac{\cot. B. \sin. A}{\sin. A B} + \cot. A B. \cosin. A.$$

Par la même raison,  $\cot. B C = \frac{\cot. A. \sin. C}{\sin. A C} + \cosin. C. \cot. A$

$$A C = \frac{\cot. A. \sin. B}{\sin. A B} + \cot. A B. \cosin. B.$$

3733. Dans un triangle sphérique  $ABC$  (fig. 326) où l'on a abaissé une perpendiculaire  $AX$ , le milieu de la base  $CB$  étant en  $P$ ; l'on a  $\text{tang. } \frac{1}{2} (AB + AC) \cdot \text{tang. } \frac{1}{2} (AB - AC) = \text{tang. } \frac{1}{2} B C \cdot \text{tang. } P X$ ; en effet,  $\cosin. B X + \cosin. C X : \cosin. B X - \cosin. C X :: \cosin. A B + \cosin. A C : \cosin. A C$

$AB - \text{cof. } AC (3692) :: \text{cot. } \frac{1}{2} (BX - CX) : \text{tang. } \frac{1}{2} (BX + CX) :: \text{cotang. } \frac{1}{2} (AB - AC) : \text{tang. } \frac{1}{2} (AB + AC) (3633)$ ; mais  $PX$  est la moitié de la différence des segmens  $BX$  &  $CX$ , &  $\frac{1}{2} BC$  est leur demi-somme  $= \frac{1}{2} (BX + CX)$ , donc  $\text{cot. } \frac{1}{2} PX. \text{tang. } \frac{1}{2} (AB + AC) = \text{tang. } \frac{1}{2} BC. \text{cot. } \frac{1}{2} (AB - AC)$ ; donc, &c.

Démonstrations de ces propriétés.

Fig. 327.

3734. La démonstration des six premières équations 3710... 3715, se réduit à une proportion démontrée, (3690); ainsi je passe aux formules 3716.. 3721. Pour les démontrer j'abaisse une perpendiculaire  $CX$  (fig. 327) sur un des côtés adjacens à l'angle  $A$ , j'ai cette proportion (3692)  $\text{cof. } BX : \text{cof. } AX :: \text{cof. } BC : \text{cof. } AC$ ; donc  $\text{cof. } BC = \frac{\text{cof. } AC. \text{cof. } BX}{\text{cof. } AX}$ ; mais  $\text{cof. } BX = \text{cosin. } (AB - AX) = \text{cof. } AB. \text{cof. } AX + \text{sin. } AB. \text{sin. } AX$ , (3620); donc  $\text{cof. } BC = \frac{\text{cof. } AC. \text{cof. } AB. \text{cof. } AX + \text{sin. } AB. \text{sin. } AX. \text{cof. } AC}{\text{cof. } AX}$ ; mais  $\text{cof. } AC \text{cof. } AB + \text{sin. } AB \frac{\text{sin. } AX}{\text{cof. } AX} \text{cof. } AC$ ; mais  $\text{tang. } AC. \text{cof. } A = \text{tang. } AX (3668) = \frac{\text{sin. } AC}{\text{cof. } AC} \text{cof. } A = \frac{\text{sin. } AX}{\text{cof. } AX}$ ; donc  $\text{cof. } BC = \text{cof. } AC. \text{cof. } AB + \text{sin. } AB. \text{sin. } AC. \text{cof. } A$ . C'est la première partie de la formule 3721. On démontreroit de même les articles 3719 & 3720..

De cette équation l'on tire  $\text{cosin. } A = \frac{\text{cof. } BC - \text{cof. } AC. \text{cof. } AB}{\text{sin. } AB. \text{sin. } AC}$ ; c'est la première partie de la formule 3716; on démontreroit de même la première partie des formules 3717 & 3718.

3735. La formule 3716, en ajoutant de part & d'autre  $\text{sin. } AB. \text{sin. } AC$  se réduit à celle-ci:  $\text{sin. } AB. \text{sin. } AC - \text{sin. } AB. \text{sin. } AC. \text{cof. } A = \text{sin. } AB. \text{sin. } AC. + \text{cof. } AB. \text{cof. } AC - \text{cof. } BC$ , & substituant  $\text{cof. } (AB - AC)$  à la place des deux produits on en tire cette proportion;  $\text{sin. } AB. \text{sin. } AC : 1 :: \text{cof. } (AB - AC) - \text{cof. } BC : 1 - \text{cof. } A$ ; ou  $\text{sin. } AB. \text{sin. } AC : 1 :: \text{sin. } \text{verse } BC - \text{sin. } \text{verse } (AB - AC) : \text{sin. } \text{verse } A$ . Nous en ferons usage (3690).

*Propriétés des Triangles Sphériques.* 701

3736. Pour démontrer la seconde partie de l'article 3716, où  $\cos. A = \cos. BC \sin. B \sin. C - \cos. B \cosin. C$ . Soit la tangente de  $BCX = h$ , son sinus sera  $\frac{h}{\sqrt{1+hh}}$ ,

& son cosinus  $\frac{1}{\sqrt{1+hh}}$ ; soit le sinus de l'angle  $C = a$ , & son  $\cos.$  égal à  $b$ , on aura (3619)  $\sin. XCA = \sin. ACB \cos. XCB - \sin. XCB \cos. ACB = \frac{a-hb}{\sqrt{1+hh}}$ ; mais  $\sin. BCX$ :

$\sin. XCA :: \cos. B : \cos. A$  (3694), ou  $\frac{h}{\sqrt{1+hh}} : \frac{a-hb}{\sqrt{1+hh}} :: \cos. B : \cos. A$ ; donc  $\cos. A = \frac{a-hb}{h} \cos. B = \frac{\sin. ACB \cos. B}{\tan. BCX}$

$= \cos. B \cos. C$ ; mais  $\frac{\cos. B}{\tan. BCX} = \cos. BC \sin. C$ ; car dans le triangle  $CBX$  l'on a  $\cos. BC : 1 :: \cot. B : \tan. BCX$ , (3671) donc  $\tan. BCX = \frac{\cot. B}{\cos. BC} = \frac{\cos. B}{\cos. BC \sin. B}$ ; donc  $\frac{\cos. B}{\tan. BCX} = \cos. BC \sin. B$ ; substituant cette valeur dans l'expression de  $\cos. A$ , elle deviendra  $\sin. ACB \cos. BC \sin. B = \cos. B \cos. C$ .

3737. On démontreroit de même la seconde partie des formules 3717 & 3718. Cette expression du cosinus d'un angle par le moyen des deux autres angles & de leur côté compris, a été employée avec succès pour la navigation (3566); mais les signes étoient changés, parce que la perpendiculaire tomboit hors du triangle.

3738. Pour démontrer la 2<sup>e</sup> partie de l'art. 3719, il suffit de dégager  $\cos. AB$  dans la 2<sup>e</sup> partie de l'art. 3718; car puisque  $\cos. C = \cos. AB \sin. A \sin. B - \cos. A \cos. B$ , on a  $\cos. AB = \frac{\cos. C + \cos. A \cos. B}{\sin. A \sin. B}$ ; on démontreroit de même la 2<sup>e</sup> partie des art. 3718 & 3720.

3739. La formule 3722,  $\tan. A = &c.$  est comprise dans la démonstration que j'ai donnée d'une formule semblable (2706), & par conséquent les art. 3723, 3724.

3740. Les formules 3725, &c. se démontrent au moyen des art. 3722, &c. par la transformation des triangles (3663). Par exemple, imaginons autour du triangle  $ABC$

702 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

un triangle polaire  $abc$ , dont l'angle  $b$  réponde du même côté que l'angle  $B$  du triangle  $ABC$ ; alors au lieu de

$$\text{tang. } A = \frac{\sin. B}{\cot. BC. \sin. AB - \cot. B. \cot. AB} \quad (3722), \text{ on aura}$$

$$\text{tang. } bc = \frac{\sin. ac}{\cot. a. \sin. c - \cot. ac. \cot. c}; \text{ c'est la formule 3727,}$$

dans laquelle il faut seulement changer les signes du dénominateur, parce que dans le triangle polaire les côtés sont les supplémens des angles du triangle donné; d'où il suit que les cosinus changent de signe (3605).

3741. La formule 3728,  $\cot. A$ , &c. est l'inverse de 3722, en mettant  $\cot. B$  à la place de  $\frac{\cot. B}{\sin. B}$ ; car  $\cot.$

$$A = \frac{1}{\text{tang. } A} = \frac{\cot. BC. \sin. AB}{\sin. B} - \frac{\cot. B. \cot. AB}{\sin. B} = \frac{\cot. B. \sin. AB}{\sin. B} - \cot. AB. \cot. B. \text{ On démontreroit de même 3729, \& 3730.}$$

3742. La formule 3731 est l'inverse de 3725, en mettant  $\cot. BC$  à la place de  $\frac{\cot. C}{\sin. C}$ . Cette formule 3731

$$\text{pourroit aussi se mettre sous la forme suivante, } \cot. AB = \frac{\sin. A. \cot. C. \cot. AC}{\sin. C. \sin. AC}, \text{ en mettant au lieu de } \cot. C$$

sa valeur  $\frac{\cot. C}{\sin. C}$ , & au lieu de  $\sin. AC$   $\cot. AC$  sa valeur  $\cot. AC$ . C'est celle qui est employée pour la nutation (3568), comme il seroit aisé de s'en assurer en mettant  $A, B, C$ , au lieu de  $\gamma, E, N$ , & substituant les dénominations de l'art. 3564.

3743. Il me reste à démontrer une formule qui a été employée pour résoudre les triangles dont on connoît trois côtés (3706), & qui est le troisième & dernier théorème de la trigonométrie sphérique, & la sixième propriété des triangles sphériques en général. Dans tout triangle  $ABC$

$$\text{l'on a } \sin. \frac{1}{2} A^2 = \frac{\sin. (\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} AC). \sin. (\frac{1}{2} BC - \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} AC)}{\sin. A. \sin. AC};$$

car  $2 \sin. \frac{1}{2} A^2 = 1 - \cot. A$  (3629); si l'on met à la place de 1 la quantité  $\frac{\sin. AB. \sin. AC}{\sin. AB. \sin. AC}$ , qui revient au même, & à la place de  $\cot. A$  sa valeur (3716), on aura  $2 \sin. \frac{1}{2} A^2 =$

Troisième  
théorème fon-  
damental.

$$\frac{\sin. AB. \sin. AC + \cos. AB. \cos. AC - \cos. BC}{\sin. AB. \sin. AC} = \frac{\cos. (AB - AC) - \cos. BC}{\sin. AB. \sin. AC}$$

( 3620 ), cela revient au même que l'expression proposée, car la différence des cosinus de  $AB - AC$  & de  $BC$  est la même chose, que deux fois le produit des sin. de la demi-somme & de la demi-différence de  $AB - AC$  &  $BC$  (3629); cette équation nous sert à résoudre un triangle dont les trois côtés sont donnés ( 3706 ).

3744. *CONNOISSANT deux hauteurs d'un astre, & l'intervalle des deux observations, trouver la déclinaison & l'angle horaire.* Ce problème seroit facile à résoudre par des formules analytiques, mais la méthode indirecte me paroît la plus commode, parce que l'on sait toujours à très-peu près quelle est la déclinaison de l'astre que l'on observe; soit  $P$  le pôle (fig. 272)  $E$  le zénit,  $AB$  le parallèle de l'astre; supposons d'abord sa distance  $PA$  au pôle à peu près connue, on a donc les trois côtés du triangle  $PEA$  on cherchera l'angle  $P$ . Avec la même distance au pôle, augmentée s'il est nécessaire du mouvement en déclinaison dans l'intervalle des deux observations, c'est-à-dire  $PB$ , l'on résoudra le triangle  $EPB$ , dont on connoît encore les trois côtés, & l'on trouvera l'angle au pôle; la somme ou la différence de cet angle & du précédent, convertie en temps, doit être égale à l'intervalle des observations; si l'on trouve quelque erreur, on fera varier la déclinaison, ou la distance au pôle, & l'on verra bientôt quelle est celle qui satisfait à l'intervalle observé.

Fig. 272.

Le cas le plus avantageux pour cette espèce d'observation est celui où l'une des hauteurs est voisine du méridien, & l'autre vers le point où la hauteur change le plus ( 949 ).

Si l'on étoit en mer, & qu'on voulût déterminer la latitude du lieu, en supposant connue la déclinaison de l'astre, on se serviroit de la même méthode, en faisant varier  $PE$  au lieu de  $PA$  ou de  $PB$ . Dans le *Nautical Almanac* de 1771, il y a une table fort ample par laquelle on trouve plus facilement, que par la méthode précédente, la hauteur du pôle au moyen de deux hauteurs du soleil, & de

l'intervalle des deux observations, quand on a la déclinaison du soleil, & la hauteur du pôle estimée. Voyez les observations de M. Maskelyne sur cette méthode. (*British Mariner's guide*, pag. 76).

Il y a un problème plus général, mais qui n'est d'aucun usage ; il consiste à trouver la latitude du lieu & la déclinaison de l'astre, par le moyen de trois hauteurs, à des intervalles connus ; on en trouve cinq solutions différentes, par MM. Daniel Bernoulli, Herman, Euler, Mayer & Krafft, dans le 4<sup>e</sup> vol. des mémoires de Pétersbourg pour 1729. Ce problème est de même espèce que celui de la rotation du soleil, dont j'ai donné plusieurs solutions (3150).

Il y a quelques autres propriétés des triangles sphériques dont je n'ai pas fait mention, & que l'on trouvera dans les *Principes d'Astronomie sphérique*, par M. Mauduit ; publiés en 1765, & traduits en Anglois par M. Crakelt, en 1768.

### DES ANALOGIES DIFFÉRENTIELLES.

3745. Nous nous sommes servis en plusieurs endroits de ce livre des formules par lesquelles on détermine les rapports des petits changemens qui arrivent dans les côtés & dans les angles des triangles ; M. Côtés les donna le premier dans un petit mémoire de 22 pages, qui a pour titre : *Æstimatio errorum in mixta mathesi, per variationes partium trianguli plani & spherici, auctore Rogero COTES* ; ce mémoire se trouve avec d'autres opuscules de ce célèbre auteur, à la suite d'un très-bel ouvrage intitulé : *Harmonia mensurarum*, qui parut à Cambridge en 1722. M. de la Caille donna ensuite ces formules en plus grand nombre & d'une manière plus appropriée à l'astronomie (*Mém. acad.* 1741, pag. 238) ; enfin on les retrouve dans ses Leçons d'Astronomie, pag. 28 & suiv. ; mais il n'a donné les démonstrations dans aucun de ces deux ouvrages ; d'ailleurs il s'est glissé plusieurs fautes essentielles dans cette partie de ses Leçons d'Astronomie, c'est



c'est ce qui m'a déterminé à placer ici ces analogies avec leurs démonstrations <sup>(a)</sup> ; j'y ai ajouté l'indication des principales circonstances auxquelles on les applique dans l'astronomie ; & j'en ai ajouté plusieurs qui n'avoient point été données.

3746. *LORSQU'UN ANGLE & son côté adjacent sont supposés constans, la différentielle de l'autre côté adjacent à l'angle constant est à la différ. du côté opposé comme le rayon est au cos. de l'angle opposé au côté constant.*

L'angle & son côté adjacent supposés constans.

Fig. 327.

DÉMONSTRATION. Soit le triangle *BAC* (fig. 327), dont l'angle *A* & le côté adjacent *CA* sont constans, la différentielle de *AB* sera à celle de *CB* comme le rayon est au cos de *B* ; en effet, lorsque le côté *AB* augmente d'une petite quantité *ED*, le triangle *ACB* se change en un autre triangle *ACD*, ayant fait *CE = CB* & tiré l'arc *BE* perpendiculaire sur *CE*, on a *DE* pour la différentielle du côté *CB*, puisque *CD* est plus grand que *CB* de cette quantité *DE* ; de plus l'angle *EDB* est égal à l'angle *CBA*, car le triangle *EDB* est supposé infiniment petit & par conséquent rectiligne, l'arc *EB* est aussi bien perpendiculaire sur *CB* que sur *CE* (3347), ainsi l'angle *CBE* est droit, donc *CBA* est le complément de *EBD* ; mais dans le petit triangle rectiligne *EBD*, l'angle *EBD* est le complément de *EDB*, donc l'angle *EDB* est égal à l'angle *CBA*. Cela étant, il s'agit de démontrer seulement que *BD : DE :: R : cos. EDB* ou *CBA* ; or c'est la propriété ordinaire d'un triangle rectiligne *BED* rectangle en *E*, que l'hypothénuse *BD* soit à un côté *DE* comme le rayon est au cosinus de l'angle *D* adjacent à ce côté. Donc si l'on appelle *dCB* la différentielle *ED* du côté *CB*, suivant la marque ordinaire du calcul différentiel, on aura la proportion dont il s'agit. C. Q. F. D.

3747. Ainsi *dAB : dCB :: R : cos. B* ; l'on en tirera les analogies suivantes, en considérant les propriétés qui ont été démontrées ci-dessus ; par exemple, en mettant

(a) M. Mauduit les a aussi données dans ses principes d'Astronomie sphérique, imprimés vers le même temps que la première édition de cette Astronomie.

Fig. 327. à la place de  $\cos. B$ . ses deux valeurs (3717), on trouvera :  
 3748.  $dAB : dCB :: \sin. AB. \sin. CB : R. \cos. CA$   
 $— \cos. AB \cos. CB$ .

3749.  $dAB : dCB :: R : \cos. CA. \sin. C. \sin. A —$   
 $\cos. C. \cos. A$ .

3750. Si le côté  $CA$  est de  $90^\circ$ , l'on aura  $dAB :$   
 $dCB :: \text{tang. } BC : \text{tang. } BA$ , car alors  $\cos. CA = 0$ , donc  
 $dAB : dBC :: \sin. AB. \sin. BC : \cos. AB. \cos. BC ::$   
 $\frac{\sin. AB}{\cos. AB} : \frac{\cos. BC}{\sin. BC} :: \text{tang. } BC : \text{tang. } AB$ .

3751. Quand l'arc  $BC$  est de  $90^\circ$ , la proportion de  
 l'article 3747 est toujours exacte, quelque grandes que  
 soient les différentielles de  $AB$  & de  $BC$ , c'est-à-dire,  
 les arcs  $BD$  &  $DE$ , pourvu qu'on emploie les sinus, &  
 qu'on dise  $\sin. dAB : \sin. dBC :: R : \cos. B$ ; car c'est la  
 propriété ordinaire d'un triangle sphérique  $BED$  (3665).  
 Au contraire plus l'arc  $BC$  sera petit, & plus l'angle  
 $ABC$  approchera de  $90^\circ$ , moins l'analogie précédente  
 sera exacte quand  $BD$  &  $DE$  auront une certaine éten-  
 due, parce que si  $CE$  est égal à  $CB$ , l'angle  $E$  ne sera  
 pas un angle droit.

Lorsque l'angle  $B$  sera droit, on aura exactement  $R :$   
 $\cos. BD :: \cos. BC : \cos. CD$  ou  $R : \cos. dAB :: \cos.$   
 $BC : \cos. CD$ , (au lieu de la formule 275 de M. de la  
 Caille).

3752. *SI UN ANGLE & le côté adjacent sont constans, la différentielle de l'angle adjacent au côté constant est à la différentielle de l'angle opposé comme le rayon est au cosinus du côté opposé à l'angle constant.*

DÉMONSTRATION. Soit le triangle sphérique  $ABC$   
 (fig. 326), dont l'angle  $A$  & le côté  $AC$  soient constans ;  
 des points  $A, B, C$ , comme poles, on décrira les arcs  
 $FE, FD, DE$  (3663) qui formeront le triangle polaire  
 $FED$ , dans lequel l'angle  $F$  fera le supplément du côté  
 $AB$ , le côté  $FD$  fera le supplément de l'angle  $B$ , le  
 côté  $FE$  fera le supplément de l'angle  $A$ , &c. ainsi dans  
 le triangle polaire  $EFG$ , on pourra considérer comme  
 constans l'angle  $E$  & le côté adjacent  $FE$ ; en y appliquant

le théorème de l'art. 3746, on verra que la différentielle du côté *DE* est à celle du côté *FD* comme le rayon est au cosinus de l'angle *D*; donc substituant aux termes de cette proportion les termes qui leur correspondent dans le triangle *ABC*, qui ont les mêmes sinus & les mêmes différentielles, on trouve que la différentielle de l'angle *C* est à la différentielle de l'angle *B*, comme le rayon est au cosinus du côté *BC*. C. Q. F. D.

3753. Ainsi  $dB : dC :: \text{cof. } BC : R$ .

3754.  $dB : dC :: \text{cof. } A + \text{cof. } B \cdot \text{cof. } C : \sin. B \cdot \sin. C$ .

3755.  $dB : dC :: \text{cof. } A \cdot \sin. AC \cdot \sin. AB + \text{cof. } AC \cdot \text{cof. } AB : R$ , en substituant pour  $\text{cof. } BC$  ses valeurs (3721).

3756. Si  $A = 90^\circ$ , l'on a  $dB : dC :: \cot. C : \text{tang. } B$ , parce que dans un triangle rectangle, on a  $\text{cof. } BC = \frac{\text{cof. } C}{\text{tang. } B}$  (3671).

3757. Si  $B = 90^\circ$ , la variation de l'angle *B* est nulle.

3758. SI UN ANGLE & le côté adjacent sont constants, la différentielle de l'angle adjacent au côté constant sera à la différentielle du côté opposé à l'angle constant, comme la tangente de l'angle opposé au côté constant, est au sinus du côté opposé à l'angle constant.

DÉMONSTRATION. Soient *A* & *AC* constants (fig. 327), que l'on prolonge le côté *CB* jusqu'à ce qu'on ait  $CF = 90^\circ$ , & de même *CD* jusqu'à ce que *CG* soit de  $90^\circ$ , le petit arc *FG* sera la mesure de l'angle *ECB*, & par conséquent sera la différentielle de l'angle *C*, tandis que *DE* est la différentielle du côté *CB*, il faut donc démontrer que  $FG : DE :: \text{tang. } B : \sin. BC$ ; on considérera que  $FG : BE :: R : \sin. BC$  (892); mais  $DE : BE :: R : \text{tang. } BDE$  ou *CBA*; donc  $FG : DE :: \text{tang. } B : \sin. BC$ .

3759. C'est-à-dire,  $dB : dC :: \sin. BC : \text{tang. } B$ .

3760.  $dB : dC :: \sin. A \cdot \sin. AC : \text{tang. } B \cdot \sin. B$ , en mettant à la place de  $\sin. BC$  sa valeur (3715).

3761.  $dB : dC :: \sin. BC^2 \cdot \cotang. AC - \sin. BC$ .

V v v v ij

708 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

cos.  $BC$ . cos.  $C$  : sin.  $C$ , en mettant à la place de tang.  $B$  sa valeur 3723.

3762. Si  $BC = 90^\circ$ , on a  $dBC : dC :: R : \text{tang. } B$ , puisque sin.  $BC = R$ .

3763. SI UN ANGLE & un côté adjacent à cet angle sont supposés constans, la différentielle du côté variable adjacent à l'angle constant sera à la différentielle de l'angle opposé au côté constant, comme la tang. du côté opposé à l'angle constant est au sinus de l'angle opposé au côté constant.

Fig. 327.

DÉMONSTRATION. Soit un triangle  $ACL$  (fig. 327) dont le côté  $AC$  & l'angle  $A$  sont constans : Soit le centre de la sphère  $LT$  &  $KT$  deux tangentes qui font entre elles un angle  $T$  égal à la variation de l'angle  $L$ , ou à la différence des angles  $CKL$ ,  $CLA$ ;  $ML = LK$  sin.  $K$  est la mesure de l'angle  $S$  au centre; mais cet angle  $S$  est à l'angle  $T$ , comme  $LT : LS :: \text{tang. } CL : R$ ; donc  $LK$ . sin.  $K : T :: \text{tang. } CL : 1$  donc  $T = LK \frac{\sin. K}{\text{tang. } CL}$ . Cette démonstration est plus directe que celle de M. Cotes qui emploie le triangle polaire comme ci-devant (3752). Donc dans le triangle  $ABC$  l'on a  $dAB : dB :: \text{tang. } CB : \sin. B$ .

3764.  $dAB : dB :: \text{tang. } BC : \sin. B$ . Nous avons fait usage de celle-ci pour la précession des équinoxes (2707) pour les variations des étoiles (2743) & pour la nutation en ascension droite (2870).

3765.  $dAB : dB :: \text{tang. } BC. \sin. BC : \sin. AC. \sin. A$ ; en mettant pour sin.  $B$  sa valeur  $\frac{\sin. AC. \sin. A}{\sin. BC}$  (3711).

3766. SI UN ANGLE & un côté adjacent à cet angle sont supposés constans, la différentielle de l'angle adjacent au côté constant est à celle du côté adjacent à l'angle constant, comme le sinus de l'angle opposé au côté constant est au sinus du côté opposé à l'angle constant.

Fig. 327.

DÉMONSTRATION. Dans le triangle  $ABC$  (fig. 327) dont l'angle  $A$  & le côté  $AC$  sont constans, il faut démontrer que  $FG : BD :: \sin. B : \sin. BC$ ; or  $BE = FG$ . sin.  $BC$  (892), & dans le triangle rectiligne  $BED$  on a  $BE :$

$BD :: \sin. B : R$ , (car l'angle  $CBA$  est égal à l'angle  $EDB$ ) ; donc  $BE = BD$ .  $\sin. B$  ; ainsi égalant les deux valeurs de  $BE$ , nous aurons  $FG. \sin. BC = BD \sin. B$ , convertissant cette équation en proportion, on a  $FG : BD :: \sin. B : \sin. BC$ .

$$3767. dAB : dC :: \sin. BC : \sin. B.$$

3768.  $dAB : dC :: \sin. EC^2 : \sin. AC. \sin. A$ , en mettant pour  $\sin. B$  sa valeur  $\frac{\sin. AC. \sin. A}{\sin. BC}$  (3711).

3769.  $dAB : dC :: \sin. AC. \sin. A : \sin. B^2$ , en mettant pour  $\sin. BC$  sa valeur  $\frac{\sin. AC. \sin. A}{\sin. B}$  (3715).

3770.  $dAB : dC :: \sin. BC. \sin. AB : \sin. C. \sin. AC$  ; en mettant pour  $\sin. B$  sa valeur  $\frac{\sin. C. \sin. AC}{\sin. AB}$  (3711).

3771.  $dAB : dC :: \sin. A. \sin. AB^2 : \sin. AC. \sin. C^2$ , en mettant les valeurs de  $\sin. BC = \frac{\sin. A. \sin. AB}{\sin. C}$  (3715), & de  $\sin. B = \frac{\sin. C. \sin. AC}{\sin. AB}$  (3711).

3772. Si  $B = 90^\circ$ .  $dAB : dC :: \sin. BC : R$  ou ::  $\text{tang. } BA : \text{tang. } C$ . Il me semble qu'on ne sauroit faire usage de la formule 278 de M. de la Caille (pag. 28).

3773. SI UN ANGLE A (Fig. 327) & un côté AC adjacent à cet angle sont supposés constants, la différentielle de l'angle B opposé au côté constant sera à la différentielle du côté BC opposé à l'angle constant, comme la tangente de l'angle B opposé au côté constant AC est à la tangente du côté BC opposé à l'angle constant A. Fig. 327.

DÉMONSTRATION.  $\sin. A : \sin. BC :: \sin. B : \sin. AC$  (3690), or dans cette proportion les deux extrêmes sont constants ; ainsi le sinus de l'angle B sera toujours en raison inverse du sin. du côté BC ; donc leurs différentielles feront aussi dans la même proportion (3296), c'est-à-dire, que la différentielle du sin. de B sera à celle du sinus de BC, comme  $\sin. B : \sin. BC$  ; mais  $d \sin. B = dB. \text{cof. } B$  (3307), &  $d \sin. BC = dBC. \text{cof. } BC$  ; donc  $dB. \text{cof. } B : dBC. \text{cof. } BC :: \sin. B : \sin. BC$  ; &  $dB. \text{cof. } B \sin. BC = dBC. \text{cof. } BC. \sin. B$  ; donc  $dB : dBC :: \text{cof. } BC. \sin.$

# 710 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

$B : \text{cof. } B. \sin. BC ; ( \text{divisant les deux derniers termes par } \text{cof. } BC ) : : \frac{\sin. B}{\text{cof. } B} : \frac{\sin. BC}{\text{cof. } BC} : : \text{tang. } B : \text{tang. } BC.$

3774. C'est-à-dire,  $dBC : dB : : \text{tang. } BC : \text{tang. } B.$

3775. Si  $B = 90^\circ$ , la variation de  $B$  & de  $BC$  est nulle.

Fig. 329. 3776. *DANS TOUT TRIANGLE sphérique tel que ABC (Fig. 329), si un côté BC & l'angle A qui lui est opposé sont constans, la différentielle d'un des autres angles C sera à celle du côté AB opposé à cet angle C, comme la tangente de ce même angle C est à la tangente du même côté AB opposé à cet angle.*

Un côté &  
l'angle oppo-  
sé constans.

DÉMONSTRATION. Supposons le triangle  $ABC$  changé en un autre triangle  $ADE$  qui en diffère infiniment peu, & qui soit tel que  $DE$  soit égal à  $BC$ , c'est-à-dire, que le côté opposé à l'angle constant  $A$  soit constant; on aura cette proportion;  $\sin. C : \sin. AB : : \sin. A : \sin. BC$ , & comme les deux derniers termes de la proportion sont constans, le  $\sin.$  de  $C$  sera au sinus de  $AB$  en raison constante, donc  $d \sin. C : d \sin. AB : : \sin. C : \sin. AB$  (3296); mais  $d \sin. C = dC \text{ cof. } C$ , &  $d \sin. AB = dAB. \text{cof. } AB$ , (3307); ainsi  $dC. \text{cof. } C : dAB. \text{cof. } AB : : \sin. C : \sin. AB$ ;  $dC. \text{cof. } C. \sin. AB = d. AB. \text{cof. } AB. \sin. C$ ; donc  $dC : dAB : : \text{cof. } AB. \sin. C : \text{cof. } C. \sin. AB$ ; divisant les deux derniers termes par  $\text{cof. } C \text{ cof. } AB$ , on a enfin  $dC : dAB : : \frac{\sin. C}{\text{cof. } C} : \frac{\sin. AB}{\text{cof. } AB} : : \text{tang. } C : \text{tang. } AB.$

3777.  $dAB : dC : : \text{tang. } AB : \text{tang. } C.$

3778. Si  $A = 90^\circ$ , l'on aura  $dAB : dC : : \sin. AC : R$  parce qu'alors  $R : \sin. AC : : \text{tang. } C : \text{tang. } AB$  (3667).

3779. Si  $B = 90^\circ$ ,  $dAB : dC : : \sin. BC : R$ ; car alors  $R : \sin. BC : : \text{tang. } C : \text{tang. } AB$  (3667).

3780. Si à la place du côté  $AB$  & de l'angle  $C$  qui lui est opposé, nous prenons le côté  $AC$  & l'angle  $B$  qui lui est opposé, nous aurons par la même raison  $dAC : dB : : \text{tang. } AC : \text{tang. } B.$

3781. Si  $A = 90^\circ$ ,  $dAC : dB : : \sin. AB : R.$

3782. Si  $C = 90^\circ$ ,  $dAC : dB : : \sin. BC : R.$  Cette

formule, ainsi que celle de l'art. 3780, sert à trouver le changement de déclinaison qui a lieu pour chaque variation dans l'obliquité de l'écliptique.

3783. Si un côté  $BC$  (Fig. 329) & l'angle opposé  $A$  sont constans, la différentielle d'un des côtés variables  $AB$  est à la différentielle de l'autre côté  $AC$ , comme le cosinus de l'angle  $C$  opposé au premier côté  $AB$  est au cosinus de l'angle  $B$  opposé au second côté  $AC$ .

DÉMONSTRATION. Puisque le côté  $BC$  est supposé égal au côté  $DE$ , ces deux côtés se coupent nécessairement en un point  $H$  soit au-dedans du triangle, comme dans la fig. 329, soit au-dehors, en supposant les côtés  $BC$  &  $DE$  prolongés. Du point d'intersection  $H$ , on décrira par les points  $B$  &  $C$  de petits arcs  $BF$  &  $CG$ , qui couperont sur  $DE$  les arcs  $HG = HC$  &  $HF = HB$ , les différences  $FD$ ,  $GE$  seront égales, puisqu'elles doivent se détruire pour rendre égaux les arcs  $BC$  &  $DE$ . Dans le petit triangle rectiligne  $BDF$  on aura  $BD : FD :: R : \sin. FBD$ , ou  $\cos. BDF$ , ou  $\cos. ABC$ ; & dans le triangle  $GCE$ ,  $CE : GE$  (ou  $FD$ ) ::  $R : \sin. GCE$ , ou  $\cos. ACB$ ; d'où l'on tire les deux équations  $FD = BD. \cos. ABC$ , &  $FD = CE. \cos. ACB$ ; donc  $BD. \cos. ABC = CE. \cos. ACB$ .

3784. C'est-à-dire,  $dAB : dAC :: \cos. C : \cos. B$ .

3785.  $dAB : dAC :: \cos. AB. \sin. AB - \cos. AC. \cos. BC. \sin. AB$  est à  $\cos. AC. \sin. AC - \cos. AB. \cos. BC. \sin. AC$ . En mettant pour  $\cos. C$  &  $\cos. B$  leurs valeurs (3718 & 3717).

3786. Si un côté  $BC$  (Fig. 326) & l'angle opposé  $A$  sont constans, la différentielle de l'angle  $B$  sera à la différentielle de l'angle  $C$ , comme le cosinus du côté  $AC$  opposé à l'angle  $B$  est au cosinus du côté  $AB$  opposé à l'angle  $C$ .

DÉMONSTRATION. Des points  $A, B, C$  comme poles, on décrira le triangle polaire  $DEF$  (3663) dont les angles  $E$  &  $F$  seront les supplémens des côtés  $AC$  &  $AB$  du triangle donné  $ABC$ , & ainsi des autres parties. Alors l'angle  $D$  & le côté  $FE$  seront constans; & l'on aura cette proportion (3783)  $d. FD : d. ED :: \cos. E : \cos. F$ ; substituant à ces quatre termes ceux qui en sont les supplé-

# 712 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

mens dans le triangle  $ABC$ , la proportion se réduit à celle qu'il falloit démontrer.

$$3787. dB : dC :: \text{cofinus } AC : \text{cof. } AB.$$

3788.  $dB : dC :: \text{cof. } B. \text{ tang. } AB. \sin. BC + \text{cof. } BC : R$ ; en mettant pour  $\text{cof. } AC$  la valeur (3720) & mettant pour  $\frac{\sin. AB}{\text{cof. } AB}$  sa valeur  $\text{tang. } AB$ .

Fig. 329.

3789. Si un côté  $BC$  (Fig. 329) & l'angle  $A$  opposé à ce côté sont constans, la différentielle d'un des côtés variables  $AB$  est à la différentielle de l'angle  $B$  adjacent à ce côté, comme le sinus de ce côté  $AB$  est à la tangente de l'angle  $C$  opposé à ce côté multipliée par le cosinus du troisième côté  $AC$ .

DÉMONSTRATION.  $dAB : dB :: dAB. dC : dC. dB$ ; mais  $dAB : dC :: \text{tang. } AB : \text{tang. } C$  (3777) &  $dC : dB :: \text{cof. } AB : \text{cof. } AC$  (3786); donc  $dAB. dC : dC. dB :: \text{tang. } AB. \text{cof. } AB : \text{tang. } C. \text{cof. } AC :: \sin. AB : \text{tang. } C. \text{cof. } AC$ ; donc  $dAB : dB :: \sin. AB : \text{tang. } C. \text{cof. } AC$ .

3790.  $dAB : dB :: \text{cof. } C. \text{ tang. } AC : \sin. B$ ; car  $dAB : dB :: dAB. dAC : dB. dAC$ ; dans les deux derniers termes on substituera les rapports tirés des démonstrations précédentes;  $dAB : dAC :: \text{cof. } C : \text{cof. } B$  (3784),  $dAC : dB :: \text{tang. } AC : \text{tang. } B$  (3780); donc  $dAB. dAC : dB. dAC :: \text{cof. } C. \text{ tang. } AC : \text{cof. } B. \text{ tang. } B$ , ou  $\sin. B$ ; donc enfin  $dAB : dB :: \text{cof. } C. \text{ tang. } AC : \sin. B$ .

3791.  $dAB : dB :: \sin. AB : \text{tang. } C. \text{cof. } AC$ ; parce que  $\text{cof. } C. \text{ tang. } AC = \frac{\sin. C}{\text{tang. } C} \cdot \frac{\sin. AC}{\text{cof. } AC}$  &  $\frac{\sin. C. \sin. AC}{\sin. AB} = \sin. B$  (3711).

Si  $A = 90^\circ$  l'on aura  $dAB : dB :: \text{tang. } AC. \text{cof. } AB : R$ ; en mettant au lieu de  $\text{tang. } C$  sa valeur  $\frac{\text{tang. } AB}{\sin. AC}$  (3567), pour  $\frac{\sin. AB}{\text{tang. } AB}$  sa valeur  $\text{cof. } AB$  (3616), & pour  $\frac{\sin. AC}{\text{cof. } AC}$  sa valeur  $\text{tang. } AC$ . Cette formule sert pour trouver le changement d'ascension droite qui répond aux variations de l'obliquité de l'écliptique, (Connoiss. des mouv. célest. 1766, pag. 188).

3792.  $dAB : dB :: \tan. AC. \sin. AB : \tan. C. \sin. AC$ ,  
en



en mettant dans la précédente, au lieu de  $\text{cof. } AC$  sa valeur  $\frac{\text{fin. } AC}{\text{tang. } AC}$ .

3793.  $dAB : dB :: \text{tan. } AC. \text{cof. } AB - \text{fin. } AC. \text{cof. } BC : \text{fin. } B. \text{fin. } AC. \text{fin. } BC$ . en mettant dans la formule 3790 pour  $\text{cof. } C$ . la première valeur de l'article 3718.

3794. Si au lieu du côté  $AB$  & de son angle adjacent  $B$ , on met le côté  $AC$  & son angle adjacent  $C$ , on aura par la même raison  $dAC : dC :: \text{fin. } AC : \text{tang. } B. \text{cof. } AB$ .

3795.  $dAC : dC :: \text{tang. } AB. \text{cof. } B : \text{fin. } C$ ; en mettant au lieu de  $\text{cof. } AB$  sa valeur  $\frac{\text{fin. } AB}{\text{tang. } AB}$ , au lieu de  $\text{tan. } B$  sa valeur  $\frac{\text{fin. } B}{\text{cof. } B}$ , & ensuite au lieu de  $\frac{\text{fin. } B. \text{fin. } AB}{\text{fin. } AC}$  sa valeur  $\text{fin. } C$  (3712).

3796. Si  $A = 90^\circ$ ,  $dAC : dC :: \frac{1}{2} \text{fin. } 2 AC : \text{cot. } C$ . En effet, on a pour lors  $\text{tang. } B = \frac{\text{tang. } AC}{\text{fin. } AB}$  (3667); donc (3794)  $dAC : dC :: \text{fin. } AC : \frac{\text{tang. } AC. \text{cof. } AB}{\text{fin. } AB}$  ou  $\frac{\text{tang. } AC}{\text{tang. } AB} :: \text{fin. } AC : \frac{\text{fin. } AC}{\text{cof. } AC. \text{tang. } AB} :: \text{sinus } AC. \text{cofin. } AC : \frac{\text{fin. } AC}{\text{tang. } AB}$ , mais  $\frac{\text{fin. } AC}{\text{tang. } AB} = \text{cotang. } C$  (3667); donc  $dAC : dC :: \text{fin. } AC. \text{cof. } AC : \text{cot. } C :: \frac{1}{2} \text{fin. } 2 AC : \text{cot. } C$  (3625).

3797. DANS UN TRIANGLE sphérique  $ABC$  (Fig. 328) où deux côtés  $AB, AC$ , sont constants, la différentielle de l'angle compris  $A$  sera à la différentielle d'un des autres angles  $B$ , comme le sinus du troisième côté  $BC$  opposé à l'angle  $A$  est au sinus du côté  $AC$  opposé à l'angle  $B$ , multiplié par le cosinus du troisième angle  $C$ .

Fig. 328.

Deux côtés constants.

DÉMONSTRATION. Que le triangle  $ABC$  se change en un autre triangle  $ABD$  qui ait le même côté  $AB$ , & dont le côté  $AD$  soit égal à  $AC$ ; la différentielle de l'angle  $A$  fera l'angle  $CAD$  ou l'arc  $FG$  tiré à  $90^\circ$  du point  $A$ , & la différentielle de l'angle  $B$  fera  $DBC$  ou l'arc  $IH$  tiré à  $90^\circ$  du point  $B$ ; ayant tiré l'arc  $CE$  perpendiculaire à  $BCH$ , on observera que  $FG : HI :: FG. CD. CE : HI. CD. CE$ ; puisque je ne fais que multiplier chaque terme

# 714 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

de la 1<sup>re</sup> raison par la même quantité, pour former les termes de la seconde raison; donc  $FG = \frac{HI.FG.CD.CE}{HI.CD.CE}$ ; mais  $\frac{FG}{CD} = \frac{1}{\sin. AC} (892)$ ;  $\frac{CD}{CE} = \frac{1}{\cot. DCE} = \frac{1}{\cot. ACB} (3613)$ , &  $\frac{CE}{HI} = \sin. BC$ ; donc  $FG = \frac{HI. \sin. BC}{\sin. AC. \cot. ACB}$ , ce qui revient à notre énoncé.

3798.  $dA : dB :: \sin. BC : \sin. AC. \cot. C$ . Nous en avons fait usage (2714 & 2732).

3799.  $dA : dB :: \sin. A : \sin. B. \cot. C$ , parce que  $\sin. BC : \sin. AC :: \sin. A : \sin. B. (3690)$ .

3800.  $dA : dB :: \sin. BC. \tan. C : \sin. AC. \sin. C$ , en multipliant la prop. 3798 par  $\tan. C$ .

3801.  $dA : dB :: \tan. C. \sin. A : \sin. B. \sin. C$ , parce que  $\sin. BC : \sin. AC :: \sin. A : \sin. B$ .

3802.  $dA : dB :: \sin. EC. \tan. C : \sin. B. \sin. AB$ , en mettant dans l'art. 3800  $\sin. B. \sin. AB$  à la place de son égal  $\sin. AC. \sin. C$ .

3803.  $dA : dB :: \sin. BC^2 : \cot. AB - \cot. AC \cot. BC$ , en mettant dans l'art. 3798 à la place de  $\cot. C$  sa valeur 3718.

3804.  $dA : dB :: \sin. AB. \sin. A : \sin. AC. \frac{1}{2} \sin. 2C$ ; car  $\sin. BC : \sin. AC. \cot. C :: \frac{\sin. AB. \sin. A}{\sin. C} (3715) : \sin. AC. \cot. C :: \sin. AB. \sin. A : \sin. AC. \sin. C. \cot. C$ , ou  $\sin. AC. \frac{1}{2} \sin. 2C (3625)$ .

3805.  $dA : dB :: R : \sin. B^2 \cot. AB - \sin. B. \cot. B. \cot. A$ , en mettant à l'art. 3799 la seconde valeur de  $\cot. C (3718)$ .

3806.  $dA : dB :: \sin. BC^2 : \cot. AB - \cot. BC. \cot. AC$ ; car mettant dans l'article 3799, à la place de  $\cot. C$  la première valeur de l'article 3718, & substituant pour  $\frac{\sin. B}{\sin. A. \sin. AC}$  sa valeur  $\frac{1}{\sin. BC} (3715)$ , pour  $\frac{\sin. B. \sin. BC}{\sin. AC}$  sa valeur  $\sin. A (3710)$ , & pour  $\sin. BC. \cot. BC$  sa valeur  $\cot. BC$ .

3807. Si au lieu de l'angle  $B$  & du côté  $AC$  qui lui est opposé, on prend l'angle  $C$  & le côté opposé  $AC$ , l'on aura par la même raison les analogies suivantes;

$dA : dC :: \sin. BC : \sin. AB. \cos. B.$

3808.  $dA : dC :: \sin. A : \sin. C. \cos. B.$

3809.  $dA : dC :: \sin. BC. \tan. B : \sin. AB. \sin. B.$

3810.  $dA : dC :: \tan. B. \sin. BC : \sin. AC. \sin. C.$

3811.  $dA : dC :: \tan. B. \sin. A : \sin. C. \sin. B.$

3812.  $dA : dC :: \sin. BC^2 : \cos. AC - \cosin. AB. \cos. BC.$

3813. Si DEUX CÔTÉS AB, AC (Fig. 328) sont constans, la différentielle de l'angle compris A est à la différentielle du côté BC qui lui est opposé, comme le rayon est au sinus de l'un ou de l'autre des deux autres angles, tel que C, multiplié par le sinus du côté constant AC, contigu à ce même angle. Fig. 328.

DÉMONSTRATION. Il faut prouver que  $FG : ED :: 1 : \sin. C \sin. AC$ ; il suffit de considérer que  $FG = \frac{ED \cdot FG \cdot CD}{CD \cdot ED}$ , puisque dans cette fraction le dénominateur détruit le numérateur à l'exception de  $FG$ , mais  $\frac{FG}{CD} = \frac{R}{\sin. AC} (892)$ , &  $\frac{CD}{ED} = \frac{R}{\sin. ECD} = \frac{R}{\sin. ACB}$ ; donc  $FG = \frac{R \cdot ED}{\sin. ACB. \sin. AC}$ ; c'est-à-dire, que  $FG : ED :: 1 : \sin. C. \sin. AC$ . L'on se sert de cette proportion pour trouver le changement de hauteur des astres en une minute de temps  $= 15' \cos. \text{amplit.} \cos. \text{haut. du pole} (3994)$ .

3814.  $dA : dBC :: 1 : \sin. AC. \sin. C$ . Nous avons fait usage de cette proportion pour trouver le changement de l'obliquité de l'écliptique (2733).

3815.  $dA : dBC :: 1 : \sin. AB. \sin. B$ ; parce que  $\sin. AC : \sin. AB :: \sin. B : \sin. C$ .

3816.  $dA : dBC :: 1. \sin. BC. \sin. C : \sin. A. \sin. B. \sin. AB^2$ ; en multipliant le premier terme par  $\sin. BC. \sin. C$  & le second par  $\sin. A \sin. AB$  qui a la même valeur.

3817. Si le côté  $BC = 90^\circ$ , on a cette équation  $dA = \frac{dBC}{\sqrt{\sin. AC^2 - \cos. AB^2}}$ . Pour la démontrer j'éleve un arc CL perpendiculaire sur BC & sur BL, dont le pole est en B, en sorte que  $BL = 90^\circ$ . A cause du triangle ACL, dans

X x x ij

# 716 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

lequel  $\sin. AC : 1 :: \sin. AL$  ou  $\cos. AB : \sin. ACL$  ou  $\cos. ACB$ , on a  $\cos. C = \frac{\cos. AB}{\sin. AC}$ ; donc  $\sin. ACB = \sqrt{1 - \frac{\cos. AB^2}{\sin. AC^2}}$ , mais  $DC = \frac{DE}{\sin. DCE} = \frac{DE}{\sin. ACB}$  &  $\frac{DE}{\sin. AC} = dA$ , donc  $\frac{DE}{\sin. ACB \cdot \sin. AC} = dA$ ; & substituant la valeur de  $\sin. ACB$ , l'on aura  $dA = \frac{dBC}{\sqrt{\sin. AC^2 - \cos. AB^2}}$ , je me suis servi de cette formule pour trouver la quantité dont la réfraction & la parallaxe changent le lever & le coucher des planètes (1028).

3818. On peut simplifier cette formule & l'approprier encore mieux à l'usage des logarithmes en mettant

$\frac{dBC}{\sin. AC \sqrt{1 - \frac{\cos. AB^2}{\sin. AC^2}}}$ ; car si l'on prend un arc  $X$ , dont le sinus soit  $= \frac{\cos. AB}{\sin. AC}$ , & qu'on en cherche tout de suite le cosinus, on aura pour la formule  $dA = \frac{dBC}{\sin. AC \cdot \cos. X}$  dont l'usage est plus commode (1028).

Fig. 328.

3819. Si DEUX CÔTÉS  $AB, AC$  (Fig. 328), sont constants, la différentielle de l'un ou de l'autre des angles opposés aux côtés constants, tel que  $B$ , sera à la différentielle du troisième côté  $BC$ , comme le rayon est à la tangente de l'autre angle  $C$  opposé à l'un des côtés constants  $AB$ , multipliée par le sinus du troisième côté, ou du côté variable  $BC$ .

DÉMONSTRATION. La différentielle de l'angle  $B$  est le petit angle  $CED$ , ou l'arc  $HI$  qui en est la mesure, & la différentielle du côté  $BC$  est le petit arc  $DE$ ; la différentielle  $HI = \frac{ED \cdot HI \cdot EC}{ED \cdot EC}$ ; or  $\frac{HI}{EC} = \frac{R}{\sin. BC}$  (892),  $\frac{EC}{ED} = \frac{R}{\tan. ECD} = \frac{R}{\tan. ACB}$ , & comme  $R = 1$ , on a  $HI = \frac{ED}{\sin. BC \cdot \tan. ACB}$ , c'est-à-dire, que  $HI : ED :: 1 : \sin. BC \cdot \tan. C$ . Nous en avons fait usage (933).

3820.  $dB : dBC :: 1 : \sin. BC \cdot \tan. C$ .

3821.  $dB : dBC :: \cot. C : \sin. BC$ .

# Des Analogies Différentielles. 717

3822.  $dB : dBC :: \cot. C : \sin. A. \sin. AB$  : parce que  $\cot. C = \frac{\cot. C}{\sin. C}$ , & que  $\sin. BC. \sin. C = \sin. A. \sin. AB$ .

3823. Si  $BC = 90^\circ$  l'on a  $dB = \frac{dBC. \cot. AB}{\sqrt{\sin. AC^2 - \cot. AB^2}}$ .

Car on a  $dB = \frac{dBC. \cot. C}{\sin. A. \sin. AB}$  (3822); mais  $\cosinus C = \frac{\cot. AB}{\sin. AC}$  (3816), donc  $dB = \frac{dBC \cot. AB}{\sin. A. \sin. AB. \sin. AC}$ ; de plus  $\sin. A : 1 :: \sin. B : \sin. AC$ , donc  $dB = \frac{dBC. \cot. AB}{\sin. AB \sin. B}$ , & parce que  $\sin. AC : \sin. B :: \sin. AB : \sin. C$ ,  $dB = \frac{d. BC. \cot. AB}{\sin. AC. \sin. C}$ .

Mais  $\sin. ACB$  ou  $\sin. C = \sqrt{1 - \frac{\cot. AB^2}{\sin. AC^2}}$  (3817) =

$\frac{1}{\sin. AC} \sqrt{\sin. AC^2 - \cot. AB^2}$ , donc  $\sin. AC. \sin. C =$

$\sqrt{\sin. AC^2 - \cot. AB^2}$ ; &  $dB = \frac{dBC. \cot. AB}{\sin. AC. \sin. C} =$

$\frac{dBC. \cot. AB}{\sqrt{\sin. AC^2 - \cot. AB^2}}$ . C'est la formule que j'ai déjà indiquée pour trouver la correction de l'amplitude, occasionnée par la réfraction ou par la parallaxe (1041).

3824. Cette formule peut se mettre sous cette forme  $dB. \frac{\cot. AB}{\sin. AC \sqrt{1 - \frac{\cot. AB^2}{\sin. AC^2}}}$  donc si l'on cherche un

arc  $X$  dont le sinus soit  $\frac{\cot. AB}{\sin. AC}$ , & qu'on en cherche tout de suite le cosinus, on aura  $dB = \frac{d. BC \cot. AB}{\sin. AC. \cot. X}$ , dont l'usage est plus commode; c'est la formule que j'ai indiquée (1042).

3825. Dans le triangle  $ABC$  l'on a encore  $dB : dBC :: \cot. C. \sin. B : \sin. A. \sin. AC$ , en mettant dans l'art. 3820, au lieu de  $\sin. BC$  sa valeur  $\frac{\sin. A. \sin. AC}{\sin. B}$  (3715).

3826.  $dB : dBC :: \frac{\cot. AB}{\sin. B} - \frac{\cot. BC}{\tan. B} : R$ , en mettant dans l'article 3821 au lieu de  $\cot. C$  l'unité divisée par la première valeur de  $\tan. C$  (3724); au lieu de  $\frac{\cot. B}{\sin. B}$  sa valeur  $\frac{1}{\tan. B}$ , & à la place de  $\frac{\cot. BC}{\sin. BC}$  sa valeur  $\cot. BC$ , cette

Equation  
des hauteurs

# 718 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

analogie a été employée pour l'équat. des hauteurs (929).

3827.  $dB : dBC :: \cot. AB - \cot. B. \cot. BC : \sin. B$ , en multipliant la formule précédente par  $\sin. B$ .

3828.  $dB : dBC :: \cot. AB. \sin. B - \cot. A \cot. B : \sin. AB$ , en mettant dans l'article 3822, à la place de  $\cot. C$  la seconde valeur de l'art. 3718.

3829. Si  $AC = 90^\circ$ ,  $dB : dBC :: \cot. C. \sin. B : \sin. A$ .

Si au lieu d'un des angles  $B$  opposé au côté constant  $AC$ , l'on considère l'autre angle  $C$  opposé au côté constant  $AB$ , l'on aura de même les analogies suivantes.

3830.  $dC : dBC :: 1 : \sin. BC, \text{ tang. } B$ .

3831.  $dC : dBC :: \cot. B : \sin. BC$ .

3832.  $dC : dBC :: \cot. B : \sin. A. \sin. AC$ .

3833.  $dC : dBC :: \cot. B. \sin. C : \sin. AB. \sin. A$

3834.  $dC : dBC :: \frac{\cot. AC}{\sin. C} - \frac{\cot. BC}{\text{tang. } C} : 1$ .

3835.  $dC : dBC :: \cot. AC. \sin. C - \cot. C. \cot. A : \sin. AC$ .

3836. Si  $AB = 90^\circ$ ,  $dC : dBC :: \cot. B. \sin. C : \sin. A$ .

Fig. 328. 3837. Si deux côtés sont constants, tels que  $AB, AC$  (Fig. 328), les différentielles des angles opposés aux côtés constants sont entre elles comme les tangentes de ces mêmes angles.

DÉMONSTRATION. Les sinus des angles opposés à des côtés constants sont en raison constante, ainsi les différentielles de ces sinus sont dans le même rapport que les sinus eux-mêmes (3296), c'est-à-dire, que  $d \sin. B : d \sin. C :: \sin. B : \sin. C$ , mais  $d \sin. B = d B. \cot. B$  (3307), &  $d \sin. C = d C. \cot. C$ ; donc  $d B. \cot. B : d C. \cot. C :: \sin. B : \sin. C$ , &  $d B : d C :: \frac{\sin. B}{\cot. B} : \frac{\sin. C}{\cot. C} :: \text{tang. } B : \text{tang. } C$ .

3838.  $dB : dC :: \text{tang. } B : \text{tang. } C$ .

3839.  $dB : dC :: \sin. B. \cot. C : \sin. C \cot. B$ , parce que  $\text{tang. } B : \text{tang. } C :: \frac{\sin. B}{\cot. B} : \frac{\sin. C}{\cot. C}$ .

3840.  $dB : dC :: \sin. AC. \cot. C : \sin. AB. \cot. B$ , car  $\text{tang. } B : \text{tang. } C :: \frac{\sin. B}{\cot. B} : \frac{\sin. C}{\cot. C}$ , &  $\sin. B : \sin. C :: \sin. AC : \sin. AB$ .

3841. Si DEUX ANGLES sont supposés constans, la différentielle du côté compris entre les deux angles constans sera à la différentielle d'un des autres côtés comme le sinus du troisième angle est au produit du sinus de l'angle opposé à ce côté & du cosinus du troisième côté. Deux angles constans.

DÉMONSTRATION. Supposons le triangle  $ABC$  (fig. 326), dont les angles  $A$  &  $B$  sont constans, ayant décrit le triangle polaire  $EFD$  (3663), l'on aura les côtés  $FE$  &  $FD$  constans; alors la différentielle de l'angle compris  $F$  est à celle de l'angle  $D$ , comme le sinus du troisième côté  $ED$  est au produit du sinus du côté  $EF$  & du cosinus du troisième angle  $E$  (3797). Substituant dans cette proportion les quantités qui correspondent à chaque terme dans le triangle  $ABC$ , on aura la proportion cherchée. Fig. 326.

3842. C'est-à-dire,  $dAB : dBC :: \sin. C : \sin. A. \cos. AC$ . Nous avons fait usage de cette proportion pour trouver le mouvement des nœuds des planètes (1352), & pour le changement des étoiles en longitude (2729). Usages de cette analogie.

3843.  $dAB : dBC :: \sin. AB : \sin. BC. \cos. AC$ , parce que  $\sin. C : \sin. A :: \sin. AB : \sin. BC$ .

3844. Si  $A = 90^\circ \dots dAB : dBC :: \sin. C : \cos. AC$ ; il suffit d'effacer  $\sin. A$  dans l'art. 3842. Nous avons fait usage de cette analogie pour l'équation du temps (971).

3845. Si  $A = 90^\circ \dots dAB : dBC :: \sin. B. \sin. AB : \frac{1}{2} \sin. 2 AC$ , car  $\sin. AB : \sin. BC. \cos. AC :: \sin. AB : \frac{\sin. AC. \sin. A}{\sin. B} . \cos. AC$  (3715), & effaçant  $\sin. A$ , qui est  $= 1$ , comme  $\sin. B. \sin. AB : \sin. AC. \cos. AC$  ou  $\frac{1}{2} \sin. 2 AC$  (3625).

3846. Si au lieu du côté  $BC$  on considère le côté  $AC$ , l'on aura par la même raison :

$dAB : dAC :: \sin. C : \sin. B. \cos. BC$ .

3847.  $dAB : dAC :: \sin. AB : \sin. AC. \cos. BC$ .

3848. Si DEUX ANGLES  $A$  &  $B$  (Fig. 326), sont constans, la différentielle du côté  $AB$  compris entre ces deux angles est à la différentielle de l'angle  $C$  opposé à ce côté compris  $AB$ , comme le rayon est au sinus d'un des côtés  $BC$  mul-

multiplié par le sinus de l'angle constant  $B$  adjacent à ce côté.

DÉMONSTRATION. Ayant décrit le triangle polaire  $EFD$  (3663), dans lequel  $FE$  supplément de l'angle  $A$ , &  $FD$  supplément de l'angle  $B$  seront constans; on aura cette proportion (3813), la différentielle de l'angle  $F$  compris entre les deux côtés constans est à la différentielle de son côté opposé  $ED$ , comme le rayon est au sinus d'un des angles  $D$  multiplié par le sinus du côté constant  $FD$  contigu à cet angle; & substituant dans cette proportion les supplémens pris dans le triangle  $ABC$ , elle se changera en celle-ci : la différentielle de  $AB$  est à celle de l'angle  $C$  comme le rayon est à  $\sin. BC. \sin. B$ .

3849. Donc  $dAB : dC :: R : \sin. BC. \sin. B$ . Nous avons employé cette proportion pour trouver le changement d'inclinaison des orbites planétaires (1378).

3850.  $dAB : dC :: R : \sin. A. \sin. AC$ , car  $\sin. B : \sin. A :: \sin. AC : \sin. BC$ .

3851. Si  $A = 90^\circ$ ,  $dAB : dC :: R : \sin. AC$ , puisque alors  $\sin. A = 1$ .

Fig. 326. 3852. SI DEUX ANGLES  $A$  &  $B$  (Fig. 326) sont constans, la différentielle d'un des côtés  $BC$  opposé à l'un des deux angles constans  $A$ , sera à la différentielle du troisième angle  $C$  comme le rayon est à la tangente de l'autre côté  $AC$  opposé à l'autre angle constant  $B$ , multipliée par le sinus du troisième angle  $C$ .

DÉMONSTRATION. Ayant décrit le triangle polaire  $EFD$  (3663), on aura les côtés  $FE$  &  $FD$  constans, donc (3819)  $dD : dED :: R : \text{tang. } E. \sin. DE$ ; & lorsqu'on substituera à la place de l'angle  $D$  son supplément  $BC$ , à la place de  $ED$  son supplément  $C$ , à la place de  $E$  le côté  $AC$ , la proportion deviendra celle qu'il falloit démontrer.

3853.  $dBC : dC :: 1 : \text{tang. } AC. \sin. C$ .

3854.  $dBC : dC :: \text{cot. } AC : \sin. C$ .

3855.  $dBC : dC :: R. \text{cof. } AC : \sin. AB. \sin. B$ , en mettant  $\frac{\sin. AB. \sin. B}{\sin. AC}$  à la place de  $\sin. C$ , &  $\text{cof. } AC$  au lieu de  $\text{cotang. } AC. \sin. C$ .



3856. Si au lieu du côté  $BC$ , l'on considère l'autre côté  $AC$  opposé à l'autre angle constant, on aura par la même raison.

$$dAC : dC :: 1 : \text{tang. } BC. \text{ fin. } C.$$

$$3857. dAC : dC :: \text{cotang. } BC : \text{fin. } C.$$

$$3858. dAC : dC :: \text{cos. } BC : \text{fin. } AB. \text{ fin. } A.$$

3859. SI DEUX ANGLES  $A$  &  $B$  (Fig. 326),  
sont constants, les différentielles des côtés opposés aux angles constants seront entre elles comme les tangentes de ces mêmes côtés. Fig. 326.

DÉMONSTRATION. des points  $A, B, C$ , comme poles, on décrira à  $90^\circ$  de distance les arcs  $FE, DF, ED$ , qui formeront le triangle polaire  $EDF$  (3663); les différentielles des angles  $D$  &  $E$  seront les mêmes que celles des côtés  $BC$  &  $AC$ , car quand un arc est le supplément de l'autre il ne peut varier d'une quantité quelconque sans que le supplément varie exactement de la même quantité. Or par l'art. 3838, on aura  $dD : dE :: \text{tang. } D : \text{tang. } E$ , d'où suit la proportion suivante qu'il s'agissoit de démontrer.

$$3860. dBC : dAC :: \text{tang. } BC : \text{tang. } AC.$$

3861. Si  $A=90^\circ$ ,  $dEC : dAC :: R : \text{cos. } C$ ; car dans un triang. rect.  $R : \text{cos. } C :: \text{tang. } EC : \text{tang. } AC$  (3668).

3862. Je joindrai à ces théorèmes une proposition qui est d'un assez grand usage dans l'astronomie (2567, 3988, &c.); elle a pour objet des quantités qui sont d'un ordre inférieur, c'est-à-dire, beaucoup plus petites que les quantités que nous avons traitées comme infiniment petites; mais il est bien des cas où ces quantités deviennent sensibles, sur-tout lorsqu'on veut donner une étendue de 30 ou 40' aux variations infiniment petites, dont nous avons parlé dans les articles précédens.

3863. DANS UN TRIANGLE rectangle sphérique dont un angle de même que le côté opposé sont très-petits par rapport aux autres côtés, la différence entre l'hypothénuse & le grand côté est égale à la moitié du carré du petit côté multipliée par la cotangente de l'hypothénuse. Différence entre l'hypothénuse & le côté. Fig. 321.

Soit  $BAD$  (fig. 321), un triangle sphérique rectangle  
Tome III. Y y y y

## 722 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

en  $D$ , dont le côté  $AD$  soit comme une ligne droite très-petite ;  $DH$  &  $AH$  deux tangentes en  $D$  & en  $A$  ; du point  $H$  où ces deux tangentes rencontrent le rayon de la sphère prolongé, ou  $CEBH$ , on décrira par le point  $A$  un petit arc de cercle  $AG$ , dont  $HA$  &  $HG$  sont les rayons, dont la petite perpendiculaire  $AD$  sera le sinus, & dont  $GD$  est le sinus verse, alors on aura  $GD = \frac{AG^2}{2AH}$  ( 3353 ) ; mais  $AH$  est la tangente de l'arc  $BA$  ou  $BD$  &  $AG$  ne diffère pas de  $AD$ , donc  $DG = \frac{AD^2}{2 \text{ tang. } BD} = \frac{AD^2}{2} \cot. BD$ . Cela suppose que les lignes  $DG$  &  $AD$  sont exprimées dans les tables en parties semblables, c'est-à-dire, ou en décimales du rayon ou en secondes, mais les tangentes qu'on prend dans les tables sont en décimales du rayon, il faut donc aussi que l'arc  $AD$  soit en décimales ; s'il est donné en secondes, il faut diviser  $AD^2$  deux fois par  $57^\circ$  ( 3359 ) pour avoir  $AD^2$  en décimales, & après évalué ainsi la formule, il faudra pour avoir  $DG$  multiplier par  $57^\circ$  ou  $206264''$ , pour le réduire en secondes ; ainsi  $DG$  ou la différence entre l'hypothénuse  $AB$  & le côté  $DB$  du triangle  $ADB$ , exprimée en secondes, est  $\frac{AD^2 \cdot \cot. BD}{2 \cdot 57^\circ}$ .

### *Résoudre le Triangle avec la règle & le compas.*

3864. LA PROJECTION ORTOGRAPHIQUE dont nous avons parlé à l'occasion des éclipses ( 1825 ), est très-commode pour résoudre les triangles sphériques avec la règle & le compas, à un quart de degrés près ; cette méthode est souvent fort utile dans l'astronomie pour diminuer la longueur des opérations, quand on n'a besoin que d'une médiocre précision, comme cela arrive très-souvent.

Projection  
de la sphère  
sur le méridien.  
Fig. 330.

Pour en comprendre la démonstration quand on est bien accoutumé à la sphère, il suffit des considérations suivantes Soit  $OM$  (fig. 330), la méridienne ou le diamètre de l'horizon du nord au sud ;  $CB$  l'axe du monde,  $B$  le pôle,  $A$  le zénit,  $AB$  la distance du pôle au zénit,

ou le complément de la latitude ;  $KN$  est le diamètre d'un almicantaré ou d'un petit cercle parallèle à l'horizon (191) ;  $GD$  le rayon du parallèle diurne que décrit un astre, dont  $GB$  est la distance au pôle ; considérons cet astre au moment où il répond perpendiculairement au point  $F$ , sa projection sur le plan du méridien étant en  $F$  ; alors  $FH$  est le sinus de sa hauteur,  $FD$  le cosinus de son angle horaire pour le rayon  $GD$  ;  $CH$  le sinus de son azimut compté du point d'orient sur l'almicantaré ;  $CD$  le sinus de sa déclinaison, ou le cosinus de sa distance au pôle. Si l'on tire le rayon  $CG$ , la ligne  $FE$  perpendiculaire à  $GD$  & la ligne  $EL$  perpendiculaire à  $CEG$ , l'arc  $GL$  fera l'angle horaire, car  $FD$  étant le cosinus de l'angle horaire pour le rayon  $GD$ , on aura  $CE$  égale au cosinus du même angle pour le rayon  $CG$  qui est le rayon du cercle  $OGM$ , donc l'arc  $GL$  est l'angle horaire. De même si l'on tire  $CK$  & qu'on porte  $CR$  le long de  $CT$ , on aura le cosinus de l'azimut sur le grand cercle. Concevons un triangle formé au pôle, au zénit, & au soleil, que j'appellerai  $PZS$ , comme dans les fig. 35, 42, 89, &c. ces trois côtés sont  $PZ$ ,  $ZS$ ,  $SP$  ; or  $PZ$  est représenté dans la fig. 330 par  $BA$  ;  $ZS$  y est représentée par  $AK$ ,  $SP$  y est représenté par  $BG$ , l'angle  $P$  par  $GL$ , & l'angle  $Z$  a son cosinus exprimé par  $CT$  ; ainsi il n'est pas bien difficile de ramener tous les cas des triangles sphériques à la figure 330.

3865. CONNOISSANT deux côtés & l'angle compris, trouver le troisième côté & l'un des autres angles. On décrira un demi-cercle  $OAM$ , (fig. 330), dont  $O$  est le centre,  $A$  le sommet ; on prendra l'arc  $AB$  égal au côté adjacent à l'angle cherché,  $BG$  égal au côté opposé à l'angle cherché,  $GL$  égal à l'angle donné, compris entre ces deux côtés ; on tirera le rayon  $CB$  & la perpendiculaire  $GD$ , le rayon  $CG$  &  $LE$  perpendiculaire sur  $CG$  ; par le point  $E$  on tirera  $EF$  perpendiculaire sur  $GD$ , & par le point  $F$  la ligne  $KN$ , parallèle au diamètre  $OCM$ , celle-ci coupera les arcs  $KA$  ou  $NA$  égaux au côté cherché opposé à l'angle qui est exprimé par  $GL$ . C'est une suite naturelle des

Fig. 330.

## 724 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

*Fig. 330.* principes de la sphère ; car si  $B$  est le pole,  $A$  le zénit ;  $GD$  le rayon du parallèle d'un astre,  $OK$  sa hauteur,  $KN$  le diamètre de son almicantrat, l'astre répondra perpendiculairement au point  $I$ ,  $FD$  fera le cosinus de l'angle horaire pour le rayon  $DG$ , &  $CE$  pour le rayon  $CG$  ; ainsi l'arc  $GL$  fera l'angle  $P$  du triangle  $PZS$  si souvent employé dans ce livre, en supposant  $AK = PS$ ,  $AB = PZ$ ,  $EG = PS$ .

Pour avoir l'angle qui est opposé au côté exprimé par  $BG$ , ou adjacent au côté représenté par  $AB$ , on tirera au point  $K$  la ligne  $CRK$ , & par le point  $F$  la ligne  $IFH$  perpendiculaire à  $CO$ , le point d'intersection de  $CK$  & de  $IH$  sera en  $R$  ; on prendra  $CT = CR$ , & ayant élevé la perpendiculaire  $TV$  on aura l'arc  $VO$  égal à l'angle cherché. Cela serviroit à trouver l'azimut ou l'angle  $Z$  dans le triangle  $PZS$ .

3866. Lorsqu'on connoît les trois côtés, on peut trouver de même un des angles, en prenant  $AB$ ,  $BG$ , &  $AK$  égaux aux trois côtés du triangle,  $AK$  représentant le côté opposé à l'angle cherché ; on tirera les lignes  $CB$ ,  $GD$ ,  $CG$ ,  $KN$ ,  $FE$ ,  $EL$ , & l'on aura  $GL$  pour la mesure de l'angle cherché, opposé au côté dont  $AK$  est la valeur. On trouvera ci-après (3992) un exemple utile de ces opérations graphiques dans la méthode des longitudes ; soit pour avoir l'heure en mer, soit pour trouver les angles à la lune & à l'étoile, qui donnent les corrections dépendantes de la parallaxe & de la réfraction. Je vais en donner ici un autre exemple, qui peut être d'usage pour un astronome.

3867. CONNOISSANT la longitude & la latitude d'un astre, trouver son ascension droite & sa déclinaison. Il s'agit de résoudre le triangle  $PES$  (*fig. 223*), dans lequel on connoît l'angle  $E$  formé au pole de l'écliptique avec  $EP$  &  $ES$  (2705) ; on prendra  $AB$  (*fig. 330*) égal à l'obliquité de l'écliptique  $= 23^{\circ} \frac{1}{4}$  ;  $BG$  égal à la distance de l'étoile au pole boréal de l'écliptique, &  $GL$  égal au complément de la distance à l'équinoxe le plus prochain, comptée sur l'écliptique, c'est-à-dire, égal à la distance de l'astre

*Fig. 223.*

*Fig. 330.*

au colure des solstices prise par le plus court chemin ; ayant tiré les lignes  $CB$ ,  $CG$ ,  $GD$ ,  $LE$ ,  $EF$ ,  $KFN$ ,  $IFH$ ,  $CH$ , on aura  $OK$  égal à la déclinaison cherchée, qui sera boréale quand le point  $K$  sera au-dessus du point  $O$ . On prendra  $CT = CR$ , & ayant élevé la perpendiculaire  $TV$ , l'arc  $AV$  fera l'ascension droite cherchée, ou plutôt la distance au plus prochain équinoxe ; puisque c'est le complément de l'angle  $P$  du triangle  $PES$  (fig. 223), dont les trois côtés sont représentés  $AB$ ,  $BG$  &  $AK$  le côté qu'exprime  $EG$  lui étant opposé. Si le point  $F$  étant au-dessus du point  $D$ , le point  $T$  se trouve par rapport au centre  $C$  du même côté que le point  $B$ , c'est une preuve que l'ascension droite & la longitude sont de différens côtés par rapport à l'équinoxe duquel on est parti, lorsqu'on a pris  $GL$  égal au complément de la distance à l'équinoxe le plus voisin ; c'est le cas de l'art. 904.

## *DES PROJECTIONS ET DES CARTES GÉOGRAPHIQUES.*

3868. LORSQU'ON veut représenter sur un plan une portion du globe (234), on éprouve une difficulté qui vient de la différence essentielle entre une surface courbe & un plan. Il est même impossible que la situation respective des différens points d'une carte soit la même que dans un globe, en prenant des longitudes & des latitudes pareilles ; mais on s'efforce d'en approcher. Les plus anciennes cartes étoient projetées fort grossièrement ; les méridiens étoient des lignes droites parallèles & égales entre elles, & les degrés de longitudes égaux par-tout aux degrés de latitude : c'est ce qu'on appelle des *Cartes plates*. Plusieurs auteurs remarquèrent le défaut de cette imitation ; Ptolomée lui-même, ensuite Martin Cortèse, Pierre Nonius, Coignet ; & l'on a cherché à y remédier par le moyen de différentes projections (1823), on peut voir sur les projections en général Guide Ubalde, Clavius,

## 726 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

Aguillon , Tacquet , & M. de la Caille dans les *Mémoires de 1744*.

3869. La projection la plus simple de toutes est la projection *Orthographique* (1823), mais elle est très-défectueuse pour les cartes d'une certaine étendue, parce que les sinus versés devenant très-petits vers les bords de l'hémisphère, les arcs y sont représentés par de trop petites lignes : on ne s'en peut servir que pour les cartes des régions circompolaires, ou pour les pays qui ont peu d'étendue.

3870. La forme la plus commode pour les cartes qui doivent contenir une grande partie du globe, & surtout pour les Mappemondes, celle qui défigure le moins la forme naturelle des continens, est la *Projection Stéréographique* (1824); c'est celle dont Ptolomée s'est servi dans son astrolabe, on en voit un exemple dans la Mappemonde de la fig. 133 (*Planche xv*), on s'en sert également dans les planisphères célestes. Les quatre parties du Monde de M. de l'Isle, & beaucoup d'autres cartes importantes, sont faites sur cette projection; les méridiens & les parallèles y sont représentés par des cercles qui se coupent à angles droits comme sur le globe, mais les distances linéaires y sont toutes diminuées ou raccourcies, excepté seulement à la circonférence de la projection. Les degrés aux environs du centre de la carte sont réduits à la moitié; en sorte que les surfaces qui devoient être les mêmes, comme sur le globe, y sont quatre fois moindres que sur les bords.

On suppose que l'œil est placé à la circonférence même du globe dans la partie supérieure, & qu'il regarde l'hémisphère inférieur en rapportant tous les points de cet hémisphère sur le plan du grand cercle, perpendiculaire au diamètre sur lequel l'œil est placé.

3871. Par exemple, l'astrolabe de Ptolomée ou l'astrolabe polaire est une projection du globe faite sur un plan parallèle à l'équateur, par des lignes tirées d'un des poles; les méridiens y deviennent des lignes droites;

mais dans les Mappemondes le plan de projection est le premier méridien, l'œil est supposé dans l'équateur à  $90^\circ$  de longitude pour le continent de l'Amérique, & à  $270^\circ$  pour l'ancien continent. M. Robert de Vaugondy a fait des cartes de Russie, où l'œil est supposé au pôle, & dont le plan de projection est l'équateur; alors tous les parallèles sont concentriques, & les méridiens sont des lignes droites, divisées inégalement.

3872. Soit l'œil placé en  $Q$  (fig. 317),  $BD$  le diamètre du cercle de projection,  $BFD$  le demi-cercle, qu'il s'agit de projeter sur le diamètre  $BD$ ; on conçoit des rayons visuels menés de l'œil  $Q$  aux différens points de cette concavité; ils rencontrent le diamètre  $BD$  en autant de points, qui en sont les projections. Du milieu  $F$  de la projection soit pris un arc  $FR$  de  $40^\circ$ , dont la projection est  $CG$ , l'angle  $CQG$  sera de  $20^\circ$ , c'est-à-dire, la moitié de l'arc  $FR$ , & puisque  $QC$  est le rayon du cercle,  $CG$  sera égal à la tangente de  $20^\circ$ : ainsi dans la projection stéréographique un arc compté du centre, a pour projection la tangente de la moitié de l'arc.

3873. La plus belle propriété de la projection stéréographique consiste à représenter par des cercles tous les cercles de la sphère, grands ou petits, & nous avons fait usage de cette propriété pour les passages de Vénus (2111). Soit un arc  $RF$  dans une position quelconque, sur lequel nous concevrons un petit cercle de la sphère qui ait pour diamètre  $FR$ , & qui soit la base d'un cône oblique scalène  $FQR$ ; je dis que la section  $CG$  de ce cône par le plan de projection, sera encore un cercle. Les triangles  $QFR$ ,  $QCG$  sont semblables; car ayant tiré  $HR$  parallèle à  $BD$ , on aura l'arc  $QDR$  égal à l'arc  $QBH$ , la moitié de  $QDR$  sera la mesure de l'angle  $QFR$ , la moitié de l'arc  $QBH$  sera la mesure de l'angle  $QRH$ , ou de son égal  $QGB$ , donc l'angle  $QGC$  est égal à l'angle  $QFR$ ; les triangles  $QCG$ ,  $QFR$  ont encore un angle commun en  $Q$ , donc ils sont parfaitement semblables, de même que les cônes dont ils sont les sections; donc la base du cône  $QFR$  étant un cercle, la

Propriétés de  
cette projec-  
tion.

Fig. 317.

Tous les cer-  
cles du globe  
paroissent des  
cercles sur  
cette projec-  
tion.

## 728 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

base du cône  $QCO$  est également circulaire, quoiqued'une grandeur fort différente; on verroit, en faisant d'autres figures semblables avec les mêmes lettres, que la grandeur de  $FR$  & sa situation, même dans le demi cercle supérieur  $BQD$  ne change rien à la vérité de cette proposition. Ainsi dans la projection stéréographique tous les cercles du globe, quelle que soit leur position, sont représentés par des cercles.

Rayon d'un  
méridien.

Fig. 317.

3874. Les méridiens dans cette projection sont des cercles qui sont d'autant moins courbes, c'est-à-dire, dont les diamètres sont d'autant plus grands, que l'on se rapproche du centre; pour connoître la valeur de leurs diamètres, soit la longitude  $BH$  ou  $DI$ , d'un méridien qui passe par les points  $H$  &  $I$  diamétralement opposés; la projection du demi-cercle  $HRI$ , fera la ligne droite  $SP = SC + CP$ ;  $SC$  est la tangente de la moitié de  $HF$ , ou de la moitié du quart-de-cercle  $BF$ , moins la moitié de la longitude  $BH$ ;  $PC$  est la tangente de la moitié de l'arc  $FI$ , ou de  $45^\circ$  plus la demi-longitude; ainsi prenant la moitié de  $SP$ , ou la moitié de la somme de ces deux tangentes, l'on en infère aisément cette règle générale: *Le rayon d'un méridien dans la projection stéréographique est égal à la demi-somme de la tangente & de la cotangente de la différence entre  $45^\circ$  & la demi longit. de ce méridien.* Par exemple, le rayon du méridien qui passe à  $80^\circ$  de longitude, sera la moitié de la somme des tangentes de  $5^\circ$  & de  $85^\circ$ ; celui du méridien qui a  $60^\circ$  de longitude, fera la demi-somme des tangentes de  $15^\circ$  & de  $75^\circ$ , qui en est le complément.

Rayon d'un  
parallèle.

3875. La projection d'un parallèle à l'équateur devant être un cercle, il nous est aisé d'en déterminer le diamètre. Soit  $IR$  le diamètre du parallèle,  $QF$  celui de l'équateur, le point  $R$  aura pour projection le point  $G$ , &  $CG$  est la tangente de la moitié de la latitude  $FR$  ou de l'angle  $FQR$ , égal à l'angle  $MQP$ , le point  $I$  a pour projection le point  $P$ , &  $CP$  est égale à la tangente de l'angle  $CQP$  qui est le complément de  $MQI$  ou  $RQF$ , ainsi  $CP$  est la cotangente







cotangente de la moitié de la latitude, & la différence *GP* fera le diamètre du parallèle. Ainsi le rayon d'un parallèle à l'équateur sur la projection stéréographique est égal à la moitié de la différence entre la cotangente & la tangente de la moitié de la latitude.

3876. L'horizon d'un lieu quelconque rapporté sur un planisphère céleste étant aussi un cercle, l'on peut le tracer pour servir à trouver le lever le coucher des astres sur le planisphère mobile. Pour trouver le rayon de ce cercle, soit *Q* le pôle du monde, où l'œil est supposé fixe dans la projection stéréographique des planisphères; *ICH* l'horizon du lieu donné, dont les extrémités se rapportent en *S* & en *P* sur le plan de projection; la ligne *SP* est le diamètre de l'horizon, elle est composée de deux parties *CS* & *CP* qui sont la tangente & la cotangente de la moitié de la latitude. Pour Paris le demi-diamètre est de  $132\frac{1}{2}$  en supposant le rayon de 100, ou de  $397\frac{1}{2}$  en supposant le rayon de 300, comme M. Robert de Vaugondy dans la description de ses hémisphères, il a donné une table des rayons de l'horizon pour différentes latitudes où il s'est glissé quelques petites fautes; en voici une autre qui suppose le rayon de 10000 parties; on y voit que le rayon est infini pour les pays situés sous l'équateur, parce que leur horizon est un méridien, & que dans nos planisphères tous les méridiens sont des lignes droites qui se coupent au pôle. Pour faire usage de cette espèce d'horizon, il faut le former en carton, mettre son centre au point du méridien qui marque la latitude du lieu sur le planisphère.

Latit.	Rayons.
0	Infini.
10	57538
20	29238
30	20000
40	15557
50	13054
60	11547
90	10000

3877. M. de la Hire proposa une autre projection immobile où les divisions sont moins inégales, l'œil étant supposé à  $\frac{7}{2}$  du diam. ou à une dist. du plan de projection égale au sinus de  $45^\circ$ . (*Hist. de l'acad.* 1701, pag. 98).

3878. LES CARTES RÉDUITES, c'est-à-dire, les cartes marines de Wright ou de Mercator sont les plus

Cartes réduites.

utiles qu'il y ait, à cause de leur usage pour la navigation; on peut en regarder l'invention comme une des découvertes importantes du 15<sup>e</sup> siècle. Gérard Mercator publia vers l'an 1550 une carte, où les degrés de latitude alloient en augmentant vers les poles, mais il n'en expliqua point les principes; ce fut Edward Wright, Anglois qui vers l'an 1590 découvrit les vrais principes sur lesquels ces cartes devoient être construites, il en fit part à Jodocus Hondius, Graveur, qui s'en attribua l'invention, mais elle fut revendiquée en 1599 par Wright, dans son livre intitulé : *Correction of errors in navigation*, où il rend justice d'ailleurs à Mercator.

Dans ces cartes réduites les degrés de longitude sont supposés tous égaux; mais pour que les degrés de latitude soient dans un juste rapport aux degrés de longitude, on les augmente en raison inverse des cosinus, ou en raison directe des sécantes des latitudes, en sorte qu'à 60° de latitude où les degrés des parallèles devoient être la moitié seulement de ceux de l'équateur, les degrés de latitude sont doublés, & les degrés des parallèles restent les mêmes. Par ce moyen les rumbes de vent sont représentés sur ces cartes par des lignes droites, car les méridiens étant parallèles ils sont tous coupés sous le même angle, & c'est une extrême commodité pour les opérations du pilotage.

3879. Pour faciliter la construction de ces cartes, on a calculé des tables des latitudes croissantes, en Anglois *Tables of meridional parts*, que l'on peut voir dans les traités de navigations, par exemple, celui de M. Bouguer (édition de M. de la Caille, imprimé en 1760 & 1769). Cette table suppose que les degrés de longitudes soient par tout de 60' de l'équateur, & l'on y trouve pour chaque degré de latitude la longueur du méridien comptée depuis l'équateur, en supposant que tous ses degrés ont augmenté comme les sécantes des latitudes. Par exemple, pour 60° on trouve 4527, c'est la longueur de la ligne droite qui représente les 60 premiers degrés du méridien, en supposant que le premier degré soit de 60 parties, &

le dernier de 120. Ainsi chaque nombre de la table des latitudes croissantes, n'est que la somme des sécantes, en supposant 10 pour le sinus total, & retranchant 10 de la somme, pour qu'elle soit zéro au point de départ. On objecte aux cartes réduites que les pays y paroissent plus larges qu'ils ne sont sur le globe, dès qu'on s'éloigne de l'équateur; mais les situations respectives qu'ils ont entre eux n'y sont point altérées; il n'y a que l'échelle changée qui augmente à mesure qu'on approche des poles.

M. Halley a donné une règle fort élégante pour trouver les arcs du méridien qui forment la table des latitudes croissantes, sans additionner les sécantes, *Philos. transf. n°. 219*. M. Robertson en a donné une démonstration, *Philos. transf. n°. 496*; en voici une très-simple, pour laquelle il suffira de se rappeler les principes suivans.

1°. Lorsque les différences ou les petits accroissemens d'une suite de quantités sont dans le même rapport que les quantités elles-mêmes, c'est une preuve qu'elles croissent en progression géométrique, & que leurs logarithmes croissent uniformément.

2°. Quand on a deux suites de quantités qui croissent uniformément ou en progression géométrique, il suffit d'avoir la première différence de chaque suite, pour avoir toutes les autres.

3°. Quand on veut faire route vers le nord-est, ou à 45° de la méridienne, en coupant tous les méridiens sous un angle de 45°, on est obligé de suivre une courbe appelée *Loxodromie* <sup>(a)</sup> de 45°; & si l'on avance uniformément en longitude, les accroissemens de latitudes iront toujours en diminuant, à proportion que les degrés des parallèles diminueront, de même que si l'on avançoit également en latitude, on auroit des différences de longitudes qui iroient en croissant, parce qu'un égal progrès sur les parallèles donne une plus grande augmentation de longitude sur l'équateur quand le parallèle est plus petit.

(a) *ῥέγος ὀβlique, δὲ ῥέγος course*, même obliquité, & forme une espèce de spirale autour du pôle.  
c'est une route oblique à la méridienne, mais qui est par-tout de la

Règle de  
Halley.

Pl. XLII.

Fig. 335.

3880. *LES PARTIES* du méridien dans les cartes réduites sont exprimées par les différences des logarithmes, des tangentes des demi-complémens des latitudes. Soit *P* le pôle (fig. 335), *FI* un petit changement de latitude qui répond à  $1^{\circ}$  de changement en longitude sur l'équateur; *FI* est égal à la longueur du degré du parallèle correspondant, parce que sous le rumb de  $45^{\circ}$  on fait autant de chemin vers l'orient que vers le nord; ayant tiré la ligne *AI* de l'extrémité du diamètre on aura  $FO = FI$ ; car dans le triangle *FOI* les angles *I* & *O* sont égaux, étant mesurés l'un par la moitié de l'arc *IA*, l'autre par la moitié d'un arc égal dans le demi-cercle opposé. Puisque *FI* & *FO* sont égales au degré du parallèle, ce degré *FO* est à son rayon *FG* comme un degré de l'équateur est au rayon de la sphère; mais  $FO : FG :: MR : MC$ , donc *MR* est à *MC* en raison constante. Puisque *AC* est le rayon de la sphère, *CM* est la tangente de l'angle *CAM* ou de la moitié de l'arc *PF*, c'est à-dire, du demi-complément de la latitude; donc l'accroissement *RM* de la tangente étant à cette même tangente en raison constante, les logarithmes des tangentes des demi-complémens des latitudes croîtront uniformément, aussi bien que les différences de longitude le long de l'équateur, que nous avons supposées uniformes; donc la différence des logarithmes fera trouver en tout temps celle des longitudes.

En allant de  $0^{\circ}$  à  $1^{\circ}$  de latitude, on a les demi-complémens des latitudes  $45^{\circ}$  &  $44^{\circ} 30'$ , dont les logarithmes tang. diffèrent de 7580, ce qui fait 126 pour chaque minute de longitude; ainsi l'on pourra dans tous les cas prendre la 126<sup>e</sup> partie de la différence des logarithmes des tangentes des demi-complémens des latitudes pour avoir le nombre de minutes dont on aura avancé en longitude sur l'équateur, en suivant la loxodromie de  $45^{\circ}$ .

Mais ces progrès en longitude qui vont en augmentant quand on avance uniformément en latitude sont dans le même rapport que les augmentations des degrés de latitude dans les cartes réduites, donc les parties du méridien dans ces cartes sont exprimées par les différences des

logarithmes tang. des demi-complémens des latitudes.

3881. Les méthodes particulières employées par les géographes dans les cartes ordinaires sont fort différentes entre elles ; mais toutes ont le défaut de représenter mal les distances respectives des lieux ; & la plupart ont encore celui de ne pas avoir les méridiens perpendiculaires aux parallèles de latitude , en sorte qu'un espace de la terre qui est un quadrilatère rectangle y est souvent représenté par un rhomboïde obliquangle , dont les diagonales sont fort éloignées de l'égalité ; cependant on ne laisse pas de mettre des échelles fixes pour les distances , quoique toutes ces distances soient variables.

3882. Il y a pourtant des cartes où l'on a évité ce dernier inconvénient , telles sont les cartes de Schenk à Amsterdam , la *Germania Critica* du Professeur Mayer , plusieurs cartes de Senex , de M. Buache , de M. Robert de Vaugondy , &c. Dans ces cartes les méridiens sont représentés par des lignes droites convergentes vers un point , duquel comme centre l'on décrit les parallèles à l'équateur ; on trouve une règle pour décrire ces cartes dans la préface du petit Atlas de Berlin. M. Buache s'en est servi dans plusieurs cartes ; c'est moins une projection qu'un développement du cône que l'on suppose être circonscrit à la sphère , & la toucher sur le parallèle moyen.

3883. Pour avoir une forme où la figure des pays soit plus approchante de la figure du globe , dans des cartes qui doivent renfermer une étendue considérable du globe , comme 30 ou 40 degrés , M. BONNE , très-habile géographe emploie la méthode suivante ; il s'en est servi pour l'Empire de Russie , & pour ses autres cartes qui se trouvent à Paris , chez Lattré , Graveur. Les degrés de latitudes y sont égaux , les parallèles à l'équateur y sont représentés par des cercles concentriques dont le centre est au point où la tangente moyenne rencontre l'axe de la terre , en sorte que les cartes sont le développement d'un cône circonscrit à la sphère , & qui la toucheroit sur la circonférence du parallèle qui occupe le milieu de la carte. Le parallèle de 50° de latitude est représenté sur la carte

Cartes particulières.

# 734 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

par un cercle dont le rayon est la cotangente de  $50^\circ$ ; & ainsi des autres, qui sont tous décrits du même centre, & à des distances égales.

3884. Il s'agit sur-tout de savoir quel arc il faut prendre sur ce cercle de la carte pour exprimer un degré du parallèle terrestre qu'il représente; on le trouve en multipliant un degré ou  $60'$  par le sinus de la latitude. *Fig. 336.* En effet, soit  $P$  le pôle de la terre (*fig. 336*),  $D$  le point qui est situé à  $50^\circ$  de latitude, en sorte que  $DB$  est le cosinus de  $50^\circ$ , &  $DT$  la cotangente; le parallèle dont  $DB$  est le rayon est plus petit que le cercle dont le rayon est  $TD$ , dans le même rapport que  $BC$  est plus petit que  $TD$ , ainsi un degré ou  $60'$  du parallèle occupera sur le cercle de la carte, dont  $TD$  est le rayon, un arc égal à  $60' \frac{BD}{TD} = \frac{60' \cos. lat.}{\cotang. lat.} = 60^\circ \cos. lat. \text{ tang. lat.} = 60' \sin. latit.$ , c'est-à-dire,  $46'$  pour  $50^\circ$  de latitude. En général, deux méridiens distans en longitude d'une quantité  $m$  forment entre eux un angle égal à  $m. \sin. latit.$

3885. Ainsi l'on voit que  $46'$  du cercle dont  $TC$  est le rayon, & qui doit représenter sur la carte le parallèle de  $50^\circ$ , font la valeur d'un degré de longitude, par conséquent  $5^\circ$  de longitude font  $3^\circ 50'$  du cercle de la carte, de même  $10^\circ$  font  $7^\circ 40'$ , &  $15^\circ$  font  $11^\circ 30'$ , &c. On a souvent besoin de décrire ce cercle sans en avoir le centre; pour cela on prendra  $5^\circ$  du méridien pour sinus total, on les multipliera par le cosinus de  $50^\circ$ , & l'on aura  $3^\circ 13'$  pour la valeur de  $5^\circ$  sur le parallèle de  $50^\circ$ . Ainsi l'on prendra  $3^\circ 13'$  du méridien pour faire  $5^\circ$  du parallèle; on les portera sur une ligne droite perpendiculaire au méridien. L'on divisera cet espace en 67 parties (c'est la tangente de  $3^\circ 50'$ ); on en prendra  $2 \frac{1}{4}$  au-dessus, (c'est l'excès de la sécante de  $3^\circ 50'$  sur le rayon), l'on aura un des points du parallèle de  $50^\circ$ . On portera sur la même perpendiculaire au méridien  $6^\circ 26'$  du méridien pour faire  $10^\circ$  du parallèle, on divisera cet espace en  $134 \frac{1}{3}$  (tangente de  $7^\circ 40'$  valeur des  $10^\circ$  de longitude); on prendra 9 de ces parties au-dessus de la perpendiculaire & l'on aura



un nouveau point du parallèle. De même pour  $15^{\circ}$ , on portera  $9^{\circ} 39'$  du méridien, la tangente de  $11^{\circ} 30'$  étant  $303 \frac{1}{2}$  & la partie extérieure de la sécante  $= 20 \frac{1}{2}$ , l'on cherchera un  $4^{\text{e}}$  point, & ainsi des autres. Quand on a ainsi plusieurs points d'un cercle, on peut le décrire sans en avoir le centre, en prenant une règle flexible, dont on augmente la convexité par le moyen d'une vis, jusqu'à ce qu'elle s'applique sur tous les points marqués. Si la carte est assez petite pour qu'on veuille supposer les méridiens rectilignes, il ne s'agit que de les tirer tous vers le même centre par les divisions des parallèles, mais pour avoir sur toute l'étendue de la carte une même échelle, on préfère de prendre sur les autres parallèles des intervalles qui diminuent comme les cosinus des latitudes, & l'on a ainsi sur ces parallèles divers points par lesquels on fait passer les méridiens, avec la règle courbe & élastique.

Règle courbe  
& élastique.

M. Murdoch a donné une méthode pour calculer ce développement du cône, de manière que la surface conique soit égale à la surface de la zone sphérique représentée sur la carte; il faut pour cela que le cône au lieu de toucher la sphère la coupe dans son intérieur. (*Philos. trans.* 1758).

3886. Flamsteed a employé dans son Atlas céleste (732) une autre forme de projection; il suppose que les parallèles à l'équateur y soient représentés par des lignes droites & parallèles entre elles, dont les degrés soient, (aussi bien que dans la sphère), proportionnels aux sinus des distances au pôle, les méridiens y prennent la forme de la courbe des sinus, dont Wallis parla autrefois dans son Traité de la Cycloïde; les cercles de latitudes & les parallèles à l'écliptique, y prennent en certains endroits des figures assez bisarres, mais on les tire facilement par le moyen des degrés d'ascension droite & de déclinaison, qui répondent à chaque degré de longitude & de latitude. Si l'on imagine le globe couvert de fils pliés sur les parallèles à l'équateur, qu'on y trace les constellations, & qu'on développe les fils sur un plan, l'on aura la projection de

## 736 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

Flamsteed, (*Hist. cœlest. Proleg. pag. 159*). Il y a des cartes géographiques où l'on s'en est servi.

Fuseaux des  
globes.  
Fig. 337.

3887. Pour former les globes célestes & terrestres (169), on est obligé de faire graver des *fuseaux* (fig. 337) qui sont aussi une espèce de projection, ou un développement du globe, semblable à celui que nous venons d'expliquer. La longueur  $FC$  de l'axe de cette courbe est égale au quart de la circonférence du globe; les intervalles des parallèles sur l'axe  $PC$  sont tous égaux, les rayons des cercles  $KDI$  qui représentent les parallèles sont égaux aux cotangentes des latitudes (3883), & les arcs de chacun comme  $DI$  sont égaux à peu-près au nombre de degrés de la largeur du fuseau (qui est ordinairement de  $30^\circ$ ), multipliés par le sinus de la latitude; ainsi, l'on ne trouveroit aucune difficulté à les tracer; mais l'embarras vient du changement qu'éprouvent les fuseaux quand on les colle sur le globe, & de la quantité dont il faut faire prêter le papier, moins sur les côtés qu'au milieu, parce que les côtés sont plus longs, pour l'ajuster précisément à l'espace qu'il doit couvrir.

3888. La méthode usitée parmi les ouvriers pour tracer les fuseaux, & qui est décrite par Bion (*Usage des globes*, L. III.) ; & par M. Robert de Vaugondy, au 7<sup>e</sup> tome de l'Encyclopédie, est peu géométrique, mais elle est suffisante dans la pratique, on tire sur le papier une ligne  $AC$  égale à la corde de  $15^\circ$ , pour faire la demi-largeur du fuseau, & une perpendiculaire  $CP$  égale à trois fois la corde de  $30^\circ$ , pour faire la demi-longueur; car ces papiers, dont les dimensions seront égales aux cordes, deviennent égaux aux arcs même, lorsqu'on les colle sur le globe.

On divise la hauteur  $CP$  en 9 parties, si l'on veut tirer les parallèles de 10 en 10 degrés; on divise aussi le quart-de-cercle  $BE$  en 9 parties égales; par chaque point de division tel que  $G$  du quart-de-cercle, & par le point correspondant  $D$  de la ligne droite  $CP$  l'on tire des perpendiculaires  $HGF$  &  $DF$ , dont la rencontre en  $F$  donne

un des points de la courbe *BFP* qui terminera la circonférence du fuseau. Quand on a trouvé ainsi un assez grand nombre de points on trace le contour *PIB* avec une règle courbe. Par cette construction l'on donne au fuseau des largeurs qui sont comme sur le globe en raison des cosinus des latitudes ; on suppose ces largeurs prises perpendiculairement à *CD*, ce qui n'est pas bien exact, mais il est impossible de prescrire une opération rigoureuse pour faire un plan qui puisse couvrir une surface courbe, & qui sur une ligne droite *AB* fasse des lignes *PA*, *PC*, *PB* égales entre elles, comme elles doivent l'être sur le globe. Pour décrire le cercle *KDI* qui est à  $30^{\circ}$  de l'équateur, il faut prendre au-dessus de *D* un point qui en soit éloigné de la valeur de la tangente de  $60^{\circ}$  prise ou dans les tables, ou sur un cercle égal à la circonférence du globe qu'on veut tracer ; ce point servira de centre pour le parallèle *DI* qui doit passer au point *D*, car on le suppose égal à celui d'un cône circonscrit au globe, & qui le toucheroit au point *D*.

Les méridiens se tracent de 10 en 10 degrés en divisant chaque parallèle comme *KI* en 3 parties aux points *L* & *M*, & tirant depuis le pôle *P* par tous ces points de divisions des courbes qui représentent les méridiens intermédiaires entre *PA* & *PB*, comme *BR* & *ST* (fig. 338).

Fig. 338.

L'écliptique *AQ* se trace par le moyen de la déclinaison connue des différens points de l'équateur, que l'on prend dans une table : pour  $10^{\circ}$ , elle est  $3^{\circ} 58'$  ; pour  $20^{\circ}$ ,  $7^{\circ} 50'$ , = *BQ* ; pour  $30^{\circ}$ ,  $11^{\circ} 29'$  ; &c.

3889. En général on observe que le papier sur lequel on fait les cartes, tel que le *colombier*, se raccourcit de  $\frac{1}{2}$ , ou d'une ligne sur six pouces, l'un portant l'autre, quand il est séché après l'impression ; ainsi il faut encore prévenir cet inconvénient dans la gravure des fuseaux ; si malgré cela les fuseaux se trouvent trop courts, on en est quitte pour ôter sur le tour un peu du blanc dont le globe est enduit ; on le rend par-là de la grandeur convenable aux fuseaux que l'on a fait imprimer. Mais ce qu'il y a de singulier, c'est qu'en tirant le fuseau mouillé de

Raccourcissement du papier.

## 738 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

colle pour l'appliquer sur le globe, l'axe  $GH$  s'allonge, & le côté  $AK$  se raccourcit, enforte que ni la longueur du côté  $ACK$ , ni celle de l'axe  $GEH$  du fuseau ne sont précisément égales à un quart d'une circonférence de globe, quand on les considère sur le cuivre ou sur les nombres côtés dans la figure 338.

3890. M. Bonne ayant fait diverses expériences sur les dimensions que prennent des fuseaux, après qu'on y a mis la colle pour les appliquer sur le globe, sur-tout avec le papier du *nom de Jesus*, qu'il a employé dans son globe d'un pied de diamètre, a trouvé qu'il falloit donner aux fuseaux sur le cuivre les dimensions de la fig. 338. En supposant que le rayon du globe contienne 720 parties, la demi-largeur du fuseau est  $AG = 188 \frac{1}{10}$ ; la distance  $AC$  pour le parallèle de  $10^\circ$  prise sur la ligne droite  $LM$  est de 128, 1, le petit écart du parallèle de  $10^\circ$  dans le milieu du fuseau, où la flèche  $ED$  est de 4; la ligne  $ABN$  est droite, le rayon du parallèle de  $10^\circ$  ou du cercle  $CEI$  est de 4083, & ainsi des autres. La petite calotte circulaire qui se place au-dessous de  $H$  a pour rayon 253, au lieu de 247 qu'elle auroit, si le sinus de  $20^\circ$  devoit en être le rayon.

Du premier  
méridien.

3891. LE PREMIER MÉRIDIEN des globes terrestres, & des cartes géographiques, varie beaucoup suivant les pays; j'ai déjà parlé de cette diversité (48), voici quelques détails que j'avois annoncés; on en trouvera de plus considérables dans le P. Riccioli (*Geogr. reform. pag. 385*). Pythéas de Marseille, au rapport de Strabon (L. 1.) regardant l'Isle de Thulé, comme la partie la plus occidentale du monde connu, y plaçoit le commencement des longitudes; on croit que l'Islande est cette ancienne Thulé. Ératosthène commençoit aux colonnes d'Hercule, vers le détroit de Gibraltar; Marin de Tyr, & Ptolémée le plus célèbre des géographes anciens, placèrent le premier méridien aux Isles fortunées, appelées aujourd'hui les *Canaries*; mais ils ne déterminèrent point laquelle de ces Isles étoit la plus occidentale, & devoit servir de terme de numération parmi les Arabes. Alfragan,

Albategnius, Naffir-Eddin & Ulug-Beg, comptèrent aussi des Isles fortunées; mais Abulfeda, géographe célèbre comptoit ses longitudes d'un méridien plus oriental de  $10^{\circ}$  que celui de Ptolomée, & l'on croit que c'étoit pour le faire passer à l'extrémité occidentale d'Afrique, où étoient selon lui les colonnes d'Hercule, ou à Cadix, devenue fameuse par la conquête des Maures en Espagne : voilà pourquoi les longitudes dans Abulfeda sont plus petites de  $10^{\circ}$  que dans les autres géographes Arabes, qui ont suivi Ptolomée. (*V. Greaves in Hudson geog. min. pag. 8*).

Lorsque les Açores eurent été découvertes par les Portugais, en 1448, il y eut des auteurs qui comptèrent les longitudes de l'Isle de Tercère. Les cartes de Gérard Mercator, mort en 1594, qui forment le grand Atlas publié en 1628 par Hondius, donnent  $3^{\circ}$  de longitude à l'Isle de Fer; Jodocus Hondius, mort en 1611, lui en donne 12 dans sa carte d'Afrique, inférée au même Atlas.

On trouve des cartes géographiques, par exemple, celle de Toscane, publiée à la calcographie de Rome en 1745, où les longitudes sont plus grandes de  $5^{\circ} 23'$  que celle de l'Isle de Fer prise à  $20^{\circ}$  de Paris; il semble que cela ne peut venir que d'une vieille erreur sur la position des Isles Canaries.

Janſſon, dans ses cartes des quatre parties du monde publiées en 1624, Guillaume Blaeu, dans son nouvel Atlas placèrent leur premier méridien au pic de Ténériffe, montagne très-élevée que les Navigateurs apperçoivent de loin, & qui sembloit être un point de départ fixé par la nature même. Les Hollandois s'en servent encore; il est de  $18^{\circ} 52'$  à l'occident de Paris. Janſſon, dans ses hémisphères plans, Ortelius, dans sa carte universelle; Gérard Mercator le jeune, Bercius, dans son Europe abrégée, le mirent à l'Isle de Fuego, ou S. Philippe, l'une des Isles du Cap-Verd, sur ce qu'ils étoient persuadés qu'en cet endroit l'aiguille aimantée n'avoit aucune déclinaison.

3892. Louis XIII. par une déclaration du 25 Avril 1634, rendue sur l'avis des Mathématiciens les plus con-

## 740 ASTRONOMIE, Liv. XXIII.

nus, fixa le premier méridien à la partie la plus occidentale des Canaries; l'Isle de Fer est la plus occidentale de toutes, & le Bourg de cette Isle est à  $19^{\circ} 54'$  à l'occident de Paris M. de l'Isle, M. d'Anville, & la plupart des géographes François négligent les  $6'$ , & supposent la longitude de Paris égale à  $20^{\circ}$ .

Dans les cartes marines publiées à Paris, & qui forment le grand recueil du *Neptune François*, & celui de l'*Hydrographie Française* de M. Bellin, on compte les longitudes du méridien de Paris, en les distinguant par orientales & occidentales; les Anglois font la même chose par rapport au méridien de Londres, & quelquefois par rapport au méridien du Cap Lézard qui est de  $0^h 29' 52''$  ou de  $7^{\circ} 28'$  à l'occident de Paris, & à  $49^{\circ} 57'$  de latitude. Dans les cartes marines on réunit ordinairement ces différentes échelles, de même que celle du pic de Ténériffe, pour se rendre utile aux différentes nations, en attendant une convention générale qu'il est difficile d'espérer.

Par la même raison que nous comptons en France la longitude de Paris de  $20^{\circ} 0'$  en nombres ronds, les Italiens comptent celle de Rome de  $30^{\circ} 0'$  au lieu de  $30^{\circ} 3'$  qu'on auroit en partant du Bourg de l'Isle de Fer; c'est ainsi qu'on le voit dans le P. Boscovich, *De Litteraria expeditione* 1755, pag. 187.

## DE LA GNOMONIQUE.

3893. LA GNOMONIQUE, ou la science des cadrans solaires se réduit à la trigonométrie ou aux projections des cercles de la sphère; il nous sera donc facile d'en renfermer toute la théorie en peu de mots, pour terminer les applications que nous avons à faire de l'astronomie.

Un cadran solaire est un plan sur lequel on a marqué les différentes sections des cercles horaires (93) qui passent par un point quelconque pris pour index, ou par une ligne parallèle à l'axe du monde, prise pour style; car dans toute sorte de cadran le style doit être dirigé vers

le pôle du monde, par où les cercles horaires passent tous sans exception.

Le cas le plus simple de la Gnomonique est celui du cadran équinoxial ; un cercle divisé en parties égales est placé perpendiculairement au méridien ; son inclinaison sur la méridienne étant égale à la hauteur de l'équateur, le style est placé au centre du cercle, perpendiculairement au plan du cadran, & parallèlement à l'axe du monde ; il suffit que le cercle soit divisé en 24 parties égales par 24 rayons, qui seront les 24 lignes horaires.

Cadran  
équinoxial.

3894. Après le cadran équinoxial, le cas le plus simple de la Gnomonique, est celui d'un cadran horizontal, dont le style est incliné sur la méridienne d'une quantité égale à la hauteur du pôle ; ce style part d'un point qu'on appelle aussi le centre du cadran ; si l'on imagine un cercle perpendiculaire au style en un point quelconque de sa longueur, ce cercle sera parallèle à l'équateur, & formera un cadran équinoxial (3893), si l'on prolonge les rayons de ce cercle divisé en heures, ou ses lignes horaires, elles iront rencontrer le plan horizontal en des points, où aboutiront les lignes horaires, tirées par le centre du cadran.

Cadran  
horizontal.

De cette simple considération, il est facile de conclure que dans un cadran horizontal, la tangente de l'angle de chaque ligne horaire avec la méridienne, est égal à la tangente de l'angle horaire multiplié par le sinus de la latitude. On prend le cosinus de la latitude s'il s'agit d'un cadran vertical dirigé de l'orient à l'occident, ou exposé en plein midi.

3895. On peut tracer graphiquement les lignes horaires d'un cadran horizontal par le moyen d'un globe ; il ne faut que voir les points où l'horizon est coupé par les cercles horaires de  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ , &c. les distances de ces points au méridien marquent les angles des lignes horaires avec la ligne méridienne. En effet, tous les cercles horaires se coupent dans l'axe du globe, comme dans l'axe d'un cadran horizontal, ils sont interceptés par l'horizon du globe, comme par le plan horizontal du cadran, leurs

communes sections se rencontrent au centre du globe, comme au centre du cadran; ainsi les angles que forment les communes sections, sont mesurées par la circonférence de l'horizon du globe, comme elles le seroient par un cercle décrit du centre du cadran sur le plan du même cadran; les points de l'horizon où passent ces cercles horaires sont les extrémités des sections de ces cercles sur l'horizon; donc les distances de ces points à celui du midi expriment les angles de ces sections avec celle du méridien sur l'horizon.

Cadran vertical déclinant.

L'on peut avoir les angles horaires d'un cadran vertical par les mêmes méthodes, pourvu qu'on connoisse la déclinaison du plan; on placera le vertical mobile du globe de la même manière que le plan donné, c'est-à-dire, qu'on l'éloignera du méridien autant que le plan en est éloigné, & l'on examinera les points où ce vertical est coupé par les cercles horaires du globe; les distances de ces points au zénit du globe seront les angles des lignes horaires avec la méridienne. En effet, les lignes horaires sont les intersections des plans des cercles horaires avec le plan du vertical où l'on décrit le cadran, & la ligne du zénit est l'intersection du méridien avec ce plan; donc les distances entre le zénit & les points du vertical, où les cercles horaires passent, sont les angles des lignes horaires avec la méridienne.

Sur un plan quelconque.

3896. On peut tracer un cadran sur un plan quelconque par le moyen d'un cadran équinoxial, ou d'un cadran horizontal déjà fait: il ne s'agit que de tracer une méridienne horizontale (109), d'élever un style qui se dirige vers le pôle, & qui rencontrera le plan au centre du cadran, de placer sur ce style un cadran équinoxial, ou bien un cadran horizontal, dont le style fasse avec l'autre une seule & même ligne; on prolongera les lignes horaires de ce cadran, jusques à la rencontre du plan donné, elles marqueront les points où chaque ligne horaire doit être tirée, en partant du centre du cadran. Si l'on ne peut avoir de centre, on y supplée en donnant au cadran équinoxial deux positions différentes, pour



avoir deux points de chaque ligne horaire sur le plan.

3897. On peut calculer, par la trigonom. sphérique, les angles des lignes horaires d'un cadran quelconque, pourvu qu'on connoisse l'inclinaison & la déclinaison du cadran, c'est-à-dire, l'angle que son plan fait avec le plan de l'horizon, & l'angle compris entre la méridienne & la section commune de l'horizon & du cadran; mais je supposerai, en premier lieu, que le plan passe par le zénit, puisqu'on se sert rarement des plans inclinés.

Soit  $AZP$  (fig. 339) le méridien,  $Z$  le zénit,  $ZXL$  le cercle vertical dans lequel est le plan d'un cadran déclinant; on connoît la déclinaison, qui est égale à l'angle  $PZX$ , avec la distance du pole au zénit  $PZ$ . Dans le triangle  $ZPX$  rectangle en  $X$ , on cherche la perpendiculaire  $PX$  qui mesure l'angle de l'axe avec la Soufitylaire, c'est-à-dire, avec la ligne marquée par les perpendiculaires que l'on conçoit tirées de chaque point du style sur le plan du cadran. On cherche aussi le côté  $ZX$  qui mesure l'angle de la soufitylaire avec la ligne verticale ou méridienne. Si  $PH$  est un cercle horaire quelconque, par exemple, celui d'une heure, qui fait un angle  $ZPH$  de  $15^\circ$  avec le méridien; la différence des angles  $ZPH, ZPX$  donnera l'angle  $HPX$ ; avec cet angle & le côté  $PX$ , on trouvera l'arc  $HX$  qui mesure l'angle de la soufitylaire avec la ligne horaire cherchée.

Si l'on a un plan tel que  $AY$  qui ne passe point par le zénit, on connoîtra du moins son inclinaison sur l'horizon, dont le complément est égal à l'arc perpendiculaire  $ZV$ , & sa déclinaison ou l'angle que fait l'horizontale du plan avec la méridienne horizontale; le complément de cette déclinaison est l'angle  $AZV$ ; l'on cherchera  $AZ$ , & l'angle  $A$ . Dans le triangle  $APY$  rectangle en  $Y$ , connoissant  $AP$  & l'angle  $A$ , on trouvera  $AY$  qui est l'angle de la soufitylaire avec la méridienne du cadran, de même que l'angle  $APY$ , & l'arc  $PY$  qui est égal à l'angle du style & de la soufitylaire. Dans le triangle  $POY$ , formé par le cercle horaire d'une heure ou de  $15^\circ$ , l'on connoîtra l'angle  $OPY$  & le côté  $PY$ ; on trouvera  $OY$  angle de la

Par la trigonométrie sphérique.

Fig. 339.

## 744 ASTRONOMIE, LIV. XXIII.

soufitylaire avec la ligne d'une heure, dont le cercle  $PO$  & l'angle  $\angle PO$  marquent la distance au méridien. Le style est toujours supposé parallèle à l'axe du monde, faisant avec la soufitylaire un angle égal à l'arc  $PY$ .

3898. Pour connoître la déclinaison d'un plan, on peut tracer une méridienne horizontale vers le pied (109), & mesurer l'angle qu'elle fait avec la ligne horizontale du plan. De même sur un cadran vertical, le pied du style, (ou le point auquel répond la perpendiculaire abaissée de son extrémité sur le plan) étant pris pour centre, l'arc des ombres égales sur le plan, étant divisé en deux parties égales, donnera la position de la soufitylaire; car quand le soleil passe dans le plan du cercle horaire  $PX$  perpendiculaire au plan du cadran, l'ombre du style droit est la plus courte qui soit possible ce jour-là, & à distances égales du soleil au cercle horaire  $PX$  les ombres sont égales; quand on aura la soufitylaire, l'angle qu'elle formera avec la vertical sera l'arc  $ZX$ ; connoissant  $PZ$  &  $ZX$ , on trouvera l'angle  $Z$  qui est la déclinaison du plan. On trouve aussi la déclinaison d'un plan vertical par la méthode de M. de Parcieux, en traçant par le pied du style une verticale & une horizontale.

Auteurs de 3899. Nous renvoyons pour le détail de cette science Gnomonique. au *Traité complet de Gnomonique* de M. de Parcieux; on pourra consulter aussi Ozanam, la Hire, Rivard, la Madeleine, Dom Bedos, Blaize, Bion; parmi les plus anciens, on peut voir Oroncefiné, Munster, Schoner, Voell, Henrion, Clavius, Kircher, de Challes, &c. V. *Mém. acad.* 1757, sur les cadrans analemmatiques ou sur le cadran azimutal elliptique. Les principes que nous venons de donner suffisent pour entendre & même pour tracer toute sorte de cadran, mais le détail des pratiques convenables à chaque cas, & des moyens d'exécution ont fait la matière de beaucoup de traités.



# LIVRE VINGT-QUATRIEME.

## DU CALCUL ASTRONOMIQUE

*par le moyen des Observations, soit sur Terre,  
soit sur Mer.*

L'OBSERVATION a été le fondement de cette astronomie, les tables en ont été le résultat; c'est pourquoi nous avons expliqué fort au long la manière d'observer, & de construire les tables; mais il nous reste à expliquer d'une façon élémentaire les diverses opérations par lesquelles on passe de l'observation à la construction des tables; si l'on joint à cela les explications que j'ai mises au bas de chaque table, on aura tout ce qui forme proprement le CALCUL ASTRONOMIQUE. J'ai été obligé de le placer à la fin de cet ouvrage, parce qu'il y entre des choses qui ne se rapportoient à aucun des traités précédens, & des notions qui supposent la lecture de ces mêmes traités.

En quoi consiste le calcul astronomique.

3900. Nos logarithmes <sup>(a)</sup> ordinaires ne sont autre chose que la progression arithmétique des nombres naturels 0, 1, 2, 3, &c. placés à côté de la progression géométrique décuple, 1, 10, 100, 1000, &c. Ainsi dans nos tables ordinaires de logarithmes, le nombre 1 est véritablement le logarithme de 10, & le nombre 2 est le logarithme de 100.

Nombres.	Logarithmes.
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6

Définition des logarithmes.

Les zéro que l'on trouve à la suite du logarithme 2, y feroient inutiles si l'on n'avoit à traiter que les seuls nombres de la progression géométrique décuple 1, 10,

(a) Ἀριθμοί, *numerus*; Λόγος, *Sermo*, *ratio*; parce qu'ils indiquent les nombres.

## 746 ASTRONOMIE, Liv. XXIV.

100, &c. c'est-à-dire, si l'on n'avoit pas besoin des logarithmes intermédiaires.

3901. Pour avoir les logarithmes des nombres compris entre 1 & 10, on ajoute des fractions décimales à chacun de ces deux nombres & à leurs deux logarithmes 0 & 1, l'on établit une progression géométrique entre 1 & 10, & une progression arithmétique correspondante entre 0 & 1, & les termes de celle-ci sont les logarithmes des termes de celle-là. Par exemple, la moyenne proportionnelle géométrique entre 1 & 10 est 3,1623, c'est-à-dire,  $3 \text{ \& } \frac{1623}{10000}$ ; la moyenne arithmétique entre 0 & 1 est 0,5 ou cinq dixièmes; donc le logarithme de 3,1623 est 0,5, ou 0,50000, qui est absolument la même chose.

Invention  
des logarith-  
mes.

3902. NEPER, Baron Ecoffois, fut l'auteur de cette belle invention, & il publia à Edimbourg en 1614 une table de logarithmes, mais HENRI BRIGGS, Professeur de géométrie à Oxfort, avec qui il en avoit conféré, & qui avoit déjà calculé vers 1600 les sinus naturels à 15 chiffres, par des méthodes algébriques, calcula encore sous une forme bien plus commode & avec 15 chiffres, les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 20000, & depuis 90000 jusqu'à 101000; cette table fut imprimée à Londres en 1624. Briggs avoit aussi calculé les logarithmes des sinus & des tangentes pour chaque centième de degré avec 15 chiffres, il mourut en 1632 à l'âge de 70 ans, mais Gellibrand publia ces calculs (*Trigonometrica Britannica*, Goudæ, 1633).

Tables de  
Briggs & de  
Ulaq.

3903. ADRIEN ULACQ compléta bientôt les logarithmes des nombres calculés par Briggs, & donna les logarithmes depuis 20000 jusqu'à 90000, (*Arithmetica Logarithmica*, Goudæ 1628). Considérant ensuite que l'usage des minutes & des secondes étoit plus familier aux astronomes, que celui des centièmes de degré employés dans la table de Briggs, & que les différences des logarithmes étoient trop inégales au commencement de cette table, Ulaq. se détermina vers 1630 à calculer encore les logarithmes des sinus & des tangentes de dix en dix secondes, avec 11 chiffres; ce sont ceux dont les astronomes

se servent encore ; mais ils sont extrêmement rares aujourd'hui, en voici le titre : *Trigonometria artificialis, sive magnus Canon triangulorum logar. ad radium 10000000000, & ad dena scrupula secunda, ab Adriano Ulacco Goudano constructus*, Goudæ, 1633.

3904. Ce travail dont nous profitons encore tous les jours a fait oublier celui de *Benjamin Ursinus*, Mathématicien de l'Electeur de Brandebourg, qui avoit cependant déjà calculé des logarithmes semblables suivant la forme de Néper; ils avoient paru en 1625, & durent être d'un grand secours pour les calculs d'Ulacq. Ce dernier profita aussi du grand Ouvrage de Rheticus, publié par Pitiscus, où les sinus naturels avoient été calculés de dix sec. en dix sec., avec 15 chiffres sans compter le rayon (*Thesaurus mathematicus*, Francofurti 1613) <sup>(\*)</sup>, ils étoient déjà avec 10 chiffres dans *Opus Palatinum* (456, 485).

3905. Les logarithmes de Briggs & d'Ulacq, soit pour les nombres, soit pour les sinus, ont été publiés à Londres en 1742. par *Gardiner*, avec 8 chiffres seulement; & réimprimés à Avignon en 1770; c'est l'édition la plus commode & la plus facile à trouver actuellement. Les logarithmes des nombres y sont disposés d'une façon très-abrégée qui avoit été imaginée par Nathaniel Roe, & employée par Sherwin, (*Mathematical tables*, in-8°. 1705). On y prend aisément les logarithmes des nombres jusqu'à un million.

Edition plus  
commode de  
Gardiner.

3906. L'édition des logarithmes qui est dans la trigonométrie de M. de Parcieux, est d'une forme très-commode, pour les astronomes; nous l'avons encore perfectionnée en 1760. M. de la Caille & moi, dans une petite édition portative que nous fîmes faire conjointement (1889), qui a été réimprimé ensuite en 1768, & qui se trouve chez la veuve Desaint. On y voit pour les trois premiers degrés la différence entre les logarithmes des sinus & ceux des nombres naturels; par le moyen de ces différences on a très-facilement les sinus des degrés minu-

(\*) Ce livre est extrêmement rare. J'en donnerai la notice dans le Journal des Savans de 1771.

# 748 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

tes & secondes. Ainsi pour avoir le sinus de  $2^{\circ} 11' 37''$  on prend son logarithme dans les nombres naturels ; 3,897462, & l'on trouve vis-à-vis du sinus de  $2^{\circ} 12'$ , la différence 4,685469 qui ne varie presque pas d'une minute à l'autre ; la somme est 8,582931 ; c'est le log. sinus de  $2^{\circ} 11' 37''$ . On pourroit ajouter ces différences aux logarithmes, jusqu'à 20 mille.

3907. On trouvera l'usage des logarithmes avec des exemples, dans tous les livres où il y a des tables de logarithmes ; à l'égard des logarithmes des fractions décimales dont j'ai fait usage plusieurs fois, & dont on ne trouve pas l'explication dans les livres ordinaires ; on pourra consulter l'explication que j'en ai donnée dans mon *Exposition du calcul astronomique*, pag. 52 ; on y verra, par exemple, pourquoi la fraction 0,0001 a pour logarithme 6. En général, la caractéristique des logarithmes de fractions est toujours le complément à 9 du nombre des zéro, qui sont après la virgule dans le nombre donné.

Règle pour les logarithmes de fractions.

3908. S'il s'agit de diviser la fraction 0,0999 par la fraction 0,5, l'on a une soustraction à faire, comme on le voit ci-contre ; l'on suppose une dizaine à côté de la caractéristique 8, & l'on retranche 9 de 18 ; en effet, dès que les dizaines excédentes se négligent dans l'addition, elles se suppléent par la même raison dans la soustraction qui n'est qu'une addition renversée ; si dans l'opération précédente on ajoute B avec C, il vient 18 pour la caractéristique de A ; voilà pourquoi nous la supposons également de 18 pour pouvoir faire la soustraction.

8,99956	A
9,69897	B
<hr/>	
9,30059	C

3909. Il suit encore de là que pour diviser l'unité par une fraction, comme  $\frac{1}{10}$ , il faut prendre le complément du logarithme de la fraction ; car le logarithme de 1 est zéro, & pour ôter de zéro le logarithme  $-1$ , pour lequel nous avons mis  $+9$ , il est clair qu'il faut écrire  $+1$ .

3910. S'il s'agit de prendre la racine carrée d'une fraction 0,0999, c'est-à-dire, de diviser son logarithme

par 2, il faut écrire pour le logarithme de cette fraction, 18,99956, dont la moitié 9,49978 est le logar. de sa racine 0,316. S'il falloit prendre la racine cube d'une fraction 0,6258, dont le logarithme est 9,79643, il faudroit supposer à la caractéristique 29 au lieu de 9, & l'on auroit pour le tiers 9,93214, auquel répond 0,8554, qui est la racine cube cherchée. En effet, dans le logarithme 8,99956 le 8 tient la place de  $-2$ , dont la moitié est  $-1$ , ou ce qui revient au même  $+9$ ; donc c'est en effet 9 que je dois avoir pour la moitié, donc c'est 18 que je dois supposer au lieu de 8, dans le logarithme 8,99956.

3911. Toutes les analogies que l'on fait pour résoudre les triangles sphériques (3672 & suiv.), se réduisent à de semblables additions; en voici un exemple appliqué à la forme des logarithmes de Gardiner, dont j'ai parlé ci-dessus (3905). Je suppose qu'on connoisse la longitude du soleil  $30^{\circ} 0' 5''$  avec l'obliquité de l'écliptique, & qu'on veuille trouver la déclinaison du soleil (908), on fera la proportion suivante :

Le rayon, ou le sinus total	182	}
Est au sinus de la long. du soleil, $30^{\circ} 0' 5''$	9,6989700	}
Comme le sin. de l'obl. de l'écl. $23^{\circ} 28' 22''$	9,6002151	}
Est au sin. de la décl. du soleil $11^{\circ} 29' 17\frac{1}{4}$	97	}
	9,2992130	

Logar. des tables le plus approchant au-dessous	1375	
Différence	755	104

La différence divisée par celle des tables diminuée d'un chiffre donne  $7''\frac{1}{4}$

3912. Le nombre 182, qui est au-dessus du premier logarithme, est la partie proportionnelle qui répond à  $5''$ ; le nombre 97 est la partie proportionnelle qui répond à  $2''$ . Les quatre chiffres écrits sous le dernier logarithme, sont les derniers chiffres du logarithme de sinus, qui dans les tables approche le plus de celui que nous voulons trouver, & qui répond à  $11^{\circ} 29' 10''$ ; la différence est 755; on la divise par 104, qui est la différence

Exemple de  
l'usage des lo-  
garithmes.

# 750 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

correspondante à une seconde dans les tables, & il vient au quotient  $7''\frac{1}{4}$ , qu'on ajoute avec les  $11^{\circ} 29' 10''$ , & l'on a le nombre cherché  $11^{\circ} 29' 17''\frac{1}{4}$ .

Omission de la dixaine.

3913. J'ai observé dans cet exemple de ne point écrire la dixaine de la caractéristique, qui se trouve 19, j'ai seulement écrit 9 : cela remédie à l'excédent qui est occasionné par l'introduction que l'on fait de 9 à la place de — 1, & de 8 à la place de — 2 (3906).

3914. Je donnerai aussi un exemple des logarithmes des nombres, appliqué aux mêmes tables, parce que j'ai vu qu'on y trouvoit quelquefois de l'embarras, l'explication étant fort succincte ; je suppose qu'on cherche le logarith. du nombre 3,141593 (3321), on commencera par mettre 0 pour la caractéristique, parce que dans les tables de Gardiner ou de Sherwin (3905), les caractéristiques ont été omises pour abrégér ; mais on fait que quand il n'y a qu'un chiffre d'unités, comme dans le nombre proposé, où les six autres sont des décimales, le logarith. commence toujours par 0 (3900). On cherchera dans les logarith. des nombres naturels, vis-à-vis de 3141, l'on aura les trois premiers chiffres 497 qui suivent la caractéristique ; en suivant la même ligne on trouvera au-dessous de 5, c'est-à-dire, dans la sixième colonne 1371 ; ainsi le logarithme de 3,1415 est 0,4971371. Dans une petite colonne qui est en marge, on cherchera le sixième chiffre 9 du nombre donné, on verra 124, c'est la partie proportionnelle qu'il faut ajouter au logarithme, à cause du sixième chiffre 9 ; on prendra encore dans cette petite colonne le septième chiffre 3, & vis-à-vis l'on trouvera 41, dont retranchant un chiffre on aura 4, qui est la partie proportionnelle pour le septième chiffre ; on ajoutera donc 128, & l'on aura pour le logarithme entier 0,4971499.

Logarithmes logistiques.

3915. Dans l'usage ordinaire des tables astronomiques, on se sert souvent des logarithmes logistiques (a)

(a) Logistique est le nom qu'on donnoit à l'algèbre ; on l'a donné ensuite à la courbe logarithmique ; il est actuellement consacré à cette petite espèce de logarithmes ; ce mot vient peut-être de λογιστικός



employés dans l'astronomie Caroline de Street (520). On y trouve l'avantage de n'avoir rien à retrancher dans toutes les règles de trois, dont le premier terme est un degré ou 60', ce qui a lieu continuellement dans l'usage des tables. La règle de trois qui a servi à trouver le diamètre de la lune (pag. 60 & 78 des Tables), aussi bien que toutes les parties proportionnelles que nous avons supposées dans les calculs du lieu du soleil & de la lune, se peuvent faire à la vérité par la multiplication & la division ordinaire, en réduisant tout en secondes; mais elles sont bien plus faciles par les logarithmes logistiques. On les trouve à la fin de nos tables avec un exemple abrégé, pag. 245 & suivantes; je les ai prolongés au-delà de 60', à cause du mouvement diurne du soleil qui passe souvent 60'; mais quand on ajoute un de ces logarithmes, qui au-delà de 60' commencent par 9, il faut retrancher 1 de la caractéristique ou du cinquième chiffre à gauche. Si l'on s'en est servi dans une soustraction, il faut suppléer 1 dans la caractéristique de la somme. Par exemple, si je faisois cette proportion  $72' : 36' :: 18' : x$ , j'ajouterois 2218 avec 5229, au lieu de la somme 7447 je supposerois 17447 pour retrancher 9208, & j'aurois 8239, logar. logistique de 9' 0".

Ces logarithmes servent aussi pour toutes les opérations des nombres qui ne passent pas 4380 en prenant au lieu des minutes & des secondes le nombre total de secondes, qui est marqué dans la seconde ligne de la table pour chaque nombre de minutes, & y ajoutant les secondes qui sont dans la première colonne : ainsi le logarithme de 3331 est 337 (pag. 248).

### *Des Interpolations, ou de l'usage des secondes Différences.*

3916. DANS l'usage des observations & des tables astronomiques, on emploie continuellement des règles de

*Colligo*, parce que l'algèbre renferme beaucoup de choses en peu de caractères; le P. Riccioli dit que le calcul des fractions sexagésimales

& des portions de signes, de jours, d'heures, &c. est une partie de la logistique (I. 2).

# 752 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

trois & des parties proportionnelles, parce qu'on suppose que les nombres croissent uniformément; cependant il y a des cas où cette supposition seroit défectueuse, on est alors obligé d'avoir recours à la méthode des interpolations. Le problème général qu'il faut résoudre est celui-ci : étant données deux suites de nombres, qui se répondent l'une à l'autre, suivant une certaine loi, & dont l'une s'appelle la *suite des racines*, & l'autre la *suite des fonctions*, trouver un nombre intermédiaire entre deux fonctions, qui réponde à un nombre intermédiaire donné entre deux racines. On peut voir cette matière traitée dans toute sa généralité par des formules algébriques, dans Newton, dans Cotes, dans Stirling, dans un mémoire de Mayer, (*Comment. Petropolit. T. 11. pag. 180*), & dans l'astronomie de la Caille, pag. 69; le P. Boscovich a fait voir qu'on pouvoit par ces méthodes dresser des tables des inégalités de Saturne produites par l'attraction. Pour moi voyant que des formules très-complicquées ne pouvoient jamais être d'usage, & que dans l'astronomie on avoit toujours à considérer des cas beaucoup moins généraux, j'ai traité les interpolations d'une manière plus limitée, mais plus commode (*Mém. acad. 1761, pag. 125*), par le moyen des différences premières, secondes & troisièmes.

Secondes  
différences  
constantes.

3917. Je suppose une suite de nombres 0, 1, 3, &c. dont les différences soient inégales, mais d'une inégalité constante & régulière, par exemple, 1, 2, 3, 4, &c. en sorte que les secondes différences, ou les différences des différences, soient constantes, par exemple, égales à 1, comme dans la table ci-jointe. Si l'on ne prend les mêmes nombres que de deux en deux, par exemple, 0, 3, 10, 21, les

Nom- bres.	Différ. prem.	Secondes Différ.
0		
1	1	1
3	2	1
6	3	1
10	4	1
15	5	1
21	6	1
28	7	1
36	8	1

différences seront 3, 7, 11, & leur inégalité, ou leur seconde différence sera de 4, c'est-à-dire, quatre fois plus

plus grande qu'auparavant, parce qu'en doublant les intervalles l'on a pour différence première d'un côté la somme de 1 & 2, de l'autre la somme de 3 & 4, enforte que la seconde différence a augmenté à raison de la différence qu'il y a entre 2 & 3, & de celle qu'il y a entre 1 & 4, qui est trois fois plus grande. Si l'on prenoit les nombres de trois en trois, on trouveroit la seconde différence 9, &c, c'est-à-dire, que les différences secondes croissent comme les carrés des intervalles des nombres; de là je vais tirer une règle générale pour remplir les intervalles d'une suite de nombres qui suivroient la même loi.

3918. Je suppose quatre nombres, comme seroient quatre longitudes, observées de 12 heures en 12 heures, dont les 3 différences soient 78, 222, 366, enforte que l'inégalité de leur marche, ou

Heures.	Nombres.	Différence première.	Secondes Différence.
0	0		
12	78	78	144
24	300	222	144
36	666	366	

Manière  
d'interpoler.

de leur progrès, soit 144, c'est-à-dire, que la différence seconde, ou la différence des différences soit constamment de 144; les nombres 0, 78, 300, 666, ne croissent pas uniformément, puisque leurs différences 78, 222, sont inégales, mais du moins l'uniformité est telle que ces différences augmentent également: tel est le cas le plus simple des interpolations, mais ce cas est suffisant dans l'usage de l'astronomie, même pour le mouvement de la lune qui est la planète la plus irrégulière.

3919. Connoissant ces nombres, ou ces longitudes de 12 heures en 12 heures, on peut facilement les avoir de 6 heures en 6 heures, en les assujétissant à cette règle des secondes différences constantes; il ne s'agit que d'interpoler un nombre dans chacun des intervalles; car on fait que leur seconde différence doit être quatre fois moindre que 144, c'est-à-dire, 36 (3917); il suffira donc de faire une suite de nombres, dont la seconde différence soit 36. Pour avoir la différence première on prendra la moitié de la différence 78, c'est-à-dire, 39, & l'on en

## 754 ASTRONOMIE, Liv. XXIV.

ôtera la moitié de la seconde différence 36, c'est-à-dire ; 18, il restera 21 ; or ayant cette première différence 21 ; il suffira de l'augmenter successivement de la seconde différence 36 pour avoir toutes les autres différences ; en effet, la première différence jointe à la seconde, doivent faire 78, & ces deux différences doivent différer de 36 ; or quand on a la somme & la différence de deux nombres, il suffit pour trouver le premier, de retrancher la demi-différence de la demi-somme.

3920. Si au lieu d'avoir un nombre à interpoler entre 0, 78, 300, on en vouloit interpoler 2, on prendroit le tiers de la différence première, & l'on en ôteroit une fois la seconde différence trouvée ; car les trois différences que l'on cherche, doivent faire 78 dans l'exemple précédent, & elles doivent différer de la valeur de la seconde différence trouvée ; or quand on a la somme de trois quantités & leur différence, on trouve la plus petite quantité par la règle que je viens d'indiquer.

Règle générale.

En général, pour interpoler un nombre  $n$  de termes entre deux termes d'une suite donnée, on divisera la seconde différence de la suite donnée par le carré de  $n+1$ , pour avoir la seconde différence de la nouvelle suite ; on divisera la différence première par  $n+1$ , & l'on ôtera du quotient la seconde différence de la nouvelle suite multipliée par  $\frac{n}{2}$  ; il faudroit l'ajouter si les différences premières alloient en décroissant. C'est ainsi qu'on trouvera la première des différences premières qui doivent avoir lieu dans le nouvel ordre de termes que l'on cherche ; les suivantes se trouveront en ajoutant successivement la différence seconde trouvée pour la nouvelle suite.

Cette règle suffit pour construire des tables,

3921. La seule considération des secondes différences supposées égales, est suffisante dans bien des calculs astronomiques, sur-tout pour construire des tables. M. Sharp qui calcula en 1695 les tables d'ascension droite & de déclinaison pour chaque degré de longitude & de latitude, qu'on trouve dans l'histoire céleste de Flamsteed, ne les calcula par la trigonométrie que de  $5^\circ$  en  $5^\circ$ , & il

les étendit par la méthode des interpolations à chaque degré, M. Mouton, Chanoine de Lyon, qui calcula les déclinaisons du soleil pour chaque minute de longitude en secondes & en tierces, ne les calcula que pour chaque degré par la trigonométrie, & chercha les autres nombres par la méthode des sec. différences (*Obfer. Diamet.* 1670).

3922. Il suffit dans ces cas-là de calculer rigoureusement assez de termes pour que leurs secondes différences soient à peu-près égales ou varient insensiblement. J'ai publié dans la *Connoissance des temps* de 1771, une table fort commode pour abrégé ces sortes d'opérations, calculée avec soin par M. Guérin à Amboise.

3923. On se sert aussi des secondes différences pour corriger des calculs, ou limiter des observations, c'est-à-dire, les ramener à une marche régulière & uniforme; quand on trouve une seconde différence qui est trop grande ou trop petite par rapport à la précédente & à la suivante, il faut corriger le nombre qui répond à cette seconde différence du tiers seulement de l'erreur qu'on a remarquée dans la différence; cette correction est de même espèce que celle de la seconde différence elle-même, si le progrès est de différente espèce dans les nombres & dans les premières différences.

Rectifier des calculs.

3924. L'examen du cas particulier que je viens d'expliquer (3920), nous fera trouver aisément d'une manière générale un terme quelconque, sans passer par tous les termes précédens, au moyen d'une correction de la partie proportionnelle, dont la formule est très-simple.

Soit  $d^2$  la différence seconde des nombres donnés,  $m$  le nombre des intervalles qu'il s'agit de former, par exemple 2, quand on veut interpoler un terme dans l'intervalle des nombres donnés, 3 quand on veut interpoler deux termes; on aura  $\frac{d^2}{m^2}$  pour la différence seconde de la nouvelle suite; soit  $x$  la première des différences premières que l'on cherche, les suivantes seront  $x + \frac{d^2}{m^2}$ ,  $x + \frac{2d^2}{m^2}$ ,  $x + \frac{3d^2}{m^2}$ , &c; car elles croissent de la quantité de leur seconde différence

Trouver l'équation des parties proportionnelles.

# 756 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

$\frac{d^2}{m^2}$ ; en additionnant ensemble toutes ces différences premières on aura la différence entre le premier terme donné & le terme suivant de la suite donnée, c'est-à-dire, la différence que j'appelle  $d$ , entre les deux termes dont on veut remplir l'intervalle; ainsi  $mx + \frac{d^2}{m^2} (1 + 2 + 3, \&c.) = d$ ; donc  $x = \frac{d}{m} - \frac{1 + 2 + 3, \&c.}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2}$ .

3925. Quand on a la première des différences premières on trouve aisément les autres, en y ajoutant successivement  $\frac{d^2}{m^2}$ , qui est la différence seconde; on aura donc les différences suivantes entre les termes cherchés.

$$\begin{array}{rcl} \frac{d}{m} - \frac{1 + 2 + 3, \&c.}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2} & & \\ \frac{d}{m} - \frac{1 + 2 + 3}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2} + \frac{d^2}{m^2} & & \\ \frac{d}{m} - \frac{1 + 2 + 3}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2} + \frac{2d^2}{m^2} & & \\ \frac{d}{m} - \frac{1 + 2 + 3}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2} + \frac{3d^2}{m^2} & & \\ & & \&c. \end{array}$$

3926. On continueroit aisément cette suite en répétant toujours les deux premiers termes, & mettant successivement 4, 5, 6 pour le coefficient de  $\frac{d^2}{m^2}$ . On voit dans cette expression la série des nombres naturels 1, 2, 3, &c. répétée dans chaque ligne; & de plus cette même série étendue du haut en bas dans la dernière colonne, il faut les sommer l'une & l'autre. Dans chaque ligne horizontale la série aura autant de termes que le nombre  $m$  contient d'unités, c'est-à-dire,  $m$  de termes; or, suivant la propriété des nombres naturels, un nombre  $m$  de termes équivaut à  $\frac{m \cdot (m + 1)}{2}$ ; donc dans chaque ligne horizontale on aura  $\frac{m + 1}{2}$  à la place de  $\frac{1 + 2 + 3, \&c.}{m}$ .

Dans la dernière colonne verticale où l'on a  $\frac{d^2}{m^2}$ , multipliée aussi par la suite des nombres naturels, si l'on cherche le quatrième terme, ou la quatrième des différences pre-

nières, on aura trois termes à prendre; & en général, si l'on cherche le terme  $p$ , on aura  $p - 1$  de termes; donc la somme sera  $\frac{(p-1) \cdot p}{2}$ , qu'il faut multiplier par  $\frac{d^2}{m^2}$ .

Dans la même supposition l'on aura un nombre  $p$  de différences premières à ajouter ensemble, c'est-à-dire, quatre différences si l'on veut parvenir au quatrième terme, on aura donc  $p \cdot \frac{d}{m} - \frac{p \cdot (m+1)}{2} + \frac{(p-1) \cdot p}{2} \cdot \frac{d^2}{m^2} = p \cdot \frac{d}{m} - \frac{p}{m^2} (m-p) \frac{d^2}{2}$ ; la partie proportionnelle qui auroit lieu si la suite des nombres donnés croissoit uniformément, est  $p \frac{d}{m}$ .

3927. La correction  $-\frac{p}{2} (m-p) \cdot \frac{d^2}{m^2}$  est donc l'équation qu'exige l'inégalité de la marche, ou la considération des différences secondes. Cette correction de la partie proportionnelle est soustractive quand les différences premières vont en croissant, c'est-à-dire, que les différences secondes sont positives.

Equation  
des parties  
proportion-  
nelles.

On trouvera dans le mémoire que j'ai cité une formule semblable pour avoir égard aux troisièmes différences, mais la plupart de nos calculs n'exigent que les secondes différences. Tels sont les lieux de la lune calculés de jour en jour, les longitudes géocentriques de Mercure aux environs de ses plus grandes digressions, &c. je me contenterai donc d'expliquer ici l'usage de la formule précédente.

3928. EXEMPLE. Supposons qu'on ait calculé les longitudes de la lune pour les jours 1, 2, 3, 4, 5, à midi, & qu'on ait trouvé les nombres suivans.

Jours.	Longit. de la Lune.	Différences.	Sec. Différ.
1	1 <sup>s</sup> 4 <sup>c</sup> 34' 3''	13° 6' 58''	
2	1 17 41 1	13 30 32	23' 34''
3	2 1 11 33	13 55 42	25 10
4	2 15 7 15	14 26 40	30 58
5	2 29 33 55		

On demande la long. qui doit avoir lieu le 2 à 15<sup>h</sup>; on dira d'abord 24<sup>h</sup> sont à 13° 30' 32'', comme 15<sup>h</sup> sont à 8° 26' 35'',

# 758 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

mouvement pour  $15^h$  supposé uniforme. La seconde différence qui répond à l'intervalle du 2 au 3 est  $24' 22''$  en prenant un milieu entre celle du 2 & celle du 3 ; ainsi  $\frac{d^2}{2} = 12' 11''$ ,  $\frac{p}{m} = \frac{15}{24}$  &  $\frac{m-p}{m} = \frac{9}{24}$ , donc  $\frac{p}{m} (m-p) \frac{d^2}{2} = \frac{15}{24} \cdot \frac{9}{24} \cdot 12' 11'' = 2' 51''$  ; c'est ce qu'il faut retrancher du mouvement moyen pour  $15^h$ ,  $8^\circ 26' 35''$ , on aura  $8^\circ 23' 44''$  pour le mouvement vrai ; ajoutant ce mouvement à la longit. de la lune pour le 2 à midi  $1^s 17^\circ 41' 1''$ , on aura  $1^s 26^\circ 4' 45''$  longitude pour le 2 à  $15^h$ , qui diffère à peine de celle qu'on trouve en cherchant la longitude au moyen des tables par un calcul immédiat. On trouvera des tables propres à trouver ainsi le lieu de la lune dans mon *Exposition du calcul astronomique*, & plus au long dans la *Connoissance des temps de 1771*. Cette considération sert aussi à trouver le mouvement horaire ( $1520$ ).

Attention  
pour les tables  
de Mercure.

3929. Dans l'usage de certaines tables astronomiques, on est obligé d'avoir recours aux secondes différences, si l'on veut obtenir toute l'exactitude dont ces tables sont susceptibles ; telles sont les tables de Mercure qui ne sont calculées que de degré en degré, quoique pour l'équation de l'orbite & pour la distance, les différences d'un degré à l'autre soient assez inégales ; cette inégalité, ou ce qui revient au même, la différence seconde va jusqu'à  $36''$  vers  $1^s 15^\circ$  pour l'équation de l'orbite (*pag.* 108 des tables), & jusqu'à 56 pour le logarithme de la distance dans le périhélie (*pag.* 110) ; il peut donc y avoir dans les parties proportionnelles une erreur de  $4''$  pour l'équation, & de sept parties sur le logarithme ; car elle est quelquefois  $\frac{1}{8}$  de la 2<sup>de</sup> différence. Voici une table de la correction qu'il faut faire à ces parties proportionnelles, en supposant que la seconde différence pour un degré soit de  $30''$ . Ainsi quand on cherchera l'équation de Mercure pour  $3^s 27^\circ 20'$  (*pag.* 108), on

Sec. Diff. pour $1^\circ = 30''$ .		
Min.	Correction.	Min.
0	0' 0	60
5	1, 1	55
10	2, 1	50
15	2, 8	45
20	3, 3	40
25	3, 6	35
30	3, 8	30



aura la partie proportionnelle  $2' 1''$ ; mais la différence seconde étant de  $30''$ , il faudra ôter  $3'' 3$  de la partie proportionnelle, comme on le voit dans cette petite table, vis-à-vis de  $20'$ . Si la seconde différence étoit de  $45$ , il faudroit ajouter aux corrections de cette table une moitié en fus. Si les différences premières alloient en diminuant, comme cela arrive pour  $8^s 2^o$  d'anomalie, cette correction devroit être ajoutée à la partie proportionnelle.

*Réductions que les astronomes font à des observations peu distantes entr'elles, pour les réduire à une même époque.*

3930. IL arrive continuellement dans l'astronomie que l'on connoît à peu-près une certaine quantité, & qu'on veut par de nouvelles observations la déterminer plus exactement; alors on se sert de la connoissance qu'on en a déjà pour savoir combien il doit y avoir de variation entre différens temps d'observations, & par-là on trouve l'avantage de confirmer une observ. par plusieurs autres.

Je veux, par exemple, observer avec la plus grande exactitude la hauteur du soleil au solstice d'été pour en déduire l'obliquité de l'écliptique; il n'y a pour cela qu'une seule observation directe & immédiate, c'est celle qu'on feroit à midi le jour même du solstice, & en supposant que le solstice arrivât à midi.

Observations  
solsticiales,

Mais quelle que soit la hauteur solsticiale que je veux observer, je fais par avance qu'elle doit être plus petite de  $12''$  quand je l'observerai un jour plutôt; (*Expos. du calcul astron. pag. 32*), ainsi ayant observé cette hauteur la veille ou le lendemain du solstice, & y ajoutant  $12''$ , j'aurai deux observations aussi bonnes que celle du jour solsticial, & qui doivent donner le même résultat, si elles sont toutes les trois bien faites.

Quoique je ne sache pas (à une minute près, si l'on veut) qu'elle sera la hauteur solsticiale, cela n'empêche pas que je ne sache très-bien qu'elle sera plus petite de  $12''$  le len-

## 760 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

demain & la veille, que le jour même du solstice; car une minute d'erreur sur  $23^{\circ} \frac{1}{2}$  ne produira pas sur  $12''$  une erreur de la centième partie d'une seule seconde, puisqu'il faut que l'erreur soit de part & d'autre de la quatorze centième partie du total.

Réduction  
des observa-  
tions d'étoi-  
les.

393 1. C'est sur ce principe que M. de la Caille réduisoit au premier Janvier 1750, toutes les observations qu'il faisoit d'une même étoile (*Astronomie Fundamentale* 1757); & il y a bien des cas où il importe de confirmer ainsi le même résultat par plusieurs jours d'observations. Si les différences sont inégales, on est obligé de calculer par les tables la chose qui a été observée, & l'erreur des tables étant ainsi déterminée plusieurs jours de suite, on prend un milieu entre les erreurs, pour avoir la différence moyenne entre les tables & l'observation, déduite de plusieurs résultats, & c'est celle-ci dont on fait usage; c'est ainsi qu'on peut rendre quatre ou cinq fois moindre la petite incertitude qui naît de l'imperfection de nos instrumens & de l'erreur de nos observations: au lieu d'une erreur de 15 ou 20'' qui est possible sur des longitudes observées, l'on peut s'assurer de 5 ou 6 secondes. De même quand on a pris plusieurs hauteurs en mer, on peut les réduire à un même instant (3994).

Précision na-  
turelle de nos  
observations.

393 2. Prendre un milieu entre deux résultats qui devroient être égaux & qui ne le sont pas, par exemple, entre 2'' & 4'', c'est supposer que l'un est trop grand & l'autre trop petit, c'est ôter au plus grand ce qu'il a de trop, & ajouter au plus petit ce qui lui manque. Quand on veut prendre le milieu entre trois quantités on les ajoute ensemble, & l'on prend le tiers de leur somme; par-là on obtient le résultat le plus probable, comme M. Simpson l'a fait voir par le calcul des probabilités (*Miscellaneous tracts*, 1757). Cependant, quand il y a des observations qui s'écartent considérablement du terme moyen, & qui par-là méritent moins de confiance, il est bon de les rejeter, ou de ne les pas faire entrer dans l'opération pour la même part que les autres; par exemple, s'il y a 4 résultats, dont un s'écarte 3 fois plus que les

les autres du terme moyen, il ne mérite que le tiers de la confiance des autres; & avant de diviser la somme par 4, on peut diminuer cette somme des deux tiers de ce qu'on voit de trop dans une des quantités données.

DES RESULTATS QUE L'ON DEDUIT  
DE CHAQUE OBSERVATION.

3933. ON a vu dans le livre XIV. la manière de faire toute sorte d'observations, je n'ai pu développer alors les conséquences qu'on en déduit, parce qu'elles supposoient les théories qui n'ont été exposées que dans les livres suivans; il est temps d'expliquer cette partie essentielle de l'astronomie.

Le mouvement de l'horloge à pendule est la première chose qu'on doit examiner par observation (960, 2506), on se sert pour cet effet ou du soleil ou des étoiles fixes; quand on se sert du soleil, on cherche le temps vrai qui répond au temps de l'horloge (960), on cherche aussi le temps moyen. (*Voyez l'explication des tables du soleil, pag. 16*). On fait la même chose deux ou trois jours après; & si l'horloge diffère du temps moyen, autant que le premier jour, on est assuré qu'elle est réglée sur le moyen mouvement.

Examen  
de la marche  
d'une hor-  
loge.

3934. Il est souvent plus commode de recourir aux étoiles, que d'employer le soleil pour régler une horloge: on observe deux jours de suite l'instant du passage d'une étoile au méridien, ou à une lunette fixe, ou bien sa disparition derrière un bâtiment quelconque; si dans le second jour on trouve 3' 56" de moins que dans le premier, on est sûr que l'horloge est réglée. (955).

3935. Lorsqu'on connoît la marche d'une horloge; on est en état de trouver & le temps vrai d'une observation (960) & les différences d'ascension droite (2505), fondemens principaux de toute notre astronomie. C'est par leur moyen qu'on parvient à déterminer la longitude & la latitude d'un astre, c'est-à-dire, sa situation par rapport à l'écliptique & au point équinoxial; toutes les obser-

## 762 ASTRONOMIE, Liv. XXIV.

variations se réduisent à cela, puisque ce sont les termes de comparaison que les astronomes ont adoptés, par la convention la plus générale, & en même temps la plus naturelle (76, 94).

Ordre des  
observations.

3936. Les premières observations par lesquelles doit commencer un observateur isolé, sont celles de la hauteur du pôle (31) & de l'obliquité de l'écliptique (70), j'en ai expliqué la méthode; il suffit pour connoître exactement l'obliquité de l'écliptique d'observer la déclinaison du soleil (2582), lorsqu'elle est la plus grande au nord & au sud de l'équateur. La longitude du soleil est ensuite l'observation la plus facile & la plus importante; on détermine sa déclinaison (2582), d'où il est aisé de conclure sa longitude (853), & son ascension droite (872). On passe ensuite aux ascensions droites des étoiles (877), dont les positions doivent servir à déterminer celles de toutes les autres planètes. Enfin on compare une planète avec une étoile dont la position est connue. C'est ici l'opération la plus compliquée, sur-tout quand il s'agit de la lune; je vais donc l'expliquer en détail pour l'usage de ceux qui n'ont pu fréquenter les grands observatoires de l'Europe, & apprendre des choses qui ne se sont guères perpétuées jusqu'ici que par tradition. Je l'appliquerai immédiatement à une observation de la lune que je fis à Berlin, dans le temps où M. de la Caille & moi étions chargés de déterminer la distance de la lune à la terre, par des observations correspondantes (1649).

### *Calcul d'une observation de la lune dans le méridien.*

Observation  
de la lune.

3937. J'OBSERVAI le 23 Février 1752, à Berlin le passage du premier bord de la lune au méridien, dans un mural de cinq pieds (2328) à  $6^h 54' 39''$  de temps vrai, & à  $6^h 56' 57''$  le passage de l'étoile  $\xi$  du taureau. La hauteur méridienne du bord austral de la lune à  $6^h 55' 45''$ , parut de  $57^\circ 55' 52''$ , & celle de l'étoile quand elle passa au méridien  $58^\circ 27' 21''$  (Mém. acad. 1751, pag. 462).

Ces hauteurs sont dégagées de l'erreur du quart-de-cercle quant au premier point de la division (2556); & celle de la lune est corrigée par l'épaisseur du fil (2536), mais il en faut ôter 16'' pour l'erreur de la division dans ce point-là (2563), que j'ai vérifiée depuis l'impression de ces observations; l'on aura donc la hauteur apparente du bord de la lune  $57^{\circ} 55' 36''$ ; nous ne ferons pas usage de la hauteur de l'étoile dans les calculs suivans, puisque nous connoissons l'erreur du quart-de-cercle pour l'appliquer à la hauteur de la lune.

3938. L'horloge étoit réglée sur le moyen mouvement du soleil, ainsi les 2' 18'' de temps écoulées entre le passage du bord de la lune & celui de l'étoile, font  $0^{\circ} 34' 35'' 6$  (2505), qu'il faut ôter de l'ascension droite apparente de l'étoile pour avoir celle du premier bord de la lune (2507). Si la pendule étoit réglée sur les étoiles, les 2' 18'' ne feroient que 34' 30'', à raison de  $15^{\circ}$  par heure.

Différence  
d'ascension  
droite.

3939. L'ascension droite moyenne de  $\zeta$  du taureau pour le commencement de 1750, suivant le catalogue (pag. 206 des tables) est de  $2^{\circ} 20' 40' 40'' 5$ ; le mouvement pour dix ans 8' 57'' 5 (2708); ainsi le mouvement pour 2 ans est 1' 47'' 5, & de 7'' 8 depuis le commencement de 1752, jusqu'au 23 Février (pag. 224 des tables), donc l'ascension droite moyenne de  $\zeta$  du taureau étoit  $2^{\circ} 20' 42' 35'' 8$ .

3940. Le lieu du soleil étoit alors de  $11^{\circ} 40' \frac{2}{3}$ , ainsi l'aberration de l'étoile en ascension droite (2845) étoit + 6''. Le lieu moyen du nœud étoit  $7^{\circ} 28' 47'$ , ainsi la nutation en ascension droite (2879) étoit + 16'' 7, suivant la table que j'en ai donnée (*Connoissance des Mouvements célestes* 1764), donc l'ascension droite apparente de l'étoile étoit  $2^{\circ} 20' 42' 58'' 3$ ; ôtant la différence d'ascension droite que nous avons trouvée de 34' 35'' 6 (3190), nous aurons celle du bord de la lune  $2^{\circ} 20' 8' 22'' 7$ ; si c'étoit au soleil que l'on eût comparé la lune, il faudroit prendre l'ascension droite du soleil pour le moment du midi (2507).

Ascension  
droite de l'é-  
toile.

Ascension  
droite du bord  
de la lune.

## 764 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

3941. La hauteur du bord inférieur de la lune (\*)  $57^{\circ} 55' 36''$  doit être d'abord diminuée de  $37''$  pour la réfraction (*pag.* 237 des tables). A l'égard de la parallaxe nous l'appliquerons ci-après. La déclinaison de la lune diminueoit alors de  $31''$  par heure; ainsi la hauteur de la lune auroit paru plus grande de  $0'' 6$ , si elle eût été observée à  $6^h 54' 39''$ , c'est-à-dire, au moment où le premier bord de la lune passa par le méridien, & où l'ascension droite fut observée; il faut donc ajouter  $0'' 6$  à la hauteur observée, & l'on aura  $57^{\circ} 54' 59'' 6$  pour la hauteur du bord de la lune dégagée de la réfraction, & réduite au même instant que l'observation du passage. Si l'on vouloit au contraire réduire l'observation de l'ascension droite à la même heure que celle de la hauteur, on se serviroit des tables, *pag.* 93 & 94, pour avoir le temps du passage du centre au méridien, que l'on choisit ordinairement pour l'observation de la hauteur (3948).

Hauteur de  
la lune.

Parallaxe de  
hauteur.

3942. La parallaxe horizontale de la lune pour Berlin étoit ce jour-là de  $59' 21'' 6$ , suivant l'observation même que j'en fis, comparée avec celle de M. de la Caille faite au Cap de Bonne-Espérance (*Mém. acad.* 1752, *pag.* 109); mais on pourroit également la trouver par les tables de la lune (*pag.* 77 & suiv.), ayant égard à la différence des latitudes, entre Paris & Berlin (*pag.* 96); cette parallaxe horizontale multipliée par le cosinus de la hauteur méridienne apparente (augmentée de  $16' 12''$  (1284) ou par le sinus de la distance au zénit diminuée de  $16' 12''$ , tant que la lune est du côté du pôle abaissé, par rapport au zénit, donne la parallaxe de hauteur du bord de la lune  $31' 19''$ , 1 pour la latitude de Berlin, dans le sphéroïde aplati.

3943. La parallaxe  $31' 19''$ , 1 ajoutée avec la hauteur observée  $57^{\circ} 54' 59'' 6$  donne la hauteur vraie du bord inférieur de la lune  $58^{\circ} 26' 18''$ , 7; il faut y ajouter le demi-

(\*) On observe le bord supérieur, si la lune avant son plein se trouve dans les signes descendans 3, 4, 5, 6, 7, 8; ou si après son plein elle est dans les signes ascendans.

diamètre horizontal  $16' 12''$ , & l'on aura  $58^{\circ} 42' 31''$  pour la hauteur vraie du centre de la lune <sup>(a)</sup>. La hauteur de l'équateur est de  $37^{\circ} 28' 30''$ , suivant un calcul exact des observations que je fis pour lors à Berlin; il faut la retrancher de la hauteur vraie de la lune, & il reste pour la vraie déclinaison du centre de la lune  $21^{\circ} 14' 1''$  à 6<sup>h</sup> 54' 39" de temps vrai à Berlin, ou 6<sup>h</sup> 24' 0" temps moyen à Paris.

Déclinaison  
vraie.

3944. Le demi-diamètre horizontal de la lune  $16' 12''$  divisé par le cosinus de la déclinaison vraie  $21^{\circ} 14' 1''$  donne le demi-diamètre en ascension droite (1515), de  $17' 23''$ , qu'il faut ajouter à l'ascension droite du premier bord de la lune  $2^s 20' 8' 22''$ , 7 pour avoir celle du centre de la lune  $2^s 20' 25' 46''$ .

3945. Connoissant l'ascension droite & la déclinaison du centre de la lune avec l'obliquité de l'écliptique pour ce temps-là  $23^{\circ} 28' 12''$  (*Tables du soleil*, pag. 5), on trouvera sa longitude (900)  $2^s 21' 4' 46''$  & sa latitude australe  $1^{\circ} 56' 24'' \frac{1}{2}$ . C'est le dernier résultat de l'observation.

Longitude  
& latitude.

3946. Si l'on vouloit se servir de la hauteur méridienne de l'étoile, observée le même jour, on prendroit la différence des hauteurs vraies de la lune & de l'étoile, & l'on appliqueroit cette différence à la déclinaison de l'étoile pour avoir celle de lune; on éviteroit seulement par ce moyen la supposition d'une connoissance exacte de la hauteur de l'équateur, pour y substituer celle de la déclinaison de l'étoile.

3947. Pour faire jouir la postérité de tout l'avantage que peuvent avoir nos observations, il seroit à souhaiter que les catalogues qu'on en donne renfermassent toujours l'observation même, les élémens du calcul, & le résultat. Par exemple, en rapportant des observations de la lune on doit faire une table qui contienne au moins les 12

Forme d'une  
table d'obser-  
vations.

(a) Si l'on eût calculé la parallaxe sur la hauteur du centre, il auroit fallu employer le diamètre augmenté à raison de sa hauteur, page 92 des tables, & l'accourcissement de la réfraction, page 95; c'est pourquoi je préfère la parallaxe du bord.

colonnes suivantes , à peu-près comme dans les observations que M. Bailly a calculées ( *Mém.* 1767 , pag. 25 ).

1. Le jour , l'heure , la minute & la seconde du passage d'un des bords de la lune au méridien , en temps vrai & même en temps moyen , ce qui est très commode pour les calculateurs.
2. L'avancement ou le retardement diurne de la pendule sur le moyen mouvement du soleil , ou sur les étoiles.
3. Le passage de l'étoile à laquelle on a comparé la lune.
4. L'ascension droite apparente de l'étoile , calculée.
5. L'ascension droite du bord de la lune , qui en résulte.
6. La parallaxe horizontale de la lune , tirée des tables.
7. Son demi diamètre en asc. dr. & même en hauteur.
8. La distance au zénit du bord supérieur ou inférieur de la lune au moment du passage du centre de la lune par le méridien.
9. La distance au zénit du centre de la lune , corrigée par la réfraction & la parallaxe , & réduite à l'instant du passage du bord qu'on a observé dans le méridien.
10. La déclinaison vraie de la lune qui en résulte , pour le temps du passage du bord de la lune au méridien.
11. La longitude vraie du centre de la lune pour le moment de l'observation , comparée avec celle que donnent les tables.
12. La latitude vraie du centre de la lune pour le moment de l'observation , comparée avec celle des tables.

Par ce moyen l'on met sous les yeux de ceux qui voudront en faire usage , toutes les choses nécessaires pour vérifier le calcul , ou réduire l'observation avec d'autres élémens , lorsqu'on aura des tables plus exactes , ou qu'on aura lieu de suspecter une observation & qu'on voudra la vérifier.

3948. J'ai mieux aimé dans l'exemple & dans les préceptes ci-dessus , chercher la déclinaison pour le temps où le bord a été observé , que de chercher l'ascension droite pour le passage du centre de la lune , 1<sup>o</sup> , parce que j'aime mieux choisir un instant qui est donné par une observation immédiate ; 2<sup>o</sup> , parce que le calcul est un peu plus court ;



*Calculer l'opposition d'une Planète.* 767

3°, parce que la réduction est beaucoup moindre, quelquefois nulle; 4°, parce qu'on n'a pas toujours la hauteur observée dans le moment même où le centre passoit par le méridien.

3949. Le calcul de l'observation d'une éclipse de soleil ou d'étoile par la lune, se réduit à trouver le temps de la conjonction vraie & la latitude au temps de la conjonction (1971); il en est de même du calcul d'un passage de Vénus ou de Mercure sur le soleil (2152).

Calcul d'une éclipse observée.

*Calculer l'opposition d'une Planète Supérieure,  
par des Observations.*

3950. Les oppositions des planètes supérieures & les conjonctions des planètes inférieures, sont les circonstances les plus favorables pour déterminer leurs orbites & rectifier leurs élémens (1296, 2623); il est donc nécessaire de donner ici un exemple de ces sortes de calculs, assez détaillé pour que l'on y puisse apprendre tout ce qu'il faut faire en pareille occasion. Le calcul est à peu-près le même que pour trouver le temps de la conjonction dans un passage de Vénus sur le soleil (2044), cependant les détails sont assez différens pour mériter une explication particulière.

3951. Je prendrai pour exemple l'opposition de Saturne que j'ai observée au mois d'Octobre 1763, en comparant Saturne avec l'étoile  $\epsilon$  du Bélier. Cette étoile passa le 24, à 11<sup>h</sup> 45' 2" de temps vrai, au fil de ma lunette méridienne (2387), & Saturne y passa 32' 15" plus tard. Cet intervalle de temps converti en degrés (2505) donne 8° 5' 4"  $\frac{1}{2}$ , j'y ajoute 2"  $\frac{1}{2}$ , parce que l'horloge retardoit de 8" par jour (2506). On peut aussi commencer à réduire cet intervalle de temps observé en temps moyen, avant que de le convertir en degrés. On trouve 8° 5' 7" pour la différence d'ascension droite entre Saturne &  $\epsilon$  du Bélier.

Observation de Saturne à l'opposition.

3952. L'ascension droite moyenne de cette étoile en 1750, suivant le catalogue (page 204 des Tables), étoit

## 768 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

de  $25^{\circ} 13' 2''$  1. Le mouvement de précession en ascension droite (2708), jusqu'au 24 Octobre 1763, étoit de  $11' 19'' 7$  (page 228 des Tables); ainsi l'ascension droite moyenne de l'étoile étoit  $25^{\circ} 24' 21'' 8$ . L'aberration en ascension droite (2848) étoit alors  $+ 19'' 7$  (Tables page 230), & la nutation en ascension droite  $- 6'' 7$  (2876); donc l'ascension droite apparente de l'étoile étoit de  $25^{\circ} 24' 35''$  le 24 Oct. 1763.

3953. L'étoile ayant précédé Saturne au méridien; l'ascension droite de Saturne étoit la plus grande des deux; on ajoutera donc la différence observée  $8^{\circ} 5' 7''$  avec l'ascension droite apparente de l'étoile, & l'on aura  $33^{\circ} 29' 42''$  pour l'ascens. droite app. de Saturne le 24 Oct. 1763. à  $12^h 17' 17''$  de temps vrai,  $12^h 1' 37''$  de temps moyen.

3954. Le même jour j'observai avec un quart-de-cercle de trois pieds (2311) la hauteur méridienne du centre de Saturne; & après toutes les réductions nécessaires (2582), je trouvai la déclinaison de Saturne  $10^{\circ} 35' 20''$  boréale. Si l'on n'avoit observé que la hauteur du bord de Saturne, il faudroit chercher son diamètre pour le jour donné, en disant, la distance actuelle de Saturne à la terre (1146) est à sa distance moyenne (1222), comme son demi-diamètre moyen (1393) est à celui qu'il faut employer. Si l'on veut aussi tenir compte de la parallaxe, on dira la distance de Saturne à la terre est à la distance moyenne du soleil à la terre, comme  $9''$  sont à la parallaxe horizontale; qu'il faut multiplier par le cosinus de la hauteur pour avoir la parallaxe de hauteur, qu'on ajoute à la hauteur observée.

3955. Connoissant l'ascension droite & la déclinaison de Saturne, on trouve sa longitude (900)  $1^s 4^{\circ} 50' 57''$ , & sa latitude  $2^{\circ} 43' 25''$  australe; en supposant avec M. de la Caille l'obliquité apparente de l'écliptique  $23^{\circ} 28' 21'' 7$  (2861); elle est un peu plus petite dans mes tables, (pag. 6).

3956. On pourroit aussi trouver le lieu de la planète sans le secours d'une étoile, par le temps vrai de son passage au méridien, c'est-à-dire, en la comparant seulement

au soleil ; mais il faudroit , 1°, avoir le temps vrai avec une extrême exactitude , c'est-à-dire , à une demie-seconde , 2°, supposer le mouvement de l'horloge uniforme à un quart de seconde près , dans un espace de 12 & de 24 heures ; 3°, être assuré avec la même précision de l'erreur du mural ou de la lunette méridienne à la hauteur du soleil & à celle de la planète , quoique ces hauteurs soient souvent très-différentes ; 4°, supposer encore que cette erreur est la même le jour & la nuit , à midi & à minuit ; 5°, connoître le lieu du soleil avec la même précision que celui de l'étoile. Toutes ces suppositions sont difficiles à admettre ; on en sauveroit quelques-unes en prenant des hauteurs correspondantes de la planète & du soleil ; mais si l'on vouloit se livrer à un travail aussi pénible , il vaudroit encore mieux observer les hauteurs correspondantes d'une étoile , ce qui seroit bien plus exact.

3957. L'esprit de la méthode que j'ai coutume d'employer , consiste à déterminer le lieu de la planète par le moyen d'une étoile , & à n'employer le lieu du soleil que pour savoir à quelle heure le lieu de la planète en diffèrera de 6 signes ; par ce moyen une erreur de quelques secondes sur le temps vrai & sur le lieu du soleil n'influe pas sensiblement sur le résultat du calcul ; car si le temps de l'opposition est sujet à une petite erreur , qui vient de celle du lieu du soleil , la longitude de la planète n'en est pas moins exacte pour ce temps-là , puisqu'elle ne dépend que de l'étoile à laquelle on a comparé la planète.

Esprit de la  
méthode que  
nous préfé-  
rons.

3958. Dans l'exemple qui précède , la longitude du soleil , calculée pour 12<sup>h</sup> 1' 37" de temps moyen , se trouve de 7° 1' 19' 23" , en sorte que le lieu de Saturne déduit de l'observation étoit plus avancé de 3° 31' 34" que le point opposé au soleil ; il s'agit de savoir quel jour & à quelle heure ces longitudes se sont trouvées d'accord , car ce sera le moment de l'opposition. Il est donc nécessaire de connoître le mouvement diurne de Saturne & celui du soleil ; on peut très-bien les calculer par les tables ; car dans un intervalle de quelques jours le mouvement calculé ne diffère pas du mouvement observé ; mais

Elongation  
observée.

Mouvement  
de Saturne au  
soleil.

on peut aussi emprunter ce mouvement de l'observation ; & c'est ce que j'ai fait dans cet exemple ; car ayant fait les mêmes observations quelques jours après l'opposition, je reconnus que la longitude de Saturne avoit diminué chaque jour ( ou en 24 heures vraies ) de  $4' 50''$ , 1, tandis que celle du soleil calculée par les tables augmentoit de  $59' 58'' 5$ , la somme  $64' 48' 6$  est le mouvement relatif, ou la quantité dont Saturne se rapprochoit tous les jours de son opposition au soleil ; on trouvera donc l'instant où il y est arrivé, en faisant cette règle de trois,  $64' 48'' 6$  sont à  $24^h$  ou  $86400''$  comme  $3^{\circ} 31' 34''$ , distance observée de Saturne à son opposition, sont à  $78^h 20' 41''$ , qui ajoutées au temps de l'observation, 24 Octobre  $12^h 17' 17''$  donnent pour le temps vrai de l'opposition vraie, le 27 Oct.  $18^h 37' 58''$ .

Temps de  
l'opposition.

3959. En considérant séparément le mouvement de Saturne rétrograde, qui est de  $4' 50''$ , 1 par jour & le mouvement du soleil, direct, de  $59' 58'' 5$ , il est aisé de trouver leur longitude pour le temps de l'opposition ; par exemple,  $24^h 0' 0'' : 4' 50'' 1 :: 78^h 20' 41'' : 15' 47''$  mouvement de Saturne depuis le moment de l'observation jusqu'à celui de l'opposition ; ce mouvement étant ôté de sa longitude observée  $1^{\circ} 4^{\circ} 50' 57''$  ( parce que la longitude diminueoit d'un jour à l'autre ), donne la longitude de Saturne au moment de l'opposition  $1^{\circ} 4^{\circ} 35' 10''$ . On aura de même la longitude du soleil en faisant une semblable proportion,  $24^h : 59' 58'' \frac{5}{2} :: 78^h 20' \frac{41}{3} : 3^{\circ} 15' 47''$ , qu'on ajoutera avec la longitude du soleil au moment de l'observation  $7^{\circ} 1^{\circ} 19' 23''$ , & l'on aura  $7^{\circ} 4^{\circ} 35' 10''$  pour la longitude du soleil au moment de l'opposition ; cette longitude est en effet exactement opposée à celle de Saturne, ce qui sert de vérification aux calculs de ces deux articles.

Longitude  
en opposi-  
tion.

3960. Il faut aussi trouver la latitude de Saturne pour le temps de l'opposition, au moyen de la latitude observée  $2^{\circ} 43' 25''$  ; & pour cela il faut connoître le mouvement diurne en latitude, ou par les tables, ou par l'observation ; mais lorsque ce mouvement est très-petit, il est plus exact d'y employer le calcul des tables ; c'est ainsi que je trouve

que la latitude de Saturne dut augmenter de 6" depuis le moment de l'observation jusqu'à celui de l'opposition ; donc la latitude dut être de  $2^{\circ} 43' 31''$  pour le moment de l'opposition. Ces résultats ne diffèrent pas sensiblement de ceux que j'ai insérés dans la table des oppositions (*T. II. pag. 180*), quoiqu'ils aient été trouvés par des observations différentes.

3961. On peut mettre encore plus d'exactitude dans le calcul, si l'on cherche le temps & le lieu de l'opposition en y employant plusieurs jours d'observations ; on calcule pour chaque observation la longitude géocentrique par les tables, on la compare avec la longitude observée, & l'on a l'erreur des tables pour chaque observation, on prend la quantité moyenne entre toutes ces différences de l'observation aux tables ; & l'on s'en sert pour corriger le calcul ; après quoi l'on cherche le temps de l'opposition par les tables ainsi corrigées, comme nous avons calculé le temps d'une conjonction (2044). Cette méthode est beaucoup plus longue, mais elle est aussi plus parfaite, puisqu'elle emploie dans un même résultat plusieurs jours d'observations, au lieu d'un seul (3953), ce qui diminue la petite incertitude de chaque observation. Au lieu de 15 ou 20" d'erreur que l'on peut craindre quand on n'emploie qu'une seule observation, il est probable qu'on aura une précision de 5 à 6" en employant dans le calcul quatre ou cinq jours d'observations, surtout si la planète a été comparée à différentes étoiles.

Méthode plus parfaite.

Précision de ces calculs.

3962. PTOLOMÉE employoit dans ses calculs les oppositions des planètes par rapport au lieu moyen du soleil, & non par rapport à son lieu vrai & apparent ; il regardoit la différence qui pouvoit en résulter comme étant fort légère, & il y trouvoit l'avantage de simplifier les démonstrations & d'abrégier les calculs ; Copernic & Tycho suivirent son exemple, & j'ai cru devoir en avertir ici, parce que l'on pourroit quelquefois s'y tromper dans la lecture de ces auteurs ; Képler fut le premier qui fit voir qu'on devoit nécessairement employer le lieu apparent, c'est-à-dire, le corps même du soleil &

Les Anciens employoient le lieu moyen du soleil.

## 772 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

y comparer les planètes. (*Mysterium cosmogr. cap. 15. De stella Martis cap. 1*).

Autre méthode.

3963. La méthode que je viens d'expliquer (3953) pour trouver le lieu d'une planète est celle qu'on adopte généralement aujourd'hui ; lorsque Tycho-Brahé, Hévélius, Flamsteed observoient les positions des planètes par le moyen de leurs distances à deux étoiles fixes, le calcul étoit beaucoup plus compliqué ; j'en ai donné l'explication (214).

Avantages des oppositions.

3964. Les observations faites hors des oppositions ont été très-utiles pour déterminer les distances des planètes au soleil (1216) ; mais aujourd'hui l'on suppose généralement que ces distances sont connues avec toute l'exactitude possible, par la règle de Képler (1222), dont la vérité est suffisamment constatée ; c'est ce qui fait qu'on n'observe presque plus les planètes, si ce n'est dans leurs oppositions : on y trouve l'avantage de ne point employer dans ces calculs la théorie du soleil ; il en faut excepter Mercure, dont les plus grandes digressions sont essentielles pour fixer sa théorie (1267, 1286).

3965. La méthode que l'on vient d'expliquer pour le calcul des oppositions est la même pour celui des conjonctions de Vénus au soleil, qui tiennent lieu d'oppositions pour la théorie de cette planète (*T. II. pag. 169*).

Après avoir parlé de toutes les observations qui se font sur terre pour le progrès de l'astronomie, je vais parler des observations qui se font en mer pour trouver les longitudes par le moyen de la lune ; objet intéressant, qui mérite bien de terminer cet ouvrage.

### USAGE DES MOUVEMENTS DE LA LUNE pour trouver les longitudes en Mer.

3966. IL est de la dernière importance pour le bien du commerce maritime, & pour le salut des hommes qui s'y consacrent, de pouvoir trouver en pleine mer le degré de longitude où l'on est (54). Ce problème se réduit à savoir quelle heure il est sur le vaisseau, & quelle heure il

est au lieu du départ ( par exemple , à Paris ) ; il n'est pas difficile de trouver l'heure qu'il est sur un vaisseau en observant la hauteur du soleil ou d'une étoile ( 1030 , 3995 ) ; la difficulté se réduit donc à trouver en tout temps & en pleine mer l'heure qu'il est à Paris.

Philippe III, qui monta sur le trône d'Espagne en 1598 , fut le premier qui, convaincu de l'importance des longitudes, proposa un prix en faveur de celui qui en feroit la découverte. Les états de Hollande imitèrent bientôt son exemple ( MORIN, *longit. sci. pag. 1*). Le Parlement d'Angleterre assigna en 1714 une récompense de 20000 liv. sterl. ou 469668 livres de France, pour celui qui trouveroit la longitude à un demi-degré près ( *Connoiss. des Mouv. célestes*, 1765 ) ; & M. le Duc d'Orléans, Régent de France, en promit une de cent mille livres par une lettre du 15 Mars 1716, écrite à M. Bignon, & qui est au Secretariat de l'Académie ; il en est parlé dans l'*Hist. de l'acad.* 1722, pag. 102. Ces encouragemens, joints à l'émulation naturelle des savans, ont produit de temps à autres des efforts utiles pour la découverte des longitudes.

Prix proposés pour les longitudes.

3967. Pour trouver l'heure qu'il est à Paris , le navigateur n'auroit besoin que d'une montre assez bien réglée pour ne pas varier de plus de 2 minutes dans le cours de 2 mois de navigation. Gemma Frisius, Metius, & d'autres Savans de Hollande, crurent au commencement du dernier siècle qu'on en viendroit à bout, & l'on fit plusieurs essais, mais inutilement. M. Sully, Horloger de Paris, travailla de nouveau à une horloge marine en 1726 ; enfin M. Harrison, qui s'occupoit en Angleterre de cette même recherche depuis 1726, a fait l'épreuve en 1762 d'une nouvelle montre marine, qui paroît remplir l'objet qu'on s'en étoit proposé ; j'en ai rendu compte fort au long dans la *Connoissance des Mouvements célestes*, pour 1765 & 1767. M. Berthoud, qui avoit donné ses idées sur cette matière dans ses Essais sur l'horlogerie, a exécuté d'excellentes montres, dont la vérification a été faite en mer, par ordre du Ministère, & dont le succès a été récompensé.

Essais pour lestrouver par l'horlogerie.

## 774 ASTRONOMIE, Liv. XXIV.

M. Le Roy en a fait d'autres, dont la description & les épreuves ont été publiées dans l'ouvrage de M. Cassini le fils, & que l'académie a couronnées; & l'on se prépare à faire encore (cette année 1771) un nouveau voyage & de nouvelles épreuves pour trouver ainsi la longitude par le moyen de l'horlogerie.

3968. Mais pour savoir en pleine mer l'heure qu'il est à Paris, l'on n'a pas essentiellement besoin de ces montres marines; on peut la trouver par le moyen de l'astronomie, en observant les éclipses (3974), & surtout la situation de la lune; cette méthode, à certains égards, est encore plus importante, parce qu'elle peut servir à rectifier même l'horloge marine dans le cas où celle-ci viendrait à se déranger, & qu'en tout temps ces observations peuvent servir à vérifier la régularité des montres. Supposons que, par des tables bien calculées & bien sûres, l'on sache qu'à 2<sup>h</sup> 4' temps vrai à Paris, la longitude de la lune sera de 0<sup>s</sup> 10<sup>o</sup>, & qu'étant en pleine mer j'aye trouvé par mon observation que la lune a précisément 0<sup>s</sup> 10<sup>o</sup> de longitude, je serai sûr qu'il est 2<sup>h</sup> 4' à Paris, aussi bien que si une excellente montre réglée à Paris me l'avoit indiqué.

On la trouve  
par le moyen  
de la lune.

3969. Appian passe pour le premier qui ait songé à employer ainsi les observations de la lune à trouver les longitudes; Gemma Frisius, Médecin & Mathématiciens d'Anvers, en parla sur-tout dans un ouvrage composé en 1530: *De principiis astronomiæ & Cosmographiæ, deque usu globi ab eodem editi*, édition de Cologne, 1578, pag. 58. c. 17; il explique d'abord, *quâ arte locus lunæ visâ, vel cujuscumque stellæ ignotæ situs deprehendatur. Alitudo enim ejusdem supra horisontem addisce, artificio quadrantis vel cujuscumque alterius instrumenti astronomici, præterea ejusdem lunæ distantiam ab aliquo alio syderum, hujusque syderis altitudinem*. Après cela il enseigne la manière d'en conclure le lieu de la lune par le moyen du globe, ce qu'on peut exécuter aussi par la trigonométrie; après quoi, il dit, *pag. 60. Invento jam per observationem loco lunæ ut diximus, simul consideranda est diligentissime per globum hora illa qua luna locum talem occupat, deinde ex ephe-*



## Trouver les longitudes en Mer. 775

*meridibus rite calculatis, aut ex tabulis Alfonsi aut alterius cujuscumque docti mathematici, exquisitissimo calculo colligenda est hora qua luna talem locum per observationem deprehensum attingere deberet, idque pro loco aliquo certo & cognito cujus longitudo nota statuatur..... Colliges tandem longitudinem loci ignoti ab insulis fortunatis.*

Képler parla aussi beaucoup de cet avantage de la lune ( *Tab. Rudolph. pag. 37 & 42* ), & après lui Longomontanus ( *Astron. Dan. pag. 194. édit. de 1622, pag. 318, édit. de 1640* ). On trouve dans ces différens auteurs la manière de mesurer la distance de la lune à une étoile, pour en conclure la longitude de la lune ; de comparer cette longitude avec celle qui est calculée par les tables, & de trouver ( par le moyen de la différence entre ces deux longitudes ) la distance où l'on est du méridien des tables.

3970. MORIN, Professeur royal de Mathématiques, & Médecin de Paris, corrigea la méthode indiquée par Képler ; il la rendit plus générale & la proposa au Cardinal de Richelieu, qui ordonna le 6 Février 1634, que la méthode de Morin seroit examinée par des Commissaires qu'il nomma pour cet effet. Parmi ces Commissaires il y avoit cinq Mathématiciens, Pascal, Mydorge, Boulenger & Beaugrand : ils s'assemblèrent à l'Arsenal le 30 Mars ; & après avoir entendu les démonstrations de Morin, ils convinrent de la bonté & de l'utilité de sa méthode, ( *Longit. Scientia, pag. 79 & 120* ) ; mais dans la suite ils reconnurent que l'idée n'étoit pas assez neuve, ni les tables assez parfaites pour qu'on pût dire que Morin avoit trouvé le secret des longitudes ; & l'imperfection des tables a continué pendant tout le dernier siècle d'être un obstacle à l'utilité de cette méthode.

Morin perfectionne cette méthode.

2971. M. HALLEY, aussi habile Navigateur que célèbre astronome, avoit jugé par sa propre expérience que toutes les méthodes proposées, pour trouver la longitude en mer, étoient impraticables, excepté celle où l'on emploie les mouvemens de la lune ; en conséquence,

Tentative de M. Halley.

il avoit fait tous ses efforts pour surmonter les difficultés qui s'opposoient à l'usage de cette méthode. Voici à peu-près ce qu'il en dit (*Astron. Carol.* 1710, *append. pag.* 67) : « J'ai trouvé, par expérience, qu'avec un peu de » pratique on peut se servir sur mer d'une lunette de 5 à » 6 pieds, & observer les appulses ou les occultations » des étoiles fixes par la lune, lorsque la mer n'est pas » extrêmement agitée, sur-tout dans les quadratures où » la lumière de la lune n'est pas assez forte pour effacer » celle des étoiles. Le mouvement de la lune est si prompt » que sa longitude change de 2 minutes en 4 minutes de » temps, c'est-à-dire, pour un degré de longitude. Il est » évident que si nous sommes en état de prédire le temps » vrai de l'occultation ou de l'appulse d'une étoile fixe » pour un méridien quelconque, nous saurons à quelle » distance nous sommes de ce méridien, en comparant » avec ce temps vrai calculé, le temps auquel nous au- » rons fait en mer la même observation. Mais après avoir » bien examiné les calculs faits sur les tables Carolines » de Street, les meilleures qu'on ait eues jusqu'ici, & » les avoir comparées avec plusieurs observations exac- » tes, je trouve que ces tables ne représentent pas avec » une exactitude suffisante les mouvemens observés ; & il » y a des cas où l'on se tromperoit de 100 lieues sur la » longitude observée, si l'on comptoit sur l'exactitude » des tables ».

3972. Ce fut par cette considération que M. Halley songea à corriger les tables de la lune par le moyen de la période de 18 ans (1501). Il publia lui-même plusieurs observations de la lune qu'il avoit faites ; & il espéroit trouver parmi celles qui se faisoient sans cesse à Gréenwich & à Paris, lorsqu'on les publieroit, une suite d'observations suffisantes pour prédire en tout temps le lieu de la lune ; il assuroit même déjà que toutes les fois qu'il avoit pu appercevoir une étoile près de la lune, il avoit déterminé sa longitude & corrigé les erreurs inévitables dans l'estime, pendant un long voyage. Dans la théorie physique de la lune dressée par Newton, & dont Halley venoit

venoit d'avoir connoissance ; les défauts des tables sont tellement corrigés , dit-il , « qu'on espère , que l'erreur du » lieu calculé passera rarement 4' ; ce qui sera peut-être » suffisant pour l'usage de la navigation ».

3973. Halley s'en tenoit aux appulses & aux occultations d'étoiles , parce qu'on n'avoit alors aucun instrument propre à comparer la lune aux étoiles qui en étoient éloignées : depuis ce temps-là l'octant imaginé en 1731 par Hadley , a donné un moyen facile de mesurer les distances sur mer à une ou deux minutes près , aussi bien que les hauteurs de la lune ; ce qui fournit plusieurs méthodes pour déterminer le lieu de la lune en mer.

3974. Les éclipses de lune , les éclipses de soleil , les conjonctions de la lune aux étoiles , & leurs éclipses sont la manière la plus naturelle de trouver la longitude , & celle qui fut employée le plus anciennement. Pour les éclipses de lune (2472) , on cherche ordinairement par l'observation de l'entrée & de la sortie d'une même tache , le temps du milieu de l'éclipse ; on compare ce temps observé avec celui que donne le calcul pour le méridien des tables , & la différence des temps convertie en degrés donne la différence de longitude cherchée. Les éclipses du premier satellite de Jupiter peuvent s'employer au même objet ; mais il est fort difficile de les observer en mer , à moins qu'on ne soit dans une chaise marine suspendue , comme celle que M. Irwin fit exécuter en Angleterre vers 1760 , & dont l'idée se trouve en entier dans le *Cosmolabe de Jacques Besson* , Paris 1567.

Usage des  
éclipses.

Pour les éclipses de soleil ou d'étoiles on cherche le temps vrai de la conjonction vraie par le moyen de l'observation : ce temps vrai trouvé pour le lieu où l'on observe , diffère de celui qui est donné par le calcul , pour le méridien des tables , ou de celui qu'on y a observé , & la différence est celle des deux méridiens (1971 , & suiv.).

3975. La méthode des distances de la lune au soleil ou à une étoile , est d'un usage beaucoup plus général. Elle fut proposée par Képler , elle a été suivie par M. Halley & ensuite par M. l'Abbé de la Caille qui l'a perfectionnée

Longitude  
par les distances.

## 778 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

& simplifiée (*Ephem. de 1755 à 1764*) ; M. le Monnier lui-même paroît l'avoir adoptée (*Instit. astr. pag. 320, Observations, L. 1. Paris 1751 in-fol.*). M. Maskelyne, habile astronome, de la Société royale de Londres, envoyé à l'Isle de St<sup>e</sup> Hélène en 1761 par le Roi d'Angleterre, ayant éprouvé & vérifié l'exactitude de cette méthode, l'a recommandée aux Astronomes & aux Marins de la manière la plus pressante dans son livre intitulé, *British Mariner's Guide. London, 1763, in-4<sup>o</sup>.* où il donne des préceptes nouveaux & des méthodes faciles pour en faire le calcul ; enfin on calcule en Angleterre depuis 1767 un almanach nautique, tel que M. de la Caille l'avoit proposé, & qui est uniquement fondé sur cette méthode des distances.

Instrumens  
pour la mer.

3976. Les instrumens avec lesquels on peut observer ces distances en mer, & sur-tout l'octant de réflexion, (2458) sont décrits dans le recueil des machines de l'académie, tom. VI ; dans les transactions philosophiques de 1732, (imprimées en François à Paris, n<sup>o</sup> 420, 425) ; dans les mémoires du P. Pézenas ; dans le Traité de Navigation de M. de la Caille ; dans l'Optique de Smith ; imprimée en François à Brest & à Avignon en 1767, & dans deux ouvrages de M. d'Après & de M. de Bory, qui contiennent la description & l'usage de l'octant de M. Hadley. M. de Charnière a proposé d'y employer un héliomètre qui eût plusieurs degrés d'amplitude, & qu'il appelle *Mégamètre* ; il en a fait exécuter qui ont fort bien réussi. Je supposerai donc qu'on observe la distance du bord de la lune à une étoile ou au bord du soleil ; cette distance, qui est accourcie par les réfractions, & modifiée encore par la parallaxe de la lune, doit être corrigée ou dégagée de cette double inégalité, pour qu'on ait la distance vraie : ce sont ces deux corrections qui en font la principale difficulté, comme je le dirai bientôt.

Avantages  
de cette méthode.

3977. Cette méthode des distances a l'avantage de ne dépendre essentiellement que d'une seule observation de distance ; elle ne suppose pas la hauteur connue avec une extrême précision ; elle dépend très-peu de la déclinaison.

raison de la lune, & de la hauteur du pôle; elle n'exige pas qu'on ait un horizon *clair-fin*, c'est-à-dire, bien dégagé des vapeurs, elle ne suppose pas des calculs aussi longs que ceux de l'ascension droite de la lune; enfin la réduction de la distance apparente en distance vraie, à raison de la réfraction & de la parallaxe, se peut faire avec la règle & le compas par une opération graphique (3992). Tous ces avantages me paroissent prouver démonstrativement que cette méthode, lorsqu'on peut l'employer, est de beaucoup préférable à celle des hauteurs de la lune: je parlerai cependant de celle-ci (3996), parce qu'il y a des cas où l'on peut observer la hauteur de la lune & où l'on ne pourroit pas mesurer sa distance à une étoile.

3978. Pour calculer la distance de la lune à une étoile, on cherche par les tables de la lune sa longitude pour le temps donné; on prend dans le catalogue celle de l'étoile; on cherche également les latitudes, ce qui donne les distances au pôle, & l'on forme un triangle au pôle de l'écliptique, à l'étoile & à la lune, que l'on résout par les deux analogies suivantes (3696): le rayon est au cosinus de la différence des longitudes, comme la tangente de la plus petite des deux distances au pôle boréal de l'écliptique & à la tangente du segment. On retranche ce segment de la plus grande des deux distances au pôle boréal de l'écliptique, pourvu que la différence des longitudes ne passe pas 90°, & l'on a le second segment; après quoi l'on fait cette seconde proportion: le cosinus du premier segment est au cosinus du second, comme le cosinus de la plus petite distance au pôle est au cosinus de la distance entre la lune & l'étoile.

Calcul de la distance.

Si au lieu d'une étoile il s'agit du soleil auquel on veuille comparer la lune, les deux proportions précédentes se réduisent à la suivante: le rayon est au cosinus de la différence des deux longitudes, comme le cosinus de la latitude de la lune est au cosinus de la distance cherchée.

Comme dans l'observation l'on ne mesure ordinairement que la distance du bord de la lune au bord du soleil qui en est le plus proche, il faut ôter de la distance cal-

culée la somme des demi-diamètres du soleil & de la lune ; pour avoir une distance que l'on puisse comparer à celle qui s'observera sur mer. S'il s'agit d'une étoile , comme on est obligé de prendre le bord éclairé de la lune , on ôte le demi-diamètre de la lune de la distance calculée lorsque la lune est croissante & plus avancée en longitude que l'étoile , ou décroissante & moins avancée que l'étoile ; au contraire on ajoute le demi - diamètre horizontal à la distance calculée , lorsque la lune n'étant pas encore pleine , l'étoile a une plus grande longitude , ou que la lune ayant passé l'opposition est plus avancée que l'étoile.

Autre méthode.

3979. On peut aussi trouver la distance de la lune à une étoile , par la règle de M. Maskelyne , (*Phil. transf.* vol. 54 pour 1764 , pag. 274 ) , en faisant les deux opérations suivantes.

*Le rayon est au cosinus de la différence des longitudes de la lune & de l'étoile , comme le cosinus de leur différence en latitude est au cosinus de la distance , à peu-près.* Cette règle revient au même que celle qu'on emploie pour le soleil ; mais quand la lune & l'étoile ont chacune leur latitude , on peut corriger la distance de la manière suivante. Au logarithme de l'arc égal au rayon 5,3144 ajoutez ceux des sinus des deux latitudes de la lune & de l'étoile , & du sinus versé de la différence de longitude , & le complément du logar. sinus de la distance ; la somme sera le log. d'un nombre de secondes , qu'il faut ôter de la distance , trouvée à peu-près par la première analogie. Avec cette règle on ne peut avoir que 4" d'erreur , en supposant même la latitude de la lune de 5° , & celle de l'étoile de 10°.

Troisième méthode.

Lorsque l'on est obligé de calculer une distance telle que des cosinus qui varient beaucoup , en font trouver d'autres qui varient très-peu , les règles précédentes ne sont pas assez exactes ; on peut recourir alors à la formule de M. Murdoch (3696). Soit  $g$  le sinus d'un côté  $AC$  (*fig.* 327)  $h$  le sinus de l'autre côté  $CL$  ,  $d$  le sinus de la demi-différence des deux côtés  $= \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} CL$  ,  $a$  le sinus de la moitié de l'angle compris  $C$  ,  $x$  le sinus de la

*fig.* 327.

moitié du troisième côté  $AL$ , on aura  $xx = hga + dd$ . Pour le démontrer, je suppose  $AF = AQ = 90^\circ$ ; des points  $H, A, Q$ , je tire sur le rayon  $POC$  qui est la commune section des plans des cercles  $CQ$  &  $CF$ , les perpendiculaires  $HS, AO, QP$ , qui sont les sinus des arcs correspondans, & égales à  $LS, BO, FP$ , & je tire les droites  $HL, AB, QF$ , & les diagonales  $AL, HB$ . Alors par les triangles semblables  $QPF, AOB, HSL$ , j'ai ces deux proportions  $QF : QP :: HL : SH$ , &  $QF : QP :: AB : AO$ , ce qui donne  $HL = 2ah$  &  $AB = 2ag$ ; mais par la propriété du quadrilatère  $HLAI$  qui est sur la circonférence d'un petit cercle de la sphère, on a  $LB \cdot HA + HL \cdot AB = AL \cdot HB$ , ou  $LB^2 + HL \cdot AB = AL^2$ , & substituant les valeurs précédentes  $4d^2 + 2ah \cdot 2ag = 4x^2$ , donc  $x^2 = hga + dd$ .

EXEMPLE. Je suppose que les distances des astres au pôle soient de  $30^\circ$  & de  $80^\circ$ , & l'angle compris, c'est-à-dire, la différence des longitudes, de  $110^\circ$ .

Log. sin.  $30^\circ \dots$  96989700

Log. sin.  $80^\circ \dots$  99933515

2 Log. sin.  $55^\circ \dots$  98267290

Log.  $hga \dots$  95190505. Nombre 0,330408

2 Log. sin.  $25^\circ \dots$  92518966.  $dd = 0,178606$

Log. somme.  $\dots$  97067297.  $\dots$  0,509014

Moitié  $\dots$  98533648.  $\dots$   $45^\circ 31'$

Double, ou distance cherchée.  $\dots$   $91^\circ 2'$

3980. Quand on connoît par les tables la distance vraie, il faut l'avoir aussi par observation, c'est-à-dire, qu'il faut la conclure de la distance apparente observée, en ajoutant l'accourcissement de réfraction à la distance observée, plus ou moins l'effet de la parallaxe. On peut négliger en mer l'effet de la réfraction, quand les deux astres ont plus de  $60^\circ$  de hauteur; mais s'ils sont moins élevés & qu'ils ne soient pas à peu-près dans le même vertical, il faut employer les méthodes suivantes; elles auroient lieu de même pour les observations de distances

qui sont dans les ouvrages de Tycho, d'Hévélius & de Flamsteed, & qui sont toutes affectées d'une double réfraction. Pour trouver cet accourcissement causé par les réfractions, aussi bien que l'effet de la parallaxe, dans les observations de distances ( 314 ); je préfère ordinairement la méthode suivante; je calcule par les tables la hauteur & l'azimut des deux astres, pour l'heure de l'observation, & leur distance vraie par le moyen des deux hauteurs & de la différence d'azimut. J'augmente chaque hauteur vraie de la réfraction qui lui convient ( moins la parallaxe ); avec ces deux hauteurs, ou leurs complémens  $ZS$ ,  $ZL$  ( fig. 341 ), & la même différence d'azimut  $Z$ , je calcule la distance apparente  $SL$ ; la différence par rapport à la distance vraie  $SL$  est l'accourcissement cherché.

Fig. 341.

Si c'est en mer, l'on observe ordinairement les hauteurs apparentes des deux astres, dont on a mesuré la distance; ainsi l'on connoît les trois côtés du triangle  $ZSL$ ; on calcule l'angle  $Z$ , on ajoute aux côtés  $ZS$  &  $ZL$  la réfraction & l'on en ôte la parallaxe, on a les distances vraies  $ZL$ ,  $ZS$  au zénit, l'angle  $Z$  étant le même, d'où il est facile de conclure la distance vraie  $LS$  que l'on cherche ( 3696, 3978 ).

3981. Ces méthodes sont rigoureuses, mais longues; il y a plusieurs moyens de les abréger: voici la méthode que M. de la Caille employoit. Après avoir cherché les réfractions qui conviennent à la hauteur de la lune & à celle de l'étoile, on calcule l'angle à la lune & à l'étoile, & l'on multiplie chaque réfraction par le cosinus de l'angle qui lui répond. Supposons, par exemple, que  $A$  soit le zénit ( fig. 328 );  $B$  la lune,  $C$  le lieu vrai de l'étoile,  $K$  son lieu apparent dans le vertical  $BKC$ ; ayant pris  $BE = BC$ , ou tiré  $CE$  perpendiculaire sur  $BE$ , le petit arc  $EK$  fera la quantité dont la réfraction de l'étoile, c'est-à-dire,  $CK$  rapproche l'étoile  $C$  de la lune  $B$ ; or  $EK = CK$ . sin.  $ECK = CK$ . cos.  $KCB$ ; donc cette correction est égale à la réfraction de l'étoile en hauteur, multipliée par le cosinus de l'angle à l'étoile. Il en est de même de la lune

Fig. 328.

Correction  
de la réfrac-  
tion.



qui exige aussi une correction dans la distance, égale à la différence de la réfraction à la parallaxe, multipliée par le cosinus de l'angle à la lune.

3982. EXEMPLE. Je suppose que le 26 Mai 1754, étant par la latitude sud  $35^{\circ} 28'$ , on ait observé, à  $8^h 45' 20''$  de temps vrai, la distance de Régulus au bord éclairé de la lune  $24^{\circ} 56'$ ; la hauteur de la lune réduite à ce même instant, & diminuée de l'abaissement de l'horizon (2654), étant à peu-près de  $5^{\circ} 53'$ , & celle de l'étoile  $24^{\circ} 55'$ . Dans le triangle  $ABC$  l'on connoît  $AB = 84^{\circ} 7'$ ,  $AC = 65^{\circ} 5'$  &  $BC = 24^{\circ} 56'$ , on trouve (3706) l'angle à la lune  $B = 38^{\circ} 28'$ , & l'angle à l'étoile  $C = 136^{\circ} 58'$ , d'où l'on conclut que la correction de la réfraction sera  $1' 32''$  pour l'étoile (soustractive, parce que l'angle à l'étoile est obtus), &  $7' 3''$  pour la lune, additive, parce que l'angle à la lune est aigu, ce qui donne la distance corrigée de  $25^{\circ} 1' 31''$  (*Ephem.* 1755 — 64, pag. xliij, &c.).

La parallaxe horizontale de la lune étoit alors de  $58' 2''$ ; si on la multiplie par le cosinus de la hauteur apparente, & par celui de l'angle à la lune, on trouvera  $45' 11''$ , effet de la parallaxe, qu'il faut ôter de la distance observée, parce que l'angle à la lune  $B$  est aigu, & l'on aura enfin  $24^{\circ} 16' 20''$  pour la vraie distance de la lune à l'étoile, qui répond à la distance observée  $24^{\circ} 56'$ .

3983. Ayant calculé pour le même jour cette distance de la lune à l'étoile (3978), on trouve qu'elle étoit à  $7^h 0'$  sous le méridien de Paris, de  $24^{\circ} 30' 37''$ , & qu'à  $8^h$  elle étoit de  $23^{\circ} 56' 39''$ ; donc la distance trouvée  $24^{\circ} 16' 20''$  avoit lieu à  $7^h 25' 14''$  pour Paris; mais elle étoit de la même quantité à  $8^h 45' 20''$  au lieu de l'observation; donc le lieu de l'observation est de  $1^h 20' 6''$  à l'orient de Paris.

Calcul de la longitude.

3984. Les deux corrections qui proviennent de la réfraction peuvent encore se calculer par la méthode suivante, que M. Maskelyne a donnée à la pag. 40 du livre que j'ai cité (3975).

A la hauteur apparente du centre de la lune on ajoute

Autre méthode pour trouver la réfraction de distance,

trois fois la réfraction (2203) qui lui répond dans la table ordinaire des réfractions; on fait la même chose pour la hauteur de l'étoile, & l'on a les deux hauteurs augmentées; leurs complémens sont les deux *distances* au zénit *diminuées*, dont on prend la demi-somme & la demi-différence; le produit de leurs tangentes est la tangente d'un *premier arc*. La tangente de ce premier arc multipliée par la cotang. de la moitié de la distance apparente de l'étoile au centre de la lune est la tangente d'un *second arc*. Au logarithme de la tangente du double du premier arc, on ajoute le logarithme constant 2,0569, qui est celui de 114'', on retranche de la somme le logarithme du sinus du double du second arc, & l'on a le logarithme du nombre de secondes qu'il faut ajouter à la distance apparente, pour la dégager de l'effet des réfractions.

Démonstration.

3985. En effet, la réfraction de distance est  $XI + sY$  (fig. 341), la première partie est  $Ll \cos. L$  (3981) =  $57'' \text{ tang. } ZL \cos. L$  (2207) =  $57'' \text{ tang. } LP$  (3668). De même  $sY = 57'' \text{ tang. } SP$ ; ainsi l'effet total est  $57''$  (tang.  $SP + \text{tang. } LP$ ). Soit  $M$  le milieu de l'arc  $SL$ ,  $t = \text{tang. } ML$ ,  $n = \text{tang. } MP$ , on aura  $\text{tang. } LP = \frac{t+n}{1-m}$  (3638), &  $\text{tang. } SP = \frac{t-n}{1+n}$ , dont la somme est  $\frac{2t+2tn^2}{1-t^2n^2}$  ou  $2 \cdot \frac{2tn}{1+t^2n^2} \cdot \frac{1+n^2}{2n}$ , à multiplier par  $57''$ ; mais  $\frac{2tn}{1-t^2n^2}$  est la tangente du double de l'angle, dont la tangente est  $tn$ , ou le produit des tangentes de  $LM$  &  $PM$ , & ce produit est le même que celui des tangentes de la demi-somme & de la demi-différence des côtés  $ZL$  &  $ZS$  (3733); donc  $\frac{2tn}{1-t^2n^2}$  est la tangente du double du *premier arc*. De même le second arc étant égal à  $MP$ , dont la tang. =  $n$ ; la cosécante du double est  $\frac{1+n^2}{2n}$  (3633); donc il faut multiplier le double de  $57''$  par la tangente du double du premier arc, & par la cosécante du double du second arc, pour avoir l'effet total de la réfraction (*Philos. transf.* 1764, pag. 263).

## Trouver les longitudes en Mer. 785

3986. Pour corriger l'effet de la parallaxe de la lune, voici la règle donnée par M. Maskeline (*Ib. pag. 42*). On ajoute le logarithme tangente de la moitié de la somme des distances au zénit du centre de la lune & de l'étoile corrigées par la réfraction, le logarithme de la tangente de la moitié de la différence, & le logarith. de la cotangente de la moitié de la distance des centres corrigée par la réfraction, la somme de ces trois logarithmes donnera le logarithme tangente d'un arc *A*. La somme de cet arc & de la moitié de la distance apparente des centres (ou leur différence si la lune est plus élevée que l'étoile) donne un arc *B*. On ajoutera son log. tang. avec celui du cos. de la dist. de la lune au zénit & celui de parall. horiz., l'on aura la parall. de dist. qu'il faut soustraire de la dist. observée, si ce n'est dans le cas où l'arc *B* étant la différ. entre l'arc *A* & la moitié de la distance, l'arc *A* seroit en même temps plus grand que la demi-distance. Pour démontrer cette règle, soit *V* le lieu vrai de la lune, *Fig. 341.* *L* le lieu apparent, *LT* la parallaxe de distance,  $= p \sin. ZL \cos. L$ ; on a tang.  $LP : \cos. L :: \text{tang. } ZL : 1$  (3668)  $:: \sin. ZL : \cos. ZL$ , ou  $\sin. ZL \cos. L = \cos. ZL \text{ tang. } LP$ ; donc  $LT = p \cos. ZL \text{ tang. } LP$ . Cela revient à la règle précédente, parce que l'arc *A* est la même chose que *MP* (3733), distance entre la perpendiculaire & le milieu de *LS*, & que l'arc *B* est égal à *LP*. M. Maskelyne a rendu l'usage de ces deux règles plus aisé par le moyen de trois tables qui sont dans le *Nautical Almanac* de 1772.

3987. Pour trouver l'effet de la parallaxe, voici une autre formule dont on fait usage dans les tables du *Nautical almanac* de 1767, (*pag. 47*), la parallaxe de distance  $= p (\cos. ZS \cosécante LS - \cos. ZL \cot. LS)$ . En effet,  $\cos. L = \frac{\cos. ZS - \cos. LS \cos. ZL}{\sin. LS \sin. ZL}$  (3716); la parallaxe de hauteur  $= p \sin. ZL$ , donc la parallaxe de distance ou  $p \sin. ZL \cos. L = p \left( \frac{\cos. ZS}{\sin. LS} - \frac{\cos. LS \cos. ZL}{\sin. LS} \right) = p \left( \frac{\cos. ZS}{\sin. LS} - \cos. ZL \cot. LS \right)$ , & mettant coséc. pour  $\frac{1}{\sin.}$ ,  $= p (\cos. ZS \coséc. LS - \cos. ZL \cotang. LS)$ .

# 786 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

3988. Cette méthode aussi bien que la première dont nous avons parlé (3981), exige une autre petite correction qui peut aller à une minute dans le cas où la distance observée ne seroit que de  $29^{\circ}$  & qui vient de ce que  $ST$  n'est pas rigoureusement égale à  $SV$ ; voici la manière de la trouver. On ajoutera le logarithme constant 0,941 avec ceux de la somme & de la différence des parallaxes de hauteur & de distance en minutes, & celui de la cotangente de la distance; en ôtant 3 de la caractéristique, on aura le logarithme du nombre de secondes, qu'il faut ajouter à la distance observée, si elle n'excède pas  $90^{\circ}$ , ou retrancher quand elle passe. Cela est fondé sur ce que la différence entre  $SV$  &  $ST$  est égale à  $VT^2 \cotang. SV$  (3863)  $= (LV^2 - LT^2) \cot. SV = (LV + LT)(LV - LT) \cot. SL$ . Il y en a une table dans le *Nautical Almanac* de 1767.

3989. Pour calculer les réfractions de distance, il y a encore des tables à la suite du *Nautical Almanac* de 1767, faites sur deux procédés différens, l'un de M. Lyons, l'autre de M. Dunthorn; ils sont commodes l'un & l'autre, mais il me semble que dans la méthode de M. Lyons, il est moins facile de se tromper, ce qui peut être un motif de préférence; au reste il est très-bon de faire le calcul par les deux méthodes, & je vais rapporter les démonstrations de l'une & de l'autre.

Eg. 341. Soit  $Z$  le zénit (fig. 341)  $L$  le lieu apparent de la lune;  $S$  l'étoile, leur distance apparente  $SL = s$ , le sinus & le cosinus  $= D$  &  $C$ ; supposons que les sinus des hauteurs de ces deux astres  $l$  &  $S$  soient  $M$  &  $N$ , les cosinus  $m$  &  $n$ , les réfractions en hauteurs  $\mu$  &  $\nu$ ; l'accourcissement de la réfraction sur la distance  $= sY + lX = Ss \cot. S + Ll \cot. L$ ; mais  $\cot. S = \frac{M - CN}{Dn}$  (3716), &  $\cot. L = \frac{N - CM}{Dm}$ ; donc l'accourcissement total de la dist. est  $\nu \frac{M - CN}{Dn} + \mu \frac{N - CM}{Dm} = \frac{1}{D} \left( \frac{M\nu}{n} + \frac{N\mu}{m} \right) - \frac{C}{D} \left( \frac{N\nu}{n} + \frac{M\mu}{m} \right)$ . M. Lyons a fait une table qui renferme les logarithmes de la quan-

tité  $\frac{M\nu}{n} + \frac{N\mu}{m}$ , dont ôtant celui de  $D$ , il reste la première partie de la formule. Fig. 341.

La plus grande des deux hauteurs ne devant point être, autant qu'il est possible, au-dessous d'environ  $10^{\circ}$ , la quantité  $\frac{M\mu}{m}$  est sensiblement égale à la réfraction de  $45^{\circ}$ ,  $= 57''$ , ou  $59''$  suivant nos tables, parce que  $\frac{m}{M}$  où la cotangente de la hauteur est à  $\mu$  comme 1 est à  $57''$  (2207); ainsi la seconde partie de la formule est  $\frac{C}{D} \left( \frac{N\nu}{n} + 57'' \right)$ ; M. Lyons a donné aussi une table de cette seconde partie de sa formule.

3990. Si les deux hauteurs surpassent  $50^{\circ}$  la formule devient extrêmement simple, étant égale à  $57''$  multipliées par la moitié de la distance observée. En effet, supposant cette réfraction de  $57'' = e$ ,  $\mu = \frac{em}{M}$ , &  $\nu = \frac{en}{N}$ ; ainsi la formule générale devient  $\frac{1}{D} \left( \frac{eM}{N} + \frac{eN}{M} \right) - \frac{C}{D} \cdot 2e$ ; on mettra pour  $\frac{C}{D}$  qui est la cotangente de la distance, sa valeur  $\frac{1}{D} - t$  (3636)  $t$  étant la tangente de la moitié de la distance, on aura  $\frac{e}{D} \left( \frac{M}{N} + \frac{N}{M} - 2 \right) + 2et = 2et + \frac{M^2 + N^2 - 2MN}{MN} \cdot \frac{e}{D}$ , mais la dernière quantité  $e \frac{(M+N)^2}{DMN}$  ne passe jamais  $8''$  quand les deux astres sont au-dessus de  $50^{\circ}$ , ainsi l'effet de la réfraction est alors sensiblement  $= 2et$ . M. Lyons en a fait sa troisième table, où l'on voit que pour  $30^{\circ}$  de distance la réfraction est de  $30''$ , mais pour  $90^{\circ}$  elle est de  $114''$ .

Lorsque les astres sont peu élevés & qu'on veut avoir la réfraction avec une extrême précision, l'on emploie 4 petites tables que M. Lyons a données en supplément; au défaut de ces tables, on peut employer la méthode ordinaire (2978). Quant à la parallaxe, M. Lyons emploie la formule de l'art. 3987.

3991. Il y a d'autres tables à la suite du *Nautical*  
G g g g ij

# 788 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

Fig. 341. *Almanac* de 1767, qui ont été calculées par M. Dunthorn, & dont voici le fondement;  $Ll$  &  $Ss$  étant la différence de la réfraction à la parall. pour la lune & pour le soleil ou l'étoile; les triang.  $ZLS$ ,  $Zb$  donnent ces proportions (3735) fin.  $ZL$  fin.  $\angle S$  : 1 : : fin. verse  $LS$  — fin. v. ( $ZL - ZC$ ) : fin. verse  $\angle$ , fin.  $Zl$  fin.  $Zs$  : 1 : : fin. verse  $ls$  — fin. v.  $Zb - Zs$  : fin. v.  $Z$ , donc fin.  $ZL$  fin.  $\angle S$  : fin.  $Zl$  fin.  $Zs$  : : fin. v.  $LS$  — fin. v. ( $ZL - ZS$ ) : fin. v.  $ls$  — fin. v.  $Zb - Zs$  : : cof. ( $ZL - \angle S$ ) — cof.  $LS$  : cof. ( $Zl - Zs$ ) — cof.  $ls$ , donc log. (cof.  $ZL - ZS$  — cof.  $LS$ ) + log. fin.  $Zl$  + log. fin.  $Zs$  — log. fin.  $ZL$  — log. fin.  $ZS$  = log. (cof.  $Zl - Zs$  — cof.  $ls$ ); on a mis dans une table la somme des 4 logar. de fin.  $Zl$ , fin.  $Zs$ , fin.  $ZL$ , fin.  $ZS$ , qui sont les distances au zénit, vraies & apparentes; on retranche cette somme du log. de cof. ( $ZL - ZS$ ) — cof.  $LS$ , ce qui donne le log. & par conséquent la valeur de (cof.  $Zl - Zs$  — cof.  $ls$ ); l'on fait cette quantité elle-même =  $N$ , & l'on a enfin cof.  $ls$  = cof.  $Zl - Zs - N$ ; c'est la distance vraie que l'on cherche. Si la distance excède  $90^\circ$ , il faut avoir égard au changement de signes, au lieu de — cof.  $LS$ , on écrit +, & au lieu de cof.  $Zl - Zs - N$ , on met  $N -$  cof.  $Zl - Zs$ , (*Nautical Almanac* 1772, addit. pag. 38). Je ne m'arrêterai pas à donner des exemples de ces méthodes, parce que ceux qui voudront en faire usage, auront recours au livre dans lequel on en trouve les tables & les exemples : mon intention étoit seulement ici d'en compléter les démonstrations, en rappelant les théorèmes qu'elles supposent, & que j'ai eu soin de démontrer dans le livre précédent.

M. Witchell étoit occupé en Angleterre, en 1769, à calculer des tables où ces corrections de réfraction & de parallaxe étoient toutes détaillées pour chaque degré de distance, & pour chaque degré de hauteur de la lune & de l'étoile; j'ai même deux pages imprimées de ces tables qui sont très-commodes, & dont je desirerois qu'on eût la continuation; l'usage en seroit beaucoup plus facile que

celui des formules & des tables que je viens de citer, & qui sont déjà dans le *Nautical Almanac*.

3992. En attendant, ces corrections de réfraction & de parallaxe se peuvent faire avec toute la précision nécessaire par des opérations graphiques, c'est-à-dire, avec la règle & le compas, puisqu'il ne s'agit que d'avoir l'angle à l'étoile & l'angle à la lune, dans un triangle dont on connoît les trois côtés; la parallaxe de hauteur multipliée par le cosinus de l'angle à la lune, donne la parallaxe de distance; il en est de même de la réfraction. C'est ce que M. de la Caille a exécuté fort adroitement, par le moyen de son *Chassis de réduction*. On a un cercle *HEO* (fig. 340) d'environ un pied de diamètre, divisé en degrés; dont le diamètre *HO* représente l'horizon; l'on prend les arcs *HA*, *HA*, égaux à la hauteur de l'étoile, la ligne *AA* est l'almicantarar de l'étoile; on prend les arcs *HL*, *HL* égaux à la hauteur de la lune, & la ligne *LL* est l'almicantarar de la lune. On prend sur la gauche, *HM* au-dessus de l'horizon, & sur la droite *HN* au-dessous de l'horizon, égaux à la distance de la lune à l'étoile; au-dessus des points *M* & *N* des arcs *MG* & *NG* égaux à la hauteur de l'étoile, & des arcs *ME*, *NE* égaux à la hauteur de la lune; par le centre *C* l'on tire le rayon *CD* perpendiculaire sur les lignes *GG*, *EE*; Enfin, l'on prend avec le compas la portion *ST* de la ligne *EE*, comprise entre la perpendiculaire *CSD* & le point de rencontre de la première ligne *AA* avec la dernière ligne *EE*, cette portion est la parallaxe de distance, en supposant que *CD* soit la parallaxe horizontale; soustractive quand le point *T* est au-dessus du point *S*. Ce même intervalle *ST* est la première partie de la réfraction de distance, en supposant que *SE* représente la réfraction de la lune à sa hauteur actuelle; cette correction est contraire à celle de la parallaxe.

Méthode  
graphique.

Fig. 340.

On prend sur la ligne *GG* qui appartient à l'étoile, l'intervalle *VZ* entre la perpendiculaire *FVD* & le point de rencontre de l'almicantarar *LL* de la lune & de la ligne *GZVG* qui appartient à l'étoile, cette portion *VZ* est la seconde partie de la réfraction de distance, en supposant

*Fig. 340.* que  $VG$  soit la réfraction de l'étoile en hauteur ; elle est additive quand le point  $Z$  est au-dessus du point  $V$ .

Comme la parallaxe horizontale est sujette à varier , & que non-seulement la réfraction en hauteur change beaucoup , mais encore les lignes  $SV$ ,  $VG$ , qui les représentent dans notre figure ; M. de la Caille a joint à son chafis de réduction des échelles de réfraction & de parallaxe qui répondent aux différentes valeurs de chacun de ces deux élémens ; on en trouvera les figures & les dimensions dans mon *Exposition du calcul astronomique* , & dans le *Traité de Navigation de M. Bouguer* , édition in-8°, par M. de la Caille. J'y ajouterai seulement quelques mots d'explication , pour faire sentir les fondemens de ces opérations.

Échelles de  
parallaxes.

3993. La parallaxe de la lune en hauteur est comme le cosinus de la hauteur apparente ; ainsi le rayon  $CD$  représentant la parallaxe horizontale , la ligne  $SE$  , qui est le cosinus de la hauteur  $DE$  de la lune , exprime la parallaxe de hauteur ; la partie  $ST$  de ce rayon  $SE$  est le cosinus de l'angle opposé au côté , dont le complément est représenté par  $HA$  (3865) , elle est donc égale à la parallaxe de hauteur multipliée par le cosinus de l'angle à la lune , c'est-à-dire , à la parallaxe de distance , en prenant toujours le rayon  $CD$  pour la parallaxe horizontale.

Si donc la parallaxe horizontale ne changeoit point , le rayon  $CD$  seroit constamment l'échelle de la parallaxe ; donc si la parallaxe augmente , il faudra diminuer l'échelle dans la même proportion (1858) , c'est ce que M. de la Caille a observé dans son échelle de parallaxe.

A l'égard de la réfraction l'échelle doit varier , & même fort inégalement , pour deux raisons : la première est la hauteur , puisque la réfraction a 48°, est 30 fois plus petite qu'à l'horizon (*Table CLIX*) ; la seconde vient de ce que  $SE$  qui est le cosinus de la hauteur de la lune , & qui suit le rapport des parallaxes , ne suit pas le rapport des réfractions ; ainsi pour que la partie  $ST$  soit la réfraction de hauteur multipliée par le cos. de l'angle à la lune , il faut que  $SE$  soit la réfraction de hauteur , que le rayon général



*CD* soit la réfraction de hauteur divisée par le cosinus de la hauteur, & par conséquent que l'échelle des réfractions pour  $50^{\circ}$  soit 7 fois plus grande que l'échelle pour  $5^{\circ}$ , parce que la réfraction de  $5^{\circ}$  ( $10' 10''$  suivant *M. de la Caille*), augmentée en raison inverse du cosinus de la hauteur, c'est-à-dire,  $10' 12''$ , est 7 fois plus grande que la réfraction de  $50^{\circ}$  ( $55'' 8$ ) augmentée de même, c'est-à-dire,  $1' 27''$ . On n'emploie que l'échelle d'une minute de réfraction, parce que la réfraction à  $50^{\circ}$  ainsi augmentée, est 43 fois plus petite que la parallaxe de  $62'$ ; il auroit donc fallu rendre l'échelle de réfraction d'une grandeur incommode. (*Exposition du calcul astron.* art. 241).

On trouve aussi l'heure qu'il est par la hauteur du soleil ou d'une étoile, en y employant le chassis de réduction, & sans le secours de la trigonométrie (1030). Pour cela, on prend *OB* (*fig.* 330) égal à la hauteur du pôle, *LG* égal à la distance de l'étoile au pôle, *OK* égal à la hauteur de l'étoile, on tire les lignes *CB*, *CG*, *GD*, *KN*, *FE*, & la ligne *CE* est le cosinus de l'angle horaire (3865). Si l'on en prend le double avec un compas, & que l'on porte cette ouverture de compas sur la circonférence du cercle, on a la différence entre  $6^h$  & l'angle horaire, ou leur somme, si le point *E* est au-dessous du centre *C*. L'angle horaire de l'étoile étant ajouté à la différence des ascensions droites du soleil & de l'étoile pour cet instant, (si l'étoile a passé le méridien), donnera le temps vrai (1031). Dans le chassis de réduction de *M. de la Caille*, on porte cette ouverture 2 fois sur la circonférence du cercle, au-dessous du point *O*, si le point *E* est au-dessus du centre, & l'on rencontre le point qui marque l'angle horaire en temps, parce qu'on y a mis les heures de 60 en  $60^{\circ}$ , en allant de *O* vers *A* pour que les mêmes divisions servissent à trouver les degrés & les minutes de temps. Voy. la figure & l'exemple dans l'*Exposition du calcul astron.* art. 239 & 242.

Pour l'intelligence entière de ce chassis de réduction, il me reste à dire un mot du cadre qui l'environne, & dont je n'ai point assez démontré la théorie dans le livre que je

viens de citer. Le bord supérieur est divisé en  $77\frac{1}{2}$ ; c'est le plus grand mouvement que la lune ait en deux heures; la ligne inférieure est divisée en 120' qui font les deux heures; les lignes verticales à droite & à gauche sont divisées en  $2^{\circ} 35'$ , c'est le plus grand mouvement de la lune en 4 heures de temps; au moyen de ces 4 divisions l'on fait aisément avec le compas la règle de trois, nécessaire pour trouver dans l'Almanach Nautique, à quelle heure la lune auroit dû avoir la distance qu'on a déduite de l'observation; par exemple, pour faire cette proportion  $2^{\circ} 9' : 4^h :: 57\frac{1}{2} : 1^h 47'$ , on tire une ligne horizontale par le point de  $2^{\circ} 9'$ , on y marque une longueur de  $57\frac{1}{2}$ , & par ce point on tire une ligne de l'angle supérieur du chassis, elle vient marquer sur la ligne inférieure  $1^h 47'$ ; en effet, si le mouvement de la lune étoit de  $2^{\circ} 35'$  la ligne inférieure marqueroit l'heure cherchée en y portant simplement le mouvement de  $57\frac{1}{2}$ , mais au lieu de  $2^{\circ} 35'$ , on n'a que  $2^{\circ} 9'$ , il faut donc que le dernier terme soit plus grand dans le rapport de  $2^{\circ} 35'$  à  $2^{\circ} 9'$ , c'est ce qu'on fait par le moyen des deux triangles semblables que je viens d'indiquer.

Réduction  
des hauteurs.

3994. Quand on observe la hauteur de la lune & celle de l'étoile un peu avant ou après l'observation de la distance, on est obligé de réduire les hauteurs à ce même moment; pour cela, il suffit d'avoir la quantité dont la hauteur change en une minute de temps, & cette quantité est égale à 15' multipliées par le cosinus de la hauteur du pôle, & le cosinus de l'amplitude de l'astre (3813); on en trouve une table fort détaillée dans la connoissance des temps de 1772, pour tous les degrés d'amplitude & de hauteur du pôle; on y voit, par exemple qu'à  $49^{\circ}$  de latitude, un astre qui est à  $40^{\circ}$  du vrai point d'orient ou d'occident s'élève ou s'abaisse de  $7' 32''$  en une minute. M. de la Caille a joint à son chassis de réduction, une échelle où l'on peut prendre, avec un compas, cette même quantité avec toute la précision nécessaire; cette échelle est un triangle rectangle isocèle, dont chaque côté,

côté a 15', & exprimant le sinus total, est divisé dans le même rapport que les sinus des divers degrés de latitude & d'azimut. (*Exposition du calcul astron.* art. 240).

3995. La difficulté de voir l'horizon pendant la nuit, fait qu'on ne peut observer la hauteur d'une étoile qu'à 2 ou 3 minutes près, & même celle de la lune, dont les reflets empêchent souvent qu'on ne puisse bien distinguer l'horizon. On préfère donc les hauteurs du soleil, qui peuvent se prendre à une minute près, pour observer le temps vrai, que l'on a par conséquent à 15" près: avec quatre octans faits en Angleterre, dont M. de Verdun & ses Officiers se servoient en 1770, on ne trouvoit presque jamais plus d'une minute de différence entre les hauteurs méridiennes prises dans l'espace de plus de six mois, quoiqu'il n'y eût qu'un seul octant à lunette, les trois autres étant à pinnules.

Remarques  
sur les obser-  
vations de  
longitudes.

Les distances de la lune au soleil sont préférables à celles de la lune aux étoiles, parce que la scintillation des étoiles, & d'autres fois la difficulté de les bien voir, sont des obstacles à l'exactitude des distances de la lune aux étoiles. D'ailleurs les montres ordinaires, quoique bonnes, sont à peine suffisantes pour conserver l'heure qu'on a déterminée, pendant le jour par des hauteurs du soleil; & les hauteurs d'étoiles sont plus difficiles à prendre que celles du soleil.

L'on choisit, tant qu'on peut, des distances qui soient entre 40° & 90°, on peut aller jusqu'à 120° avec les octans ordinaires, mais il est alors plus difficile de tenir l'octant dans le plan des deux astres; au contraire, si la distance est trop petite, les réductions ne sont pas assez exactes par les méthodes précédentes (3981 & suiv).

Il faut, autant qu'il est possible, que l'astre le moins élevé ait au moins 10° de hauteur, à cause de l'inconstance des réfractions.

Les observations sont plus exactes, 1°, lorsque la lune est péricée, 2°, lorsque la lune descend & que le soleil monte, comme aux environs du dernier quartier, 3°;

quand les deux astres sont à peu-près dans le même vertical, de manière que le changement de la parallaxe contribue à rendre le changement de distance plus prompt, ce qui rend le résultat plus exact.

Vérification  
de l'octant.

Pour vérifier si les miroirs de l'octant sont bien parallèles, on mesure le diamètre du soleil en avant & en arrière du premier point de la division; en répétant l'observation plusieurs fois, l'on peut s'assurer de la vérification à 20'' près, sur un octant de 18 à 20 pouces, où il y ait une division de Vernier (2342). Il est important de s'assurer aussi que les deux surfaces du grand miroir sont bien parallèles, en mesurant des hauteurs méridiennes dans des lieux où la latitude est bien connue, & des distances d'étoiles, dont on connoît d'ailleurs la valeur exacte (785).

Comme l'on fait à peu-près de combien est la distance de la lune à l'étoile, que l'on veut mesurer, par le calcul de l'Almanach Nautique, on fixe l'alidade sur le degré; on place l'octant à peu-près dans le plan des deux astres, & en le faisant balancer légèrement, il est aisé de les trouver l'un & l'autre dans la lunette.

Il est difficile de faire de bonnes observations quand on a un gros temps, soit avec le vent-arrière qui augmente le roulis, soit *au plus près*, le tangage étant ordinairement fort; mais lorsqu'on a vent large, & que le vaisseau est moins agité, on peut trouver la longitude à un degré près, dans l'espace de trois quarts-d'heure, en supposant qu'on ait un Almanach Nautique, avec les tables auxiliaires.

3996. LA HAUTEUR de la lune peut servir aussi à trouver les longitudes, & cela de différentes manières. Leadbetter proposa une méthode pour trouver le lieu de la lune par une seule hauteur observée, en supposant la latitude de la lune & l'inclinaison de son orbite connues par les tables. M. le Monnier, pour suppléer quelquefois à la méthode des distances, a donné aussi une méthode pour trouver la longitude en mer par une seule hauteur observée, pourvu qu'on connoisse la déclinaison de la

lune. On le peut faire en observant sa hauteur méridienne, & tenant compte du changement de déclinaison de la lune & du mouvement du vaisseau.

M. PINGRÉ, dans son *Etat du Ciel*, (année 1757, pag. 186), s'est servi aussi de la hauteur de la lune pour trouver l'angle horaire de la lune; c'est-à-dire, sa distance au méridien, en supposant la déclinaison connue par les tables. Voici son procédé, qui est aussi simple qu'il puisse être, en employant les angles horaires, & qui peut servir, même à terre, pour trouver la longitude, lorsqu'on ne peut pas comparer la lune à une étoile. Ayant observé en pleine mer la hauteur du bord de la lune, on y fait les quatre corrections qui dépendent de la hauteur de l'œil au-dessus de la mer, de la réfraction, de la parallaxe & du demi-diamètre de la lune, & l'on a la hauteur vraie de la lune. On fait toujours, à une demi-heure près, la longitude du lieu où l'on observe; par conséquent on peut savoir l'heure qu'il est à Paris au moment où l'on a observé, & l'on peut calculer par les tables, pour ce moment, la déclinaison de la lune, & par conséquent sa distance au pôle. L'on connoît aussi la latitude du lieu où l'on observe (car elle est sur-tout nécessaire dans cette méthode-ci), l'on a donc la distance du pôle au zénit; ainsi résolvant le triangle  $PZS$ , comme dans l'art. 1015, on trouvera l'angle horaire pour le lieu de l'observation.

Longitude  
par la hauteur  
de la lune.

Connoissant ainsi l'angle horaire de la lune, par le moyen de la hauteur observée, on cherche à quelle heure cet angle horaire doit avoir lieu au méridien de Paris; la différence entre l'heure de Paris & l'heure où l'on a observé est la différence des méridiens. Si cette différence trouvée est à peu-près la même que celle qu'on a d'abord supposée pour calculer la déclinaison, la supposition est justifiée, & il n'y a rien à changer au calcul précédent.

Si la différence est sensible, on fait une autre supposition pour la longitude du lieu, on cherche de même dans cette nouvelle supposition l'heure de Paris & la déclinaison de la lune par les tables, pour cette heure-là;

H h h h h ij

## 796 ASTRONOMIE, LIV. XXIV.

avec cette nouvelle déclinaison on résout une seconde fois le triangle  $PZS$ , & l'on trouve l'angle horaire. On cherche à quelle heure de Paris ce même angle horaire y devoit avoir lieu, & la différence entre cette heure de Paris & l'heure de l'observation sera la différence des méridiens. Si cette différence est la même que celle qu'on a adoptée dans la seconde supposition, celle-ci sera vérifiée; mais s'il y a encore une erreur ou une différence dans le résultat, on écrira cette erreur au dessous de celle de la première supposition, on en prendra la somme ou la différence, selon qu'elles seront de même dénomination ou de dénominations différentes, & l'on fera cette proportion. La somme des erreurs est à la plus petite erreur, comme celle-ci est à la quantité dont il faut corriger la différence des méridiens trouvée dans la supposition qui a donné la plus petite erreur.

3997. EXEMPLE. On a observé en pleine mer la hauteur apparente du bord de la lune, à  $16^h$  de temps vrai; l'on en a conclu la hauteur vraie du centre de la lune de  $9^\circ 55' 28''$ , la latitude géographique du lieu de l'observation étant  $50^\circ 35' 27''$  australe. Je suppose, conformément à l'estime du vaisseau, que l'on étoit d'environ  $2^h$  à l'ouest de Paris, en sorte qu'il étoit  $18^h$  à Paris; je calcule pour ce temps-là, par les tables de la lune, la longitude, la latitude, l'ascension droite & la déclinaison, je trouve cette déclinaison de la lune,  $3^\circ 50' 29''$  boréale, ainsi j'ai la distance de la lune au zénit  $= 80^\circ 4' 32''$ , sa distance au pôle  $= 93^\circ 50' 29''$ , & la distance du pôle au zénit  $= 39^\circ 24' 33''$ , d'où je conclus l'angle horaire de  $69^\circ 16' 46''$  (3706).

Je trouve aussi par les tables que l'angle horaire pour Paris est de  $69^\circ 16' 46''$ , à  $18^h 28' 23''$ . De-là il suit que la différence des méridiens entre Paris & le lieu de l'observation devoit être de  $2^h 28' 23''$ . Mais nous l'avons supposée  $2^h 0'$ ; donc l'erreur de cette première supposition est de  $28' 23''$ .

3998. Je passe donc à une autre hypothèse; je suppose

que la différence des méridiens soit de  $2^h 28' 23''$ ; je trouve la déclinaison de la lune  $3^{\circ} 56' 10''$ , & l'angle horaire  $69^{\circ} 9' 14''$ ; cet angle horaire a lieu à Paris à  $18^h 43' 21''$ : donc la différence des méridiens feroit de  $2^h 43' 21''$ , au lieu de  $2^h 28' 23''$  qu'on avoit supposé; la seconde erreur est donc de  $14' 58''$ .

Ces erreurs sont toutes les deux en plus, elles ont diminué à mesure qu'on a augmenté la supposition de la différence des méridiens; cela prouve qu'il faut l'augmenter encore. On fera donc cette proportion: la différence des deux erreurs  $13' 25''$  ou  $805''$  est à la plus petite erreur  $898''$ , comme la différence des deux suppositions  $28' 23''$  est à  $31' 40''$ , c'est la quantité qu'il faut ajouter à la seconde supposition  $2^h 28' 23''$  pour avoir la véritable différence de méridiens,  $3^h 0' 3''$ . Pour sentir la raison de cette proportion, on jettera les yeux sur la disposition suivante de ces calculs.

Longitude  
cherchée.

<i>Première supposition.</i>	<i>Seconde supposition.</i>	<i>Différence.</i>
Longitude, $2^h 0' 0''$	Longitude, $2^h 28' 23''$	$28' 23''$
Erreur, $28 23$	Erreur, $14 58$	$13 25$

On voit dans cette petite table que l'erreur a diminué de  $13' 25''$  pour  $28' 23''$  d'augmentation dans la supposition de la longitude ou de la différence des méridiens, d'où l'on conclura que l'erreur doit diminuer de  $14' 58''$ , ou se réduire à rien, pour  $31' 40''$  d'augmentation dans la différence des méridiens supposée, donc il faut y ajouter encore ces  $31' 40''$ , & l'on aura cette différence des méridiens que l'on cherchoit de  $3^h 0' 3''$ .

3999. Ce fut pour faciliter l'usage de cette méthode en mer que M. Pingré calcula pour les années 1754, 55, 56 & 57, un excellent ouvrage qui avoit pour titre *Etat du Ciel*. Jamais on ne mit tant d'exactitude & de temps à cal-

culer une éphéméride; on y trouvoit pour midi & pour minuit de chaque jour le lieu de la lune, sa latitude, son angle horaire, sa déclinaison, sa distance au soleil, le mouvement horaire en longitude, le changement horaire de l'angle au pôle, &c. tout cela calculé en secondes avec la dernière précision, enforte que les calculs de la longitude, dont je viens de donner l'explication d'après M. Pingré, devenoient très-faciles.

Il eut la constance de continuer seul ce travail pendant 4 ans; le peu d'usage qu'on en faisoit alors parmi les marins, le détermina à suspendre un travail aussi pénible jusqu'au temps où il pourroit devenir plus utile; mais M. Pingré eut l'avantage de donner l'exemple pour l'avenir, & de faire voir qu'un habile astronome pouvoit fournir lui seul à la navigation tous les calculs dont les navigateurs ont besoin; moi-même ayant été chargé de la *Connoissance des temps*, j'ai donné dans le volume de 1761, & dans les suivans, les lieux de la lune calculés avec la même précision, pour midi & pour minuit, qui sont le fondement de tous les autres calculs.

La méthode des distances de la lune aux étoiles me paroissant préférable, je choisirois pour mon *Almanach Nautique* la forme que M. de la Caille a indiquée dans ses éphémérides de 1765 à 1774; & dans son *Traité de Navigation* (1760, pag. 218; 1769, pag. 245), que j'ai mise dans mon *Exposition du calcul astronomique*, & que l'on a adoptée dans le *Nautical Almanac* calculé en Angleterre pour 1767, &c. Cette méthode consiste à donner pour chaque jour, de trois en trois heures, ou de quatre en quatre heures, la distance de la lune au soleil, ou bien à une ou deux étoiles, en degrés, minutes & secondes ou dixièmes de minutes, & la parallaxe horizontale de la lune pour midi & minuit; M. de la Caille y joignoit le temps du passage de l'étoile au mérid. de Paris.

L'en pourroit y joindre encore le logar. de la variation de dist. pour  $3^h$ , moins le logar. de  $3^h$ , afin d'avoir plus aisément la partie proportionnelle de la dernière opération (3283). On a mis aussi dans cet Almanach Nautique 4 pag.



pour les distances , à chaque mois , deux font pour les distances de la lune à des étoiles orientales , & deux pour les étoiles occidentales. Si l'on adoptoit la forme des tables de corrections commencées par M. Witchell (3991) , il faudroit , au lieu de la parallaxe horizontale de la lune , y mettre le log. logistique de l'excès de cette parallaxe sur la plus petite parallaxe employée dans la table de correction ; par ce moyen l'on pourroit avoir , par une simple addition , la seconde partie de la correction de la parallaxe ; car dans ces tables de M. Witchell il y a une colonne où se trouve le logar. logistique de 60' multipliées par le cosinus de la hauteur apparente de la lune , & par le cosinus de l'angle à la lune , enforte qu'en y ajoutant celui de la seconde partie de la parallaxe , on a le log. logist. de la correction qu'elle exige pour la distance (3915 , 3982).

Avantages  
de la méthode  
des distances.

Les raisons de préférence pour cette méthode des distances ont été exposées fort au long. (*Mém. ac.* 1759, p. 77).  
1°. L'on ne peut trouver sur mer l'angle horaire de la lune , par le moyen de sa hauteur , sans supposer connues la hauteur du pôle & la déclinaison de la lune : cependant on ne connoît la hauteur du pôle qu'à quatre ou cinq minutes près ; car , en supposant que l'on ait observé la hauteur du soleil à midi , & par conséquent la hauteur du pôle , à deux minutes près , il faut y appliquer des réductions pour le temps qui s'est écoulé depuis midi , & pour le chemin que le vaisseau a fait. L'incertitude de ces réductions jointe à celle de l'observation principale peuvent nous exposer à 4' ou 5' d'erreur dans la latitude.

2°. Il est difficile pendant la nuit d'observer bien exactement en mer la hauteur de la lune , sur-tout quand elle est entre 20 & 60 degrés de hauteur , à cause du reflet de lumière qui vient de la surface de l'eau , & qui empêche de distinguer le terme de l'horizon ; on ne l'a qu'à 4' près.

3°. Il peut y avoir deux minutes d'erreur dans la déclinaison de la lune , soit qu'on la tire de l'observation , soit qu'on la prenne dans les tables ; & cette erreur influe dans la longitude que l'on cherche.

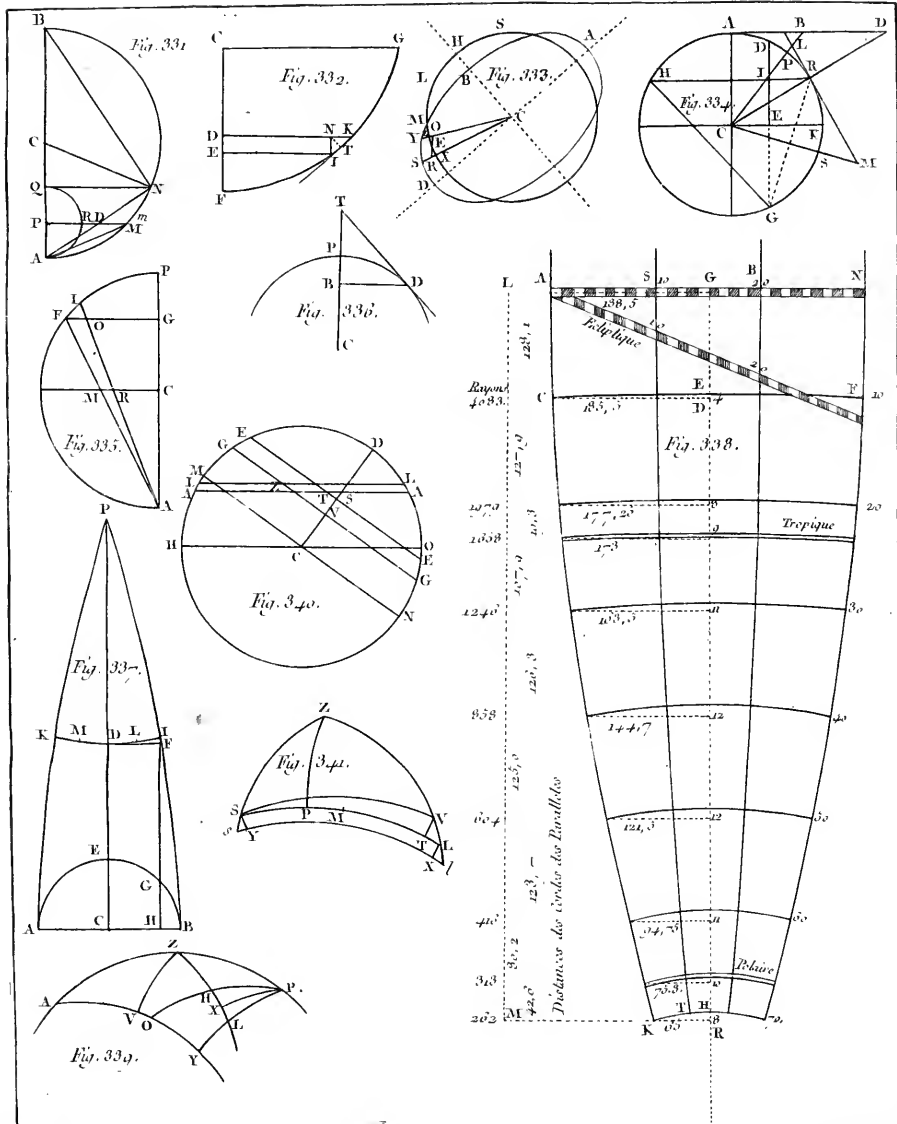
4°. M. de la Caille a calculé ce qui pouvoit résulter de

ces erreurs dans différentes positions de la lune & du vaisseau ; en supposant encore 2' d'erreur dans l'ascension droite de la lune , calculée par les tables , & 30'' sur le temps vrai , il trouve l'erreur entre  $3^{\circ} 36'$  &  $19^{\circ} 3'$  , c'est-à-dire , entre 62 & 190 lieues marines , ( de 20 au degré ).

4000. Dans la méthode où nous employons seulement la distance de la lune à une étoile , l'incertitude est beaucoup moindre. Supposons 4' d'erreur sur la distance observée , l'erreur qui en résulte sur la longitude est toujours à celle de la longitude que l'on cherche , comme le mouvement diurne de la lune est à  $360^{\circ}$  ; c'est-à-dire , de  $1^{\circ} 49'$  si le mouvement diurne est de  $13^{\circ} 10' \frac{1}{2}$ . Cette méthode n'exige une extrême exactitude que dans la seule distance observée ; car , pour les hauteurs de la lune & de l'étoile , sept à huit minutes d'erreur dans chacune formeront à peine un quart de degré sur la longitude. Enfin , supposant deux minutes d'erreur dans le calcul du lieu de la lune , il en résultera 54' sur la longitude. La somme de ces trois erreurs ne va pas à  $3^{\circ}$  , en les supposant toutes du même sens. Cette incertitude sera beaucoup diminuée , si l'on peut faire deux observations différentes le même jour.

Enfin c'est l'expérience qu'il faut principalement consulter sur le choix de ces méthodes : or M. de la Caille & M. Maskelyne ont éprouvé long-temps sur mer la méthode des distances , ils l'ont trouvée la plus exacte , ils l'ont adoptée de préférence. Depuis quelques années M. de Charnières & M. de Verdun, Officiers des Vaisseaux du Roi , M. l'Abbé Rochon , &c. qui se sont exercés à ces observations dans des voyages de long cours , ont employé la méthode des distances de la lune au soleil & aux étoiles , & l'ont regardée comme la meilleure. Il ne nous reste qu'à inviter les navigateurs à en étudier les calculs , à en acquérir l'habitude , & à rendre cette pratique aussi générale qu'elle est utile pour la navigation.

*Fin du troisième & dernier Volume.*





# T A B L E

## D E S M A T I E R E S

CONTENUES DANS CET OUVRAGE,

*Des Auteurs qui y sont cités, & des termes d'Astronomie  
qui s'y rencontrent.*

A laquelle on a même ajouté l'explication de plusieurs termes qui  
ne sont pas employés dans le cours de ce Livre.

N. B. Les nombres cités indiquent les Articles & non les Pages.

### A.

- A**BAISSEMENT de l'horizon sensible ou du niveau, Art. 12, 2654, 3981.  
**A**EEILLE, constellation, 710.  
**A**BERRATION de la lumière, sa définition, 2790, 2801. Premières observation qu'on en fit, 2793. Sa découverte par M. Bradley, 2800. Différentes manières de la concevoir, 2801. Aberration diurne, 2812. Calcul des différentes aberrations, 2818 & suiv. Ellipse d'aberration, 2825. Tables d'aberration, 2846, & page 230 des tables. Aberration des comètes, 3070.  
**A**BSIDES, v. APSIDES.  
**A**BULFÉDA, 399.  
**A**CADÉMIE DES SCIENCES de Paris, 537, &c. Les Mémoires de cette Académie sont cités à tout instant dans le cours de cet ouvrage. Académie de Londres, v. SOCIÉTÉ ROYALE. Autres académies, 3300. v. aussi la Préface, xxx.  
**A**CCÉLÉRATION du mouvement de Jupiter, 1170, de la Lune, 1483. Accélération de la chute des graves, 3361.  
 Accél. diurne des étoiles fixes, 955.  
**A**CHROMATIQUE, 2298.  
**A**CRONYQUE, 1604.  
**A**DONIS, 659.  
**Æ**GOCEROS, le verseau, 113.  
**Æ**GYPTIENS. v. EGYPTIENS.  
**Æ**MONIUS, 647.  
**Æ**QUATEUR, ÆQUATION, &c. v. EQUATEUR, EQUATION, &c.  
**Æ**SACUS, 678.  
**Æ**SCULAPIUS, 665.  
**A**IGLE, Constellation, 682, 772.  
**A**IMAN, sa direction vers le nord, connue en Europe vers l'an 1100, 417. Travaux de M. Halley sur l'aiman, 585. v. la Connoissance des temps de 1762, p. 168. & l'Exposition du Calcul astronomique.  
**A**IR, Atmosphère, son effet sur les crépuscules, 108, 2260, sur les réfractions, 2160, sur les éclipses, 1774, sa densité décroît en progression géométrique, 2208. Effet de la chaleur de l'air, 2226. Moyen pour préserver les lunettes de l'humidité de l'air, 2497.

- AIRES, Secteurs décrits par les planètes, sont proportionnels aux temps, 1226.
- ALBATEGNIUS, 383.
- ALCHABOR, 697.
- ALCYONE, une des pléiades, 646.
- ALDEBARAN, œil du taureau, 609, 647, 754; elle est appelée aussi *Palilicium lampadias, fulgens succularum*.
- ALEXANDRIE. Ville d'Egypte, célèbre par un grand nombre d'observations astronomiques, 344.<sup>1<sup>h</sup> 51' 45"</sup> à l'Orient de Paris, avec 31° 11' 20". de latitude septentrionale.
- ALFONSE, 426.
- ALFRAGAN, 383.
- ALHABOR, 609.
- ALHAJOT, 609, 673.
- ALHATOD, 609.
- ALHAZEN, 393.
- ALGEBARO, 691.
- ALGENIB, 609.
- ALGOMEIZA ou ALGOMEYSA, nom que l'on donne au petit chien, 609, 700.
- ALIEMINI, 609, 697.
- ALLIN. Sa dissertation sur les années de 360 jours, 278.
- ALMAGESTE, ou *Grande composition* de Ptolomée, 366, 367, 423, 428. *Edizio princeps*, 368. *Almagestum novum* de Riccioli, 529. excellente collection dont j'ai fait un usage continué dans cet ouvrage.
- ALMANACH, tables des mouvemens des astres.
- ALMANACH NAUTIQUE, 3999.
- ALMAMON ou ALMAMOUN, 380.
- ALMICA TARAT, 19.
- ALPHERAS ou ALPHERE, 609, 670.
- ALPHONSE, roi de Castille, 426.
- ALPHRAD, 701.
- AMALTHÉE, 656.
- AMIS & ennemis. Nom que les astrologues donnoient à certains signes du Zodiaque.
- AMMON, 626.
- AMPHION, 648, 685.
- AMPHISCIENS, 146.
- AMPHITRITE, 677.
- AMPLIFICATION. Force des lunettes, 2286, des télescopes, 2423, 2427.
- AMPLITUDE orive & occa, 181. Calcul de l'amplitude, 1040.
- ANACAMPTIQUE, v. CATOPTRIQUE.
- ANACLASTIQUE, 2160.
- ANALOGIES différentielles pour les triangles sphériques, 3745.
- ANDROMÈDE, Constell. 668, 766.
- ANELAR ou ANHELAR, 609.
- ANES austral & boréal, 650, 1343. v. le Catalogue des étoiles.
- ANGLES, mesure des angles, 26. Les différences de longitudes & de hauteurs doivent être considérées comme des angles, v. DEGRÉS, DISTANCES. Angles sphériques, 851. Angle horaire, 1008. Ses usages, 1013 & suiv. Angle parallactique, 1036, 1883. Angle de position ou angle à l'étoile, 1044, 2714. Angle de la verticale avec le rayon de la terre, 1708, 2679. Angle d'azimut, 1888. Angle de conjonction, 1887. Angle de distance dans les éclipses, 1888. Angles d'incidence & de réfraction, 2161. Angles qui se mesurent sur le terrain, 2583. v. TRIANGLE.
- ANNEAU astronomique, 2275.
- ANNEAU de Saturne, 3225 & suiv.
- ANNÉE civile, 1536, solaire ou tropique, 80, 886, sidérale, 888. Détermination plus exacte de l'année, 886. Année anomalistique, 889, 1311. Années d'un mois. 277. Années de 360 jours, 278, 326, 1535; de 445 jours, 1539. Années égyptiennes, Années de Nabonassar, 1597. Années des Turcs, 1602. Grande année caniculaire, 296, 1605. Années des Grecs, 326. Grande année d'Hipparque, 1417. Année lunaire, 1567. Julienne, 1539, Grégorienne, 1546.
- ANNULAIRE (*Eclipse*), 2490.
- ANOMALIE, 1234, vraie, moyenne, excentrique, 26. Trouver l'anomalie vraie, 1237, 3334. Anomalie dans la parabole, 3032, 3104. Anomalie des comètes, 3096, 3098 & suiv.
- ANTARCTIQUE ou méridional, v. ARCTIQUE.
- ANTE-CANIS, 700.
- ANTHÉAULME, 2305.
- ANTICTONES, v. ANTIPODES.
- ANTINOUS, Constellation, 683, 782.
- ANTIPODES, 147, 1092, 1102.
- ANTISCIENS, *Antaciens*, 150.
- ANUEIS, 629, 697.
- APHÉLIE, 1234. Méthodes pour trouver le lieu de l'aphélie, 1279, 1284.

- 1290, 1297. Trouver le mouvement de l'aphélie, 1310. Méthode pour le trouver par la loi de l'attraction, 3489.
- APIS, 627.
- APLATISSEMENT de la terre, observé, 2676, 3589. *v.* DEGRÉS. Cause de la Nut. 3527, aplatissement de Jupiter, 2910, 3221, son effet dans les éclipses des Satellites, 2935. Aplatissement de la lune, 3183. Aplatissement de la terre déduit des Loix de l'attraction, 3589.
- APOCATASTASIS, révolution périodique.
- APOJOVE, 2908 *en note*.
- APOLLON, 609, 648.
- APOTELISMA, *effectio*, signifie ce qui a été fait, achevé, décidé, Eculliaud, p. 356. Il signifie prédiction dans *extus Empiricus*, p. 344.
- APPARENT, lieu apparent se dit par opposition avec lieu moyen. Temps apparent, ou temps vrai, *v.* TEMPS.
- APOGÉE, 864. Apogée du soleil, 1312. Apogée de la lune, 1429, son mouvement, 1432.
- APPARITIONS des comètes. *v.* COMÈTES. Cercle de perpétuelle apparition; celui que décrit le soleil quand il ne se couche point, 229.
- APSIDE, son étymologie, 864, 1234, 3509. On écrit souvent *abside*; mais *apside* est plus conforme à l'étymologie; en Latin *apsis*; *Aux* signifie à peu près la même chose. *v.* APHÉLIE, APOGÉE & APOJOVE. Mouvement des apsidés, 3509.
- APULSE de la lune à une étoile, (il a lieu quand elle en est assez près pour être vue dans la même lunette) 1991, 1763, 3971.
- APUS, *Apous*, *Apis*, 710.
- AQUARIUS, *v.* VERSEAU.
- ARABES, leurs travaux en Astronomie, 378. Arabes en Espagne, 390. Manuscrits Arabes qu'il importeroit de publier, 1485. Années des Arabes, 1602, &c. Noms Arabes des étoiles, 609.
- ARAINÉE, partie de l'astrolabe où sont marquées les étoiles.
- ARAMECH, 675.
- ARATUS, 346.
- ARCHIMEDE, Sphere d'Archimède, 105.
- ARCS *semidiurnes*, 1013. Arcs supérieurs ou diurnes des parallèles, 116. Arcs de position, 1056. Arcs d'émersion, 1606, 2261. Les arcs s'eximent ou en secondes, ou en décimales du rayon, 1242, 1291, 2543 à 2567, 3359; un petit arc est égal l'angle multiplié par le rayon, 3358.
- ARCTIQUE, 114. le pôle arctique est le pôle boréal ou septentrional du monde.
- ARCTOPHILAX, *v.* BOUVIER.
- ARCTOS, 661, 663.
- ARCTURUS, 675, 754.
- ARGOLI, 515.
- ARGONAUTS, (*Argo*, *Argo*) 250, 317, 708.
- ARMILLAIRE, *v.* SPHERE.
- ARMILLIS d'Alexandre, 80, de Tycho, 2279.
- ARGUMENT d'une équation; ce que c'est, 1496, 3603. Arguments des équations du soleil, *v.* les Tables, pag. 4. Arguments des équations de la lune, *v.* les Tables, pag. 59 & *suiv.* Argument de latitude, 1124, 1136. Argument de la parallaxe, 1650. Argument annuel de l'aberration, 2816. Arguments du P. Riccioli contre le mouvement de la terre, 1074.
- ARIADNE, 677.
- ARIES, *v.* BÉLIER.
- ARION, & URION, 691.
- ARISTARQUE, 348, 1722.
- ARISTÉE, 678.
- ARISTOTE, 342, 3590.
- ART des instrumens de Mathématiques; sera décrit par l'Académie, 2469.
- ARTIFICIEL, *Horizon artificiel* ou rationnel, 12. *Jour artificiel*, temps que le soleil paroît sur l'horizon.
- ARZACHEL, 391, 866.
- ASCENDANS. Signes ascendans, ceux que le soleil parcourt pendant l'hiver & le printemps, en s'élevant tous les jours de plus en plus, 119. Ascendant ou Horoscope, 1055.
- ASCENSION DROITE, 182. Différence d'ascension droite, 88. Sa mesure par le temps, 88, 212, 877. Manière de l'observer, 872, 2351, 2505, 2518. Correction qu'elle exige, 2539. Observer l'ascension droite du soleil, 870, 872. Celle d'une étoile, 877. Calculer l'ascension droite par la lon-

- giude, 906. Usages des ascensions droites, 983. Ascension droite du milieu du ciel, 1011. Lieu de la lune calculé par le moyen de son ascension droite, 1937.
- ASCENSION OBLIQUE, 173, 026.
- ASCENSIONNELLE (différence) *v.* DIFFÉRENCE).
- ASCHERE, ou *Afchémie*, 609.
- ASCIENS, 146.
- ASINA, 701.
- ASPECT, situation d'une planète par rapport à une autre, 1055, telles sont les quadratures, les syzygies.
- ASPHALTE, 269.
- ASTACUS, 649.
- ASTERISMES ou Constellations, 602.
- ASTEROPE, l'une des pléiades, 646.
- ASTRÉE, 652.
- ASTRES. Ce terme est commun aux étoiles, aux planètes & aux comètes.
- ASTROLABE, instrument d'Astronomie. Il y en a eu de plusieurs sortes, 2275, 2279, 3871. le plus ancien est celui qui est décrit dans Ptolomée, V, 1. & dans Copernic (II, 14); mais dans la suite on a appelé *Astrolabe* une espèce de planisphère que Ptolomée avoit aussi employé, où sont projetés les différens cercles de la sphère. *v. Adriani Merii Opera Astronomica; Clavii Astrolabium*, &c; & c'est ainsi que ce mot est employé dans presque tous les auteurs du *xvi<sup>e</sup>*. & *xvii<sup>e</sup>*. siècle, 3871.
- ASTROLOGIE. Signification de ce terme. *v.* la note de l'*arr.* 260. Elle fut cultivée chez les Caldéens, *arr.* 260. Eudoxe la proscrivoit, 337. Elle est une preuve d'ignorance & de stupidité, 1054. *v.* aussi la *Préface*, p. xv.
- ASTROMETRE, *v.* HELIOMETRE.
- ASTRONOMES. Ceux qui ont le plus contribué au progrès de l'Astronomie sont Hipparque, Ptolomée, Copernic, Tycho, Képler, Hévélius, Flamsteed, Huygens, Picard, Romer, Halley, Cassini, Bradley, de la Caille, &c. *v.* AUTEURS. Astronomes célèbres dans la Fable, 251, 268, 283. Astronomes cités dans ce livre. *v.* AUTEURS.
- ASTRONOMIE, sa définition, page 1, au commencement; son étymologie, *ibid.* son origine, 245, son utilité, *v.* la *Préface*, xj. Astronomie Caldéenne, 242, 260, Chinoise, 400, Egyptienne, 283, Arabe, 378. Astronomie sphérique, 31. Révolutions arrivées dans l'Astronomie, 343, 537, 2309. Fondemens de l'Astronomie, 850. Astronomie des Satellites, 2880. *v.* Auteurs, Calcul, Étoiles, Instrumens, Observations, Planètes, Comètes, Satellites, Tables.
- ATLANTIDES, pléiades, 646.
- ATLAS paroît avoir vécu 2400 ans avant J. C. 247, 250; nom d'une étoile, 646.
- ATMOSPHERE de la terre, 2160. *v.* AIR. Sa hauteur, 2270. Produit la réfraction astronomique (*liv.* xii.) & les crépuscules, 108, 2260. Son effet dans les éclipses de lune, 1774, 1789. Il ne paroît pas qu'il y en ait dans la lune, 1991. Atmosphère du soleil, 845. Des planètes, 2271.
- ATELIER du Sculpteur, Constellation, 771.
- ATTRACTION, Pesanteur, gravité, effet de cette force, 151, 3360. Quinze effets différens de cette attraction universelle, 3383. Attraction de Vénus sur la terre, 2788. Des Satellites les uns sur les autres, 2969. Sur les comètes, 3017. Cette force fut connue des anciens, 3376. Sa loi fut découverte par Newton, 3381. Attraction qui a lieu dans les orbites circulaires, 3389. Démonstration de la loi de l'attraction, 3396. Effets de l'attraction sur la lune, 3469. Calcul de l'attraction de Jupiter sur la terre, 3485. Calcul de l'attraction dans des orbites excentriques, 3496. Attraction sur un sphéroïde, 3528. Attraction d'un sphéroïde, 3585. Attraction des montagnes & des corps terrestres, 2695, 3401. des tubes capillaires, 3402.
- AUGMENTATION des objets. *v.* AMPLIFICATION.
- AURIGA, *v.* COCHER.
- AURORE, *v.* CREPUSCULE.
- AURORES boréales & leur explication, 849.
- AUSTRAL, ou méridional, 14. *v.* Pole, Latitude, Déclinaison, Hémisphère.



AUTEL, Constellation, 706.  
AUX, v. APSIDE.

AUTEURS cités dans cet ouvrage  
comme Astronomes ou Mathématiciens.

ABUI.FEDA, 359, 2631. aguillon, 3868. albatregius, 385 718, 2720. albamazar, 790. d'alembert, v. D. alfergan, 383. alfonse X ou alphonse, 426, *prés.* xxix. alhazen, 393, 2163. almanzor, 380, 2631. aloisius lilius, 1572. americ-vespuce, 710. anaxagore, 330, *prés.* xij. anaximandre, 328. anaximènes, 330. anderson, 1253. anich, 512. antheaulme, 2303. anthelme, 722, 797. appian, 449, 3118, 3969. ararius, 346. d'arcy, 3526. argoli, 515. aristarque, 348, 1722. aristote, 342, 3590. arnold, 512. aryllille, 345. arzachel, 391, 866. asclepi, v. la *prés.* xlv. audiffredi, v. *prés.* xlv. auzout, 522, 2309, 2349, 2636. averthoes, 2000. Bacon (*françois*) 3379. bacon (*roger*) 2163. bailly, 729, 1524, 2900, & *suiv.* bainbrigius, 1604, *prés.* xxxij. bandinì, 2281, barros, 2984. bartholin, 480. bartholi, 3220. bartschius, 459. batecombis, 736. bayer, 483, 694, 710, 734, 738. beaulieu, 566. beccaria, 2691, 2696. belgrado, v. *prés.* xlv. benoit, *prés.* xxxv. beraud, 466, 1741, v. la *prés.* xlvj. bergman, 2144. bernard (*edward*) *prés.* xxxij. D. bernoulli, 2195, 2265, 3412. J. bernoulli, 3300, 3121, 3392, 3423. berthoud, 2461, 2464. bevis, 735, 1485, *prés.* xxxvj. 2180, 2302, 2349, 2364, 2781. bilberg, 2230. bion, 3888. bianchini culelan-chinus, 392, 430, 577, 633, 826, 1572. blaue, 736. bliff, *prés.* xxxij. 1526. bonne, *prés.* x. 2216, 2241, 3883. borelli, 524, 525. boscovich, *prés.* ix, xlv. 2196, 2253, 2271, 2308, 2381, 2621, & *suiv.* 2827, 3149, 250, 3401, 3423, 3883. bofe, 1741. boffut, 3345, 3513. bougainville, 3300. bouguer, 591, 2162, 2251, 2433, 2458, 2609, 2668, 2673, 2683, 3593, 3879. bouiller, *prés.* xlvj. boullaud, 537, 547, 823, 843, 1446. bouin, v.

*prés.* ix, xlvj. boyle, *prés.* xli. 539. bradley, 596, 2203 & *suiv.* 2880 & *f.* 2791 & *suiv.* 3051 & c. brake-noffier, *prés.* xlvj. briggs, *prés.* xxxij. 498, 3902. buche, 3882. byrgius, 500. de la Caille, astronome célèbre, v. *prés.* j. v. la caille, call, 2146. campani, 523. camus, 2669. Ange capelli, 1458. canterzani, *prés.* xlv. carboni, *prés.* xlvj. carcani, 1741. cardan, 455, 3118. J. D. cassini, 552. *prés.* iv. 310, 573, 799, 845, 2168, 2191, 2223, 2244, 2993 & *suiv.* 3218 & *suiv.* jean-jacques cassini son fils, v. *prés.* j. 590, 1153, 1247, 1270, 1360, & c. césar-françois cassini de Thury, 590, 1359, & c. jean-dominique cassini fils de celui-ci, 590. caswel, *prés.* xxxij. cavalli, *prés.* xlv. cavendish, 2696. cellius, *prés.* xli. chaligny, 1046, 1471 & la *pr.* ix. de la chapelle, 3250. chappe, 588, 2143. du chalet, 3380. chazelles, 551, 2663. chezy, 2399. le P. christophe, 2146. clairaut *prés.* viij. 1441, 1460, 1478, 2303, 2669, 2830, 3115, 3430, 3579. clavius, 484, 1587, 3868. clémendes, 361. co-cheou-king, 418, 1312. coignet, 3868. de la condamine, 2357, 2381, 2564, 2626, 2636 & *suiv.* 2668, 2673 & *f.* conon, 674. copalle, v. *pr.* xlvj. copernic, v. *prés.* iv. 437, 1070, & c. coronelli, 736. corfalius, 710. cortese, 3868. costard, 277, 3590. cotes, *prés.* xxxij. 7345. de courtivron, 2162. crabrée, 507. craige, 2162. cristiani, 2635. curtiis, 478. cusa, 1071. cysatus, 2006. D'alembert, 1441, 1460, 1475 & *suiv.* 2302, 2873, 3115, 3415, 3430, 3498, 3526, 3579. dancs, 460, 554. d'anville, 2639. d'arquier, 1528, 1741. de la caille, v. la caille. de l'isle (J. N.) 481, 563, 598, 1399, 1457, 1529, 1991, *prés.* xxxij. xli. Louis de l'isle 584. deparcieux, 3898, 3904. de peyrefc, 504. derham, 843. defaguliers, 3109. defargues, 537. defcaries, 513, 537, 845, 2162. deshaies, 2663. desplaces, 581. digges, ou diggefeus, 1641. dollond, 2298 & *suiv.* 2437, *prés.* xlix. doerfeld, 3017. dudreneuc, 1043. dulaguc, v. *prés.* xlvj. dumas,

N O M S  
DES AUTEURS.

N O M S  
DES AUTEURS.

466. & la *préf.* ix. dunihorn, 1483, 3891. durrel, 503. du séjour, 1189, 1923 & *suivantes*. 1969, 1992. dymond, 2146. Eichstadius, 501. cimmart, 563, 845. *préface*, xxxvij. cinschmid, 2665. emery v. l'emery. eratostène, 349, 2630. eudoxe 337. albert euler, 2146, 3115. C. euler, 2146. L. euler leur pere, 849, 1441, 1477, 2195, 2295, 2308, 2727, 2830, 3119, 3276, 3300, 3430, 3498. Fabricius, 486. fahrenheit, 2230. ferguson, 1813, 3109. fermat, 3378. fernel, 454. ferner. 2146. ferrouce, 512. feuillée, 551. leèvre, 2663. fixmillier, *préf.* xxxix. flamsted, *préf.* xlij. 560, 573 724, 732, 2775, 2791. fontana, 3220. fontanay, 2010. *préf.* xxxv. fontaine, 2830, 3300. fontenelle, 543, 599, 3247. *préf.* v. fortunio-liceti, 739. defouchy, 599, 1813, 2315, 2334, 2668, 2984. fourmier, 3563. fracastor, médecin & poète, 448, 3118. frenicle, 537. frisi, 1479, 3421, 3526. frisius, 3118. Gaultée, 508, 2880, 3176. garcin, 2789. gardiner, 3904. ganpuy. 1741. galcoigne, 506, 2349. gallendi, *préf.* xxxi. 443, 476, 517, 537, 2006, 2718. gaubil, 400, & *préf.* xxxv. geminus, 360. gemma frisius, 452, 736, 3118, 3969. *préf.* xviii. le genil, 839, 1775, 2146, 2291. gerdil, 3402. godin, 593, 1518, 2668. goldover, *préf.* xxxix. goudin, 1189. gouye, *préf.* xxxiv. 1514. graham, 2328, 2380, 2462, 2792. grammatici, 1457. M. de la grange, 2981, 3185. le P. la grange, v. *préf.* ix, xlv. greaves. *préf.* xxxij. green, 2146. gregori (jacques) opticien, 2408. gregori (david) 549, 3423. grimaldi 3222. grischow, *préf.* xxxvij, 827, 1485, 1986. de la grive, 2586. gruenberger, 2400. guerin, 3922, *préf.* x. guide ubalde, 3868. guillaume (landgrave de hesse) 462, 471, 720. *préf.* xxxv, xxxvij. Habash, 380. hadky, 2993. hall, 2298. hallerstein, xxxv. halley, 585 & *suiv.* 722, 1501, 1526, 2005 & *suiv.* 2225, 2748, 3022, 3052, 3092, 3873, 3971. harstoecker, 2162. hauksbee, 2225, 2427. heinsius,

3233. hell, 512, 1752, 2494, &c. *préf.* xxxiv. helland, 2146. hennert, *préf.* xlij. P. henri, 2281. herman, 1251. hevelius, *préf.* xxx, xxxv. 531, 714, 723, 734, 3118, 3178. hierter, *préf.* xlij. hipparque, *préf.* xvij. 351, 606, 859 &c. de la hire, *préf.* xxxij. 480, 574, 1294, 1735, 2663, 3173, 3877. hodierna. 2830. hoffman, 563. hock, *préf.* xxxiv. 539, 548, 848, 2773, 3380 de l'hospital, 3250. hoensby, 1339, *préf.* xxxij. horoccius ou horrokes, 392, 505, 569, 1435. horrebe w. 564, 597, 2357, 2779. hu-ti, 408. P. huberi, *préf.* xij. huygens, 541, 837, 2162, 2347, 2658, 2993, 3247. v. ci-après au mot huygens. hyde, 397. Jacques, *préf.* xxxv. jaquier, 3300, *préface* xlv. ibn-jounis, 358. 1484. iceras, v. nicevas. Jeanat, 478, 1321, 2279, 2779, 3343. jostelius, 475. D. gorges-juan, 2674. Kellner, *préf.* xij. 2756, 3173. keil, *préf.* xxxij. 568, 1251. Kéglér *préface* Képler, v. *préf.* iv. 492, 719, 796, 1206 & *suiv.* 1571, 2003, 3376. v. Képler. kiang-ki, 410. kies, *préf.* xxxvij. kirch, 563, 57, 583, 838. kircher, 625, 2162. koetler, *préf.* xxxv. koesfeld, 563. kotelnikoff, 2146. kraft, 2146. La caille, 595, 711, 727, 841 & *suiv.* 1652, 1689, 1715 & *suiv.* 1740, 1812, 2176 & *suiv.* 2458, 2650, 2691, 2780, 2830, 3052, 3089, 3423. lambert, 2252. langrenus, 510. lansberge, 497. laval, 551. leadbetter, 1457, 3996. le gentil, 839, 1775, 2146, 2291. l'emery, 1028. *préf.* x. le monnier, v. monnier. leovitus, 453, 791. M<sup>d</sup>. le paute, 1942. lieou-hin, 406. lieou-hong, 409. lieou-pang, 404. lief-gang, *préf.* xxxvij. 2691 & *suiv.* lieutaud, 580. li-fang, 407. liungberg, *préf.* xij. roger-long, 642. *préface*, xxxij. longomontanus, 509 & *préf.* xxxv. de louville, 579, 2366. lowitz, 2146. lubienietzki, 526. luino, *préf.* ix. card. de luyues, 2318. lynn, 2980. Machin, 1858. mac-laurin, 2490, 3400, 3579. maclefield, *préf.* xxxvij. maestlin, 3089. Magini, 456, 487. de mairan, 599, 837 & *suiv.* 848 & f. 2636 & *suiv.* 3119, 3164.

mallet, 2146 *préf.* x, xlvij. malvasia, 521, 553. manfredi, *préf.* xlv. 582, 2777, 2779. manlius, 2281. J. P. maraldi, 578, 803 & *suiv.* 3233. D. maraldi, *préf.* ix. 578, 728, 2895 & *suiv.* 2942, 3086, 3242. margraff, 1399. marinoni, *préf.* xxxviii. marius, 488, 836, 2880. martianus capella, 439. maskelyne, 829, 1640, 2678, 3982, 3986. mafon, 2145. maffahalahaly, 790. mauduit, 3250. 3633, 3745 *en note*. maupertuis, 592, 1682, 2669, 2675. J. C. mayer, 1189. tobie mayer, *préf.* xlv. 594, 1441 & *suiv.* 1471 & *suiv.* 3173, 3188 & c. P. mayer, *préf.* xlv. andré mayer, *préf.* xlvij. medine, 710. melchior jostelius, 475. ménélaus, 363. mercator (*gerard*) 464, 736, 3878. mercator (*nicolas*) 530. nærtenne, 537. messier, 1529, 1741, 2983, 3002 & la *préf.* xxxvj. meton, 1556. métrodoze, 2628. meyer, *préf.* xxxix. le mire, 615. mœstlinus, 461. molyneux, 2162, 2776, 2791. le monnier, 538, 568, 730, 1527, 2226 & *suiv.* 2669, 2749, 3975, 3996 & c. la *préf.* i & xxxv. montanari, 805 & *suiv.* monucla, 280, 3286, 3321, 3376. jonas moor, 569, 1437, 3233. morand, v. *préf.* xlvij. morin, *préf.* xxxj. 518, 2319, 2880, 3970. morris, 1526. meuton, 528, 2634, 2921. muler, 385, 491. murdoch, 3885. mussenbroeck, *préf.* xlvij. 124 *en note*. 2208. Neper, 496. newton, v. *préf.* iv, xxxij. 256, 576, 616, 1456, 2162, 2408 & c. v. *Newton*. nicetas ou icetas, 334, 1070. nicolic, 589, 1294. noel, *préf.* xxxiv. 565, 845. nollot, 2208. nonius, 457, 634, 3242, 3868. norwood, 2632. Origan, 490. d'orléans, 2162. oronce finé, 451, *préf.* xxj. orphée, 302. otho, 456. outhier, 2669. pallu, 610. panigai, *préf.* xlv. pardies, 734. pascal, 537, 3285. passellant, 2297, 2469. le paute, 1037. v. le *paute*. peiresc, 2880, 2987, 3170. pemberton, 3381. perelli, v. *préf.* xlv. pernin, 2663. petau, 516, 1562, & c. peucer, 482. pezenas, v. *préf.* xlvj. 528, 2162, 2308, 2342, 2447, 2458, 2584, 3530. philolaus, 302, 333, 3246. picard, 477, 480, 560,

2223, 2641, 2771, & c. picet, 2146. pingré, *préf.* ix. 2144 & *suiv.* 3086, 3119, 3848, 3996. pytheas, 341. pitiscus, 456, 485, 3904. planman, 2144. platon, 339. pluche, v. *préf.* v. 614. P. poczobut, *préf.* xlvj. posidonius, 359, 1721. potenot, 2663. pound, 1737, 2428, 2993, 3229. ptolomée, 335, 364, 718, 1063, 2275 & c. purbachius, 387, 429. pythagore, *préf.* xij. 327, 331. pythéas, 341. de Ratte, v. *préf.* xlvij. de réaumur, 129. régionontanus, 431 & f. 736. reineri, 2880. reynau, 3300. rheinhold, 450, 1559. rheita, 2162, 3222. rhetoricus, 442, 456, 3904. ricci, *préf.* xxxv. riccioli, 529, 599, 609, 721, 1062, 1545, 2718 & c. richer, 546, 2168, 2657. rivard, 221. robaix, 2666. robert de vaugondy, 714, 733 & *suiv.* 3876. robertson, 3879. roberval, 348, 537, 561. de rochon, 2300, 2308. roe, 3904. romer, 564, 573, 1732, 2357, 2388, 2725, 2854. rock, 540, *préf.* xxxiv. rolt, 563. rothman, 462. rumowsky, 2146. rowley, 2776. royer, 714, 722. Sabatelli, 1741. sacrobosco, 424. salaheddin al roumi, 396. salvaggi, *préf.* xlvj. san martin vrbie, v. *préf.* xlvj. de saron, 2484. savery, 2437. scheiner, 514, 2476, 3124. schemmark, 1740. schikard, 502. schiiller, 720. schmidt, 621. schoner, 446, 736, 2460. schot, 2162. schreckenfuchsius, 458. fedileau, 545, 2663. seigner, 1813. du séjour, 1683, 1923 & *suiv.* senex, 714, 733. sethward, 535, 1253, 1309 *préf.* xxxij. shakerloeus, 2007. sharp, 3227, 3921. shepherd, *préf.* xxxviii. short, 1388, 2422, 2437. sigalloux, 551. silvabelle, 3526. simpson, 1251, 1479, 2195, 2830, 3526. slaviseck, *préf.* xxxv. slop, *pr.* x. iv. robert smith, 2162, 2283, 2297, 3245. jolins mih, *préf.* xxxiii. snellius, 392, 435, 489, 2165. sosigenes, 1539. soucier, 400, *préf.* xxxiv. se-ma-tien, 405. stadius, 459, 466. steward, 3474. stirling, 3916. stoffler, 447. street, 520, 3915. struborius, 444. strommer, 1740. struick, 3086. sully, 2282. synesius, 358. syrturus, 2257. Tacquet, 519, 3868. tabeih ou thebit,

## N O M S

## DES AUTEURS.

386 & *suiv.* tarde, 3133. taylor, 2195. tchang-tse-lin, 411. tching, 420. tchang-heng, 408. terentius, 638. thalès, 322. theodori, 710. théon, 271, 376. timocharès, 345, 355. toaldo, v. *préf.* xlv. tofino, on prononce tofino, v. *préf.* xlvj. trapézuntius ou trébizonde, 428. trebuchet, 2029, 2038. tycho-brahe, *préf.* iv, xxxv. 466, 478, 719, 792, 1083, 1442, 2328, 2460, 2779. Ulacq, 3903. d'ulloa (*don antonio*) 2674. ulug-beg, 395, 396, 718, 1603. varin, 2663. du vaucel, 1794, 1969. verbiest, *préf.* xxxiv. vernier, 2343. wagner, 563. veron, 2146. le P. videloup, 2011. vitello ou vitellio, 427. vrbie, *préf.* xlvj. wales, 2146. wallis, *préf.* xxxij. 394, 539, 3288. walmfley, 1479, 3044, 3526. waltherus, 432, 1312, 2277, 2721. ward, 394, 539. wardus, 535, 1253, 1309. *préf.* xxxij. wargentin, *préf.* x, xliij 1740, 2143, 2880 & *suiv.* Ses tables des satellites à la fin du premier vol. waring, *préf.* xxxij. weidler, *préf.* xxxiv. 247 & *suiv.* 308, 368 & *suiv.* 444 & *suiv.* 599. v. weidler, weiff, *préf.* xxxix. wendelinus, 511, 2281. werner, 445. whiston, *préf.* xxxij. 401, 550, 2005, 2029. willis, 539. wing, 527, 1148. wintrop, 2146. volf, 3291. wren, *préf.* xxxij 539, 1822. wright, 1458, 3878. wurtzelbaur, 563, 2010. *préf.* xxxvii le P. ximénez, v. *préf.* xlv. 2281. zanotti, *préf.* xlv. 1740, 2179, 2779. zebrowski, *préf.* xl. zoroastre, 268. zumbach, 563. zuppi, 3222.

N O M S des personnes citées dans cet Ouvrage, comme Philosophes, Historiens, Poètes, Amateurs ou Protecteurs des Lettres, Artistes, &c.

Noms des Philosophes, Historiens, &c.

ABRAHAM, 261. achilles tatus, 264, 273. adam, 443, 599. adrien, *préf.* xxix. alb. fabricius, 338. alexandre le grand, v. *préf.* xiv. 1600. alfonse X, 426, *préf.* xxix. le P. alexandre, 2461. agathocles, *préf.* xiv. allin, sa dissertation sur les années de 360 jours, 278. améric vespuce, 710. anaxagore, 330, 3246, *préf.* xij. an-

quetil, 268. antoli (*jacques*) 384, aratus, 254, 346. aristote, 264, 640, 1062, 2163, 3117, *préf.* xxiv. atlas, 247. Bacon, 537. baillet, 511. barthélemy, 312. barecombis, 736. bayle, son dictionnaire est cité à plusieurs endroits, 451, 454 & *suiv.* 495, 516 &c. belus, 268. benoit XIV, *préf.* xlv. berose, 275. berthoud, 2146, 2461, 2464, *préf.* xix en note. billeus, 469. lion, 2279. birch, 539. voyez la note, 599. bird, 2333, 2386 & la *préf.* xlix. blondel, 1545, autre architecte de meme nom, *préf.* xxxv. bonamy, 302, 3246. bouriot, 2306. broglio, 463. buchanan, 1074. burigny, 359. Cæsius, 607 & *suiv.* 710. canivet, 2316, 2333, 2372. de caylus, 625, 630. casali, 1401, 1536. cesar, 1538, 1542. charlemagne, *préf.* xxix. charles-quint, *préf.* xxx. childey, 845. christian IV, *préf.* xxxv. christman, 384, 1602. christophe colomb, *préf.* xv, xix. cicéron, 247, 252, 263, 323, 1070. claudé, *préf.* xxix. claudien, 105. clément d'alexandrie, 264. clémencet, 1536. cléomèdes, 341. cobilay, 418. colbert, 533, 537, 2168, 2664, *préf.* xx, xxx. confucius, 402. de courtanvaux, *préf.* xxxvii. c. f. stard, 277 287, 323, 402, 3590. *préf.* xxiv. czar pierre, *préf.* xij. David, *préf.* xxiv. de challes, 453. démocrite, 327, 333, 3246. délagulier, 3109. didyme, 314. dion, roi de sicile, *préf.* xv. diodore de sicile, 245 &c. 263, 284. 644. diogène laërce, 293, 290, 327 & *suiv.* doppelmayr, 434, 445 & *suiv.* 500. duhalde, *préf.* xxxiv. duhamel, 538, 818. dupuis, 1605. durant, 1536. Epicure, 3246. eusebe, 261, 302. d'évora, *préf.* xlv. Fabricius, 362, 3246. firmicus 619. de fontenelle, *préf.* v. 559, 599, 3247. françois I, *préf.* xxxj. Frédéric I, roi de prusse, *préf.* xxxviii. Frédéric II, *préf.* xxix. fréret, 277, 338, 401, 616, 1566, 1615 &c. fourmont, 640. Galien, *préf.* xxij. gaubil, 400, 420 & *suiv.* *préf.* xxj, xxx. gesner, 456. gibert, 1567 & *suiv.* &c. giraud, 1566. goguet, 319, 264, 277, 603, 611, 639, 1402,

1586 &c. golius, 384, 388, 1535. goujet, *préf.* xxxj. 451, 459, 517, 567. graham, 2462 &c. gravius, 382, 396 & *suiv.* 1402. gresham (*thomas*) *préf.* xxxij. de guignes, 400, 402, 640. Haak, 539, qui donna la première idée des assemblées philosophiques. hardouin, 1656. harriſon, 2462, 3967. henri de valois, 516. héraclides, 3246. d'herbelot, 379, 385 & *f.* hêrodote, 280, 294, 303, 319, 323, 641. hêſiode, 259, 321, *préf.* xxj. hipocrate, *préf.* xxij. hiſpalenſis (*joannes*) 384. homère, 247, 259, 311, 321, 640, *préf.* xxj. xvij. horace, *préf.* xxv. ho-ti, 408. huet, 641. hyde, 397, 1603. hyginus, 254, 324. Jablonski, 626. jamblicus, 264. jean V, roi de portugal. *préf.* xlvj. job, 611. *préf.* xxij. john ward, 548, 599. jonas moor, 569, 1437. joleph à coſta, 605. joleph, 244. *préf.* xxj, xxij. jules-céſar. *préf.* xxix. juſtin, 268. Lactance, 265. laſtriu, 605. la Fontaine, *préf.* xxvij. landgrave de caſſel. *préf.* xxxv. le miere, *préf.* xx. le paut, 2459, 2461. *préf.* l. le roy, 2162, 2465, 2626, 3967. *préf.* xix en note. louis XIV, 533, 2163. *préf.* xxx. louis XV. *préf.* xxx. lowndes, xxxij. lucain, 113, 143. lucas (*henri*) *préf.* xxxij. lucrèce, 3246. Macrobe, 271, 613, 641, 1538. mahomet, *préf.* xvij. mahomet II, *préf.* xxx. manilius, 16, 154, 254, 607, 1616. *préf.* xxj. marſham, 280, 326. marſigli. *préf.* xlv. martianus capella, 264. mercator, 3878. Montſaucon, 625. moor. (*joannes*) 569, 1437, 1822, 2323. moterri, 584 &c. la Nauze, 298, 615. le noble, 509. numa, 1538. Orphée, 3246. ovide, 62, 141, 644 & *suiv.* 1537 & *suiv.* 1610. *préf.* xxvj. Pallavicini, *préf.* xlv. pallu, 610. paſchius, 563. paſſemant, 2297, 2302 v. *préf.* pag. l. périclès, *préf.* xiv. petau, 1562, 1603, 251 en note. 296, 347, 358. platon, *préf.* xij. 264, 266, 640. pline, 243, 1501, 1720, 2626. perault, 547, 599. pluche, 312, 615, v. *préf.* v. plume (*thomas*) *préf.* xxxij. plutarque, 274, 632, 3168, 3246. pococke, 633. poiſſevin, 464. pompee, *préf.* xx. pope, *préf.* xxvij. pro-

lomée philadelphie, 344. ptolomée évergète, 349. puzynina, *préf.* xl. renaudot, 402. richelieu, *préf.* xx. roias, *préf.* xv. rouſſier, 1531. Salomon, *préf.* xxiv. ſaunaïſe, 641. ſaverien, 443, 494. ſavile (*henri*) *préf.* xxxij. ſcaliger, 254, 318, 392, 641, 1402, 1564, &c. ſams. ſchmidt, 621, 627. ſchultens, 1485. ſcrekenſchius, 370. ſénèque, 3010, 3118. ſévère, *préf.* xxix. ſextus empiricus, 271, 337. ſherburn, 506 & *suiv.* 540, 599. ſiſſon, 2328. ſixte IV, 434. ſolinus, 264, 1538. ſophocle, 249, 257. ſoucier, 400, *préf.* xxxiv. ſpirat, 539 en note. ſtay, 16 en note. ſtrabon, 298, 305, 634. Tannſtetter, 434. le taſſe, *préf.* xxvij. thémiftocle, *préf.* xx. thieuſt, 2282, 2461. tibere. *préf.* xxix. trapézuntius ou trébizonde, 370, 428. treſſan, 582. tſinchi-hoang, 403. Uranus, 245. Vluc-beg, *préf.* xxx. varron, 277, 1614. vignoles, 298. virgile, 16, 41, 247, 613, 663, 671 & *suiv.* 699, 1612, *préf.* xxvj. vitruve, 263, 337, 275, 1616. voltaire, *préf.* xvij. xxvij. wood, 425. voſſius, 250, 264, 329, 385, 435, 599, 640 &c. Ziegler, 736. zoroaſtre, 268.

AUZOUT, 522, 2309, 2349, 2636.

AXE, ligne autour de laquelle fe fait un mouvement. Axe du monde, ou axe de la terre, 14. Axe d'un cercle, 18. L'axe de la terre toujours parallèle à lui-même, 1095, 1109. Axe d'une lunette méridienne, 2389. Mouvement de l'axe d'un ſphéroïde, 3555. Axes de rotation, v. Rotation.

AZIMUT, 190. Différences d'azimut; 1889, 2124. Calcul de l'azimut, 1038. Parallaxe d'azimut, 1684, 1892. Tables d'azimut. v. la Connoiſſance des Mou. céleſtes pour 1762.

## B.

BABYLONE, 64, en note.

BAILY, 729, 1524, 2900 & *suiv.*

BALANCE, Conſtellation, 632, 653, 694, 774.

BALEINE, Conſtellation, 694, 780.

BASE de Villejuive à Juvify pour la meſure de la terre, 2642.

Kkkkk

Tome III.

Noms des Philoſophes, Hiſtoriciens, &c.

BASILISCUS, *Régulus*, 609, 757.  
BASSINS pour faire les lunettes, *catini*,  
v. art. 2257.

BELIER, 614, 626, 644, 760.

BELLFROPHON, 670.

BERALD, 446, 1741. v. *pref.* xlvj.

BERENICE, 674.

BERNOULLI (Daniel) 2195, 2265,

3412, 3591. J. Bernoulli, 3300,

3121, 3392, 3423.

BEROSE, Caldéen, 280 ans avant J. C.  
255.

BEVIS, 735, 1485, 2180 &c.

BIBLIOGRAPHIE astronomique, ou Catalogue de tous les livres d'Astronomie, publié par M. Weidler en 1755. Il n'y en a presque aucun de quelque importance que je n'aye cité dans cet ouvrage. v. le mot LIVRES.

BIBLIOTHEQUE, ou *Museum* d'Alexandrie, 344. v. les Dissertations sur ce *Museum*, par Gronovius & Néocorus, *thes. antiqu. Græc.* t. 8.

BONNE, 2216, 2241.

BOOTES, Bouvier,

BORÉAL ou septentrional. v. *Pôle*, *Latitude*, *Déclinaison*, *Hémisphère*.

BOSCOVICH, Jésuite Ragusien, célèbre par un grand nombre de beaux ouvrages (v. le *Journal des Savants*, Sept 1766) art. 16 dans la note 2195, 2253, 2271, 2381, 2691 & *suiv.* 2827, 3044, 3149, 3250, 3401, 3423, 3883, 3916 &c.

BOSSUT, 3345, 3513.

BOUC, 656, 673.

BOUGUER, 591, 2162, 2251, 2433, 2458, 2609, 2668, 2673, 3593.

BOULET de canon jeté en l'air, retombe au même lieu. 1075, 1090 & *suiv.* Vitresse d'un boulet, 1942.

BOULLIAUD, c'est ainsi qu'il écrivoit lui-même son nom, comme je le vois par l'exemplaire que j'ai de son *Astronomie philolaïque*, où il avoit mis quelques lignes de sa main en l'envoyant à un de ses amis; on écrit communément *Bouillaud*, 547, 843 &c.

BOUSSOLE, Constellation, 711. usage de la boussole 236. v. *AIMAN*.

BOUVIER, *Bootes*, 754.

BADLEY, 596, 1526, 2203 & *suiv.* 2880 & *suiv.* 2791, 3051.

BURIN du graveur, Constellation, 711.

C.

CADMUS, 678.

CADRANS solaires, manière de les construire, 3893.

DE LA CAILLE, astronome célèbre; 555, 711, 727 & *suiv.* 1652, 1740, 1821, 2162, 2176 & *suiv.* 2458, 2650, 2830, 3992 &c.

CALCUL astronomique, 3500. calcul de la longitude & latitude d'un astre, 898, 900. Calcul de l'équation séculaire, 1171. Calculs détaillés des parallaxes, 1674. Calcul de l'orbite d'une comète par trois observations, 3044 & *suiv.* Calculs des suites, 3285, des secondes différences arithmétiques, 3916. Calcul différentiel & intégral, 3294. Calcul de l'attraction, 3485. Calcul d'une observation de la lune, avec tous les détails, 3937. Calcul d'une opposition observée, 3950. On peut corriger des calculs par les secondes différences, 3923. Calcul des Logarithmes, 3911, des longitudes en mer, 3982.

CALDEENS, 242, 260, leurs observations, 1345, 1419 &c.

CALENDRIER, Distribution des années & des jours. Calendrier Julien, 1539, Grégorien, 1546; reçu chez les Protestans, 1548. Calendrier perpétuel, 1551. v. *Epoques*, *Années*, *Mois*.

CALER, disposer un quart de cercle verticalement, 2404.

CALIPPIQUE, 356, 1564.

CALLISTO, 661.

CAMÉLÉON, 710.

CAMÉLOPARD, v. *Giraffe*, 714.

CAMMARUS, 649.

CANCER, on le dit en François comme en Latin, quelquefois aussi l'on dit *Ecrevisse*, 629, 649, 758.

CANICULE, v. *CHIEN*.

CANOES, *καύωτες*, étoile du vaisseau, 708, p. 206 des tables.

CAPRICORNE, *Caper*, 634, 656, 777.

CARACTERES qui désignent les planètes & les signes du Zodiaque, 641, 643.

CARDINAUX (*poins*), 8.

CARNAEAS, 678.

CARRÉ de la grande Ourse, 7, 717, de Pégase, 763, d'Orion, 753.

CARTES célestes, 732, Cartes du Zo-

- diague ; 742. Carte de l'éclipse de 1764, 1942, du passage de Vénus, arrivé en 1769, 2093. Cartes Sélénographiques, 3169. Cartes Géographiques, 235, 3368. Cartes suivant la projection stéréographique, 3870, suivant la méthode de M. Buache, 3881, suivant M. Bonne, 3883. Cartes réduites, ou de Mercator, 3878.
- CASSINI ( Jean-Dominique ), 552, 1275, 1341, 1565, 1641, 1730 & *suiv.* 2168, 2189, 2190, 2282, 2993 &c. Jean-Jacques Cassini, son fils, 590, 1153, 1247, 1293, 1309, & *suiv.* César-François Cassini de Thury, son petit-fils, 590, 1368, &c. Jean-Dominique Cassini, son arrière-petit-fils, reçu à l'Académie en 1770, 590.
- CASSIOPEE, 667, 764.
- CASTOR, 609, 648.
- CATALOGUES des étoiles fixes, d'Hipparque, 354, 606, 717, d'Ulu-Beg, 397, de Tycho, 719, d'Hévélius, 532, de Flamsteed, 571, 724, de Halley, 585, de la Caille, 727, de M. le Monnier, 730, de Mayer, 731. Catalogues d'observations, la forme qu'on devoit leur donner, 3947.
- CATOPTRIQUE, 2284 *en note*.
- CAUSES finales, leur incertitude, 3249.
- CÉCROPS, 658.
- CELENO, 646.
- CENTAURE Chiron, 255, 655, 704.
- CENTRER une lunette, 2498.
- CÉPHÉE, Constellation, 666.
- CERBERE, Constellation, 714, 782.
- CERCLE, sa division en degrés, 24. Pole d'un cercle, 15. Axe d'un cercle, 18. Grand cercle, ou petit cercle, 19. *v. Liv. XXIII.* Les grands cercles passent par le centre de la sphère, 1107; on ne fait point usage des petits cercles dans la Trigonometrie. Cercles principaux de la sphère. *v. Horizon, Equateur, Méridien, Ecliptique, Colures, Tropiques, Sphère*, &c. parallèles, 27, cercles polaires, 140, cercles horaires, 93, cercles de déclinaison, 93, cercles de latitude, 96, 1046. leur situation dans une éclipse, 1846, cercles excentriques, 867, cercles d'entrée & de sortie, 2101, cercle d'Osymandias, 504, cercle azimutal, 2319.
- Quadrature du cercle, 3322.
- CERÈS, 652.
- CHALEUR. *v. Réfraction, Dilatation.*
- DE CHALIGNY, 1471 & *prés. ix.*
- CHAMP d'une lunette, 2287, d'un télescope, 242.
- CHANGEANTES, étoiles changeantes, 786 & *suiv.* changeante de la baleine, 794. Temps où devra paroître la changeante du cygne, 795.
- CHARRIOT de David, 7.
- CHESNE de Charles II, Constellation, 713, 715.
- CHEVAL, Constellation, 670, 671, 782.
- CHEVALET du Peintre, Constell. 711.
- CHEVELURE DE BERENICE, 674, 782.
- CHEVRE, CHEVREAUX, 609, 673, 759.
- Chevre amaltée, 656.
- CHIEN, grand chien, ou *Sirius*, 697 & *v. Sirius*. Petit chien, 700, 754; les chiens de chasse, 714, 782; Andromède ou *Canis*, 667.
- CHINOIS, leur Astronomie, 400. Ils ont donné aux planètes des noms analogues à leurs qualités sensibles, 640.
- CHIRON, 255, 655, 704.
- CHRONOLOGIE, 1530. Utilité de l'Astronomie dans la chronologie, *prés. xxj, xxiv.*
- CHUTE des graves, loi qu'elle observe, 3361. Un boulet retombe à peu-près au même point, d'où il étoit parti, 1075, 1090 & *suiv.*
- CICLES, *v. CYCLES.*
- CIEL, signifie en Astronomie l'assemblage des astres, quelquefois l'espace qu'ils occupent, & non point l'Empirée, ou le Ciel théologique. *v. Etoiles, Planètes. Cieux solides*, 1073.
- CIRCONPOLAIRES (Etoiles), leur usage, 31, 315, 2604.
- CLAIRAUT, 1441, 1460, 1478, 2303, 2669, 2805, 3115, 3430, 3579.
- CLIMATS, 132.
- COCHER, *Auriga*, Constellation, 673, 759.
- CŒUR DE CHARLES II, Constell. 719.
- COIBERT, 2168; sa mort est funeste pour les sciences, 2664; son zèle, *prés. xxx.*
- COLLEGE ROYAL DE FRANCE, Etablissement utile que célèbre, à qui l'Art. doit une partie de ses progrès, *prés. xxxj.* College de Gresham

- à Londres; collèges d'Oxford & de Cambridge, *préf.* xxxj.
- COLLIMATION** (*ligne de*) ligne de foi, c'est quelquefois l'axe optique de la lunette. Dans un quart de cercle à alidade c'est la ligne que l'on conçoit tirée du centre du quart de cercle au point de l'index qui marque la division,
- COLOMBE**, Constellation, 711, 714.
- COLORS** des équinoxes & des solstices; 102, 171.
- COMETES**, *Liv.* xix, leur définition, 3000, leur nombre, 3001, leur vitesse, 3005, 3018, 3029. Systèmes sur les comètes, 274, 3009. Comète de 109 jours, 3025. Déterminer l'orbite par trois observations, 3044. Table pour le calcul des comètes, 3052. Elémens de 59 comètes, 3089. La 60<sup>e</sup> dans les additions à la fin de ce volume. Du retour des comètes, 3091. Irrégularité des comètes, 3110. Attraction sur les comètes, 3114, 3508, leurs parallaxes, 3070, leur aberration, 2852, 3070. Instrument cométaire, 3119. Queues des comètes, 3117. Traité général des comètes annoncé par M. Pingré, 3119. Terre qui inspireroient les comètes, *préf.* xvij. Passages des Poètes sur les comètes, *ibid.*
- COMMENCEMENT** d'une éclipse, 1780.
- COMMUTATION**, angle formé au centre du soleil, entre le lieu de la terre & le lieu d'une planète réduit à l'écliptique, commutation dans le sens des anciens auteurs, 1142.
- COMPAS**, Constellation, 711. Calculs qui se font avec le compas, 1848, 2079, 2950, 3864.
- COMPLÉMENT & SUPPLÉMENT.** v. la note de l'art. 35. On appelle aussi quelquefois supplément ce qui manque pour aller à 360°; mais alors il faut en avertir, comme j'ai fait pour le *Supplément* du nœud de la lune, (v. les Tables, page 52).
- DE LA CONDAÏNE**, 2357, 2381, 2564, 2626, 2636 & *suiv.* 2668, 2673 & *suiv.*
- CONFIGURATION** des Satellites de Jupiter, 2987, de Saturne, 2994, *Planche XXXV.*
- CONJONCTION**, Retour des conjonctions des planètes, 1173, 2065. Utilité des conjonctions, 1201. Conjonction, ou nouvelle lune, 1400. Conjonctions moyennes, 1751. Règle pour trouver une conjonction par les épaques, 1755. Méthodes pour la trouver par les Tables, 1761, par l'observation d'une éclipse de soleil, 1980. Calculer une conjonction de Vénus au soleil, 2044. La trouver par observation, 2150, 2154. Conjonction de Vénus s'observe comme les oppositions des planètes supérieures, 3950. Distance à la conjonction apparente, 1975.
- CONIQUES** (*Sections*), 3254 & *suiv.*
- CONNOISSANCE des temps**, ouvrage que l'Académie publie chaque année, & que j'ai fait depuis 1760. art. 210, 3239.
- CONSTELLATIONS**, 602. Origine de leurs noms, 613. Origine des noms de celles du Zodiaque, 621, 626. Constell. dont on ne fait plus d'usage, 619. Constellations boréales, 660, méridionales, 710. Vers qui les désignent, 607. Constellations nommées par M. de la Caille, 711, 771. Méthode pour connoître les Constellations, 7, 745 & *suiv.* Différentes manières de les représenter, 738. v. *Carte*, *Globe*.
- CONVERSION** du temps en degrés, 512, 213, 2505, 3238.
- COPERNIC**, 437, 1070 &c.
- CORBEAU**, 703, 768.
- COSINUS**, 3600; changement de signes; 3605.
- COSMIQUE** (*lev. & couch.*) 1604.
- COSTARD**, hist. de l'Astronomie en anglois, 3591. *préf.* xxiv.
- COUCHER** des astres, 1014, 1026.
- COUPE**, Constellation, 702.
- COURBE** de réfraction, 2196. Courbes de la terre, 2686; courbe d'illumination, 1957; quadrature des courbes par approximation, 3501; courbe elliptique, 3254; parabolique, ou parabole, 3027, 3033, 3043, 32515; courbes paraboliques en général, 3311; courbe singulière dans les éclipses, 1963.
- COURONNE**, 677, 709, 771.
- COUSSINET** ou support, 2392.
- CREPUSCULE**, 108, 2260; abaissement



du cercle crépusculaire, 2261 ; durée du crépuscule, 2264 ; plus court crépuscule, 2265.

CRISTIANI, 2635.

CROIX, Constell. 711, 714, 715.

CROTON, 655.

CROWN-GLASS, verre à vitres de Londres, 2300.

CULMINATION, *Médiation*. v. *Passage au Méridien*, point culminant.

CURSEUR, fil mobile d'un micromètre, 2358, 2378.

CYCLE de meton, cycle lunaire, & nombre d'or, 1416, 1556 ; cycle solaire, 1550 ; cycle d'indiction, 1561.

CYGNE, Constellation, 762, 766.

CYNOSURA, nom de la petite Ourse, 663.

D.

D'ALEMBERT, 1441, 1460, 1475 & *suiv.* 2302, 2873, 3115, 3415, 3430, 3498, 3526, 3579.

DAUPHIN, Constell. boréale, 687, 778.

DÉCIMALES (*fraction*) leur usage pour les sinus, 3489, 3608.

DÉCLINAISON, 82, 853. Les cercles de déclinaison, (dans Flamsteed, *Declinationis linæ*) 93. Observer la déclinaison du soleil, 853. Trouver la déclinaison des astres, 910. v. *Ascension droite*, car ces deux choses vont presque toujours ensemble. Déclinaison d'un cadran, 3898. Déclinaison de l'aiman, 236.

DÉCOUVERTES singulières en Astronomie. v. *Loix de Képler*, *Auraction*, *Aberration*, *Parallaxe*, *Satellites*.

DÉFERENT, terme de l'ancienne Astr. qui signifie l'orbite d'une planète.

DÉGRÉ. Ce que c'est, 24. Mesure des degrés ou des angles, 26. Les degrés qui paroissent compris entre deux astres, sont appelés leur distance. v. *Distance*. Degré d'un sphéroïde, 2659. Degrés de la terre, 2633, 2672, 2691, 2698. Degrés de long, 2698.

DE L'ISLE, 481, 598, 1399, 1457, 1529, 1991. *pref.* xliij &c.

DÉMARCATIOn (ligne de) Riccioli, pag. 105.

DEMI-DURÉE d'une éclipse. v. *Durée*, *Eclipses*, *Passages de Venus*, *Satellites*.

DENSITÉS des planètes, 1397. Table des densités, 1398. Méthodes pour

trouver celles de la Terre, de Jupiter & de Saturne, 3403 ; pour celle de la lune, 3414. Densités de l'air, 2240, page 241 *des Tables*.

DERCIS, 659.

DESCARTES, 513, 2162.

DESCENSION oblique ; c'est la distance entre l'équinoxe & le point de l'équateur qui se couche en même temps qu'un astre ; c'est la somme ou la différence de l'ascension droite & de la différence ascensionnelle, 1026.

DEUCALION, 658.

DEVIATION du fil à plomb, 2695. *Dévi*ation des étoiles, v. *Nutation*.

DIAMÈTRE apparent ; ce que c'est en général, 1383. Diamètre vrai, 1385. Diamètre du soleil, 1386 & *suiv.* paroît devoir être diminué, 2159. Diamètre en ascension droite, 894, 1515, 3944 ; temps qu'il emploie à passer, 895, 1516. Diamètres apparents des planètes, 1391 & *suiv.* Diamètre de la lune, 1389, 1502 ; ne paroît pas diminué dans les éclipses, 1508. Son augment. à différentes hauteurs, 1510. Son rapport avec la parallaxe, 1711. Diamètre vrai de la lune, 1717. Diamètre de la terre, 1394. Différence des lunettes sur les diamètres, 1395. Diamètre du soleil soupçonné plus grand du nord au sud, 3166. Méthode pour le mesurer, 1388, 2528. Changemens du diamètre apparent du soleil, 1387. Table du diamètre du soleil, v. les *Tables*, pag. 40. Incertitude de 2'', 1388. Diamètres de Venus & de Mercure, 1391, 2156. Des étoiles fixes, 2786. Rapport du diamètre à la circonférence du cercle, 3322.

DIAPHRAGME, anneau de carton mis au foyer d'une lunette, 2287.

DICHOTOME, divisé en deux, 56.

DIFFÉRENCE. Différence ascensionnelle, 173, 1026, 1606. Différence d'ascension droite, 2136, 2351, 2518. Différence de déclinaison, 892, 2352, 2507. Calculs des *secondes différences* arithmétiques, 3915 & *suiv.* Equation qui en dépend, 3927. Différences de latitudes apparentes, 1976. Différence des méridiens, 20, 2494. Manière de la trouver par les éclipses de soleil ou d'étoile, 1970, par les

- Satellites ; 2494. Différence entre les toiles , 2637.
- DIFFÉRENTIEL** ( calcul ), 3294. Analogies différentielles pour les triangles sphériques , 3746 & *suiv.*
- DIFRACTION** , inflexion de la lumière aux approches des corps solides ; son effet est contraire à celui de la réfraction , 1386 , 2141 , 2490.
- DIGRESSION** , élongation ; la plus grande digression d'une planète inférieure par rapport au soleil , 1194. Son usage , 1286 , 1315. Eclat de Vénus vers ses digressions , 1199.
- DILATATION** des métaux par la chaleur 2462 , 2464 , 2640.
- DIMENSIONS** des planètes , 1398 , de la terre , 2676 , 2690 , des lunettes , 2290 , 2304 , des instrum. *v. liv. xiii.*
- DIMINUTION** de la lumière qui traverse l'atmosphère , 2257.
- DIONORE de Sicile** , Historien célèbre qui a beaucoup parlé de l'histoire de l'Astronomie , 245 , 263 , 276 &c.
- DIONE** , 659.
- DIOPTRIQUE** , 2284 , *en note.*
- DIRECTION** , terme d'Astrologie , 1054 , 1058. Direction de la pesanteur , 2657 , 2660 , 3579. Direction opposée à la rétrogradation , *v. Rétrogradation.*
- DISTANCES.** Les astronomes entendent par ce mot-là quelquefois une ligne droite , quelquefois un angle , 1113 ; mais les circonstances déterminent cette signification de manière qu'il n'y a jamais d'équivoque. Distance au zénit , 25. Distances mutuelles des principales étoiles , 785. *v. Hévelius , Flamsteed , Riccioli , T. I. pag. 426.* Distance apparente de la lune & des planètes au soleil. *v. Elongation* , 1142. Distances des planètes aux étoiles servent à trouver les longitudes des planètes , 914. Distance de l'équinoxe au soleil , n'est pas la distance du soleil à l'équinoxe , 991. Distances accourcies , 1139 , manière de les calculer , 1146. Comment on mesure les distances des planètes à la terre , 1150 , 1216. Distances de toutes les planètes au soleil , 1222 , 1746. Distances à la terre , 1308. Dist. ou rayon vecteur , 1234 , 1245 , 1250 , 1254. Distance absolue du soleil à la terre , 1746. Inégalité des distances de Mercure dans les passages sur le soleil , 2055. Distances de Vénus au bord du soleil , 2131. La plus courte distance , 2133 , 2135. Distances des Satellites , 2884 , 2997. Distances de la lune aux étoiles donnent la longitude en mer , 3975. Manière de les calculer , 3978 de les corriger , 3980 , de les observer , 3993.
- DIVISIONS** des instrumens d'Astronomie , 2334 , 2414 ; méthode pour les vérifier , 2552 , 2555 & *suiv.* 2562 & *suiv.*
- DOLLOND** , 2298 , 2437.
- DORADE** , Constellation , 710.
- DOUILLE** , cylindre concave de cuivre ; 2311.
- DRAGON** , Constellation , 665 , 765 , 784. Tête du Dragon , queue du dragon ou nœuds de la lune. *v. Nœuds.* Dragon ou serpent , 680 , 694.
- DRESSER** ou planer le limbe d'un quart-de-cercle , 2320.
- DUMAS** , 466 , *prés. ix.*
- DURÉE** d'une éclipse de lune , 1780 . de Satellite , 2930. *v. les Tables* , pag. 173 &c. Durée des révolutions planétaires , 1153.
- Du SÉJOUR** , 1923 , 1969 , 1992.

## E.

**E****CHELLES** pour les parallaxes , 1858 , 3993 , pour les longitudes , 3993. Echelle de Gunter est celle des logarithmes , *prés. xxxiiij.*

**ECHIDNA** , 701.

**ECLAIRER** les fils d'un instrument , 2305 , 2511.

**ECLIPSE** , 1750. On croit que Thalès en avoit prédit une , 301 , 322. Cause des éclipses , 1404. La plus ancienne éclipse de lune dont on ait l'observation , 1419. Manière de prédire les éclipses par la période de 18 ans , 1501. Trouver s'il y aura éclipse , 1759. Trouver le milieu d'une éclipse de lune , 1777 : le commencement , 1780 , la grandeur , 1785. Couleur de la lune dans les éclipses , 1789 , Eclipses où la lune a disparu , 1789. Observer une éclipse de lune , 2470.

**Eclipses de soleil**, 790. Eclipses prédites par Thalès, 323; usage des éclipses pour la Chronologie, *prés.* xxj, xxiv. Eclipses annulaires, 1790, 1794, 2490, totales, 1792. Combien il en arrive en un siècle, 1794. Méthodes pour les observer, 2490; quand commence une éclipse, 1801. Eclipses générales, 1806, se trouve par une opération graphique, 1811, 1848. Machine pour le calcul des éclipses, 1813. Quatre méthodes pour calculer rigoureusement une éclipse de soleil, 1868; quelle est la plus exacte, 1881. Calcul d'une éclipse pour tous les pays de la terre, 1930. Méthode analytique pour les calculer, 1923. Carte de l'éclipse de 1764, 1942. Eclipses prédites jusqu'à l'an 1900, art. 1794. Usage des éclipses de soleil pour trouver les longitudes géographiques, 1970. Différentes sortes d'éclipses des étoiles & des planètes, 1995. Eclipses des Satellites de Jupiter, 2493.

**ECLIPTIQUE**, 64. Obliquité de l'écliptique, 70. *v.* Obliquité. Déplacement de l'écliptique, 2737.

**ECREVISSE**, 629, 649, 758.

**ECRITURE SAINTE** n'est point contraire au système de Copernic, 1100, ni à la pluralité des mondes, 3247. Noms des Constellations qui y sont citées, 611. Passages de l'écriture relatifs à l'Astronomie, *prés.* xxij.

**EGLISE Romaine**, permet de soutenir le mouvement de la terre, 1162; s'occupe de la réformation du calendrier, 1545, *prés.* xx.

**EGYPTIENS**, leurs connoissances en Astronomie, 283; leur grande année, 296. Connurent le mouvement de Mercure & de Vénus autour du soleil, 300, 1065. L'Astronomie reparoit chez eux sous Ptolomée-Philadelphie, 344 & ses successeurs, 364. Origine égyptienne des signes du Zodiaque, 621; années égyptiennes, 1535.

**ELICIRA**, 646.

**ÉLÉMENTS** d'une planète; ce sont les huit articles principaux de sa théorie; sa longitude, celle de son aphélie, celle de son nœud pour un temps donné; les mouvemens annuels de

tous trois, l'excentricité & l'inclinaison. *v.* les noms de chaque planète. Trouver les trois principaux élémens, c'est à-dire, l'excentricité, l'aphélie & la longitude par le moyen de trois observations, 1288, 1293; élémens de l'orbite lunaire, 1480; élémens de la théorie des Satellites, 2972; élémens de 59 comètes, 3089; la 60<sup>e</sup> est dans les additions à la fin de ce volume.

**ELIX**, 661.

**ELLIPSE**, ses propriétés, *Liv.* xxi, 3254 & *suiv.* Ellipses que les planètes décrivent, 1234, 3423; ellipse de projection, qui représente le parallèle d'un pays, 1839; règle pour la décrire, 1842; effet de la réfraction sur les ellipses, 2246. Les étoiles paroissent décrire des ellipses par l'effet de l'aberration, 2826; ellipses que les Satellites paroissent décrire, 2927; ellipses des taches du soleil, 3139; du méridien lunaire, 3212.

**ELONGATION**, angle sous lequel nous voyons la distance d'une planète au soleil, cet angle étant réduit au plan de l'écliptique, 1142; manière de la calculer, *ib.*

**EMERSION**, *v.* Arc d'emersion, *Eclipse*, 1606, 1784, 1860, 2261.

**ENGONASIS**, 681.

**ENIF**, étoile de Pégase, 609.

**ÉPACTES** du Calendrier, 1570; épactes astronomiques, 1752; tables, *pag.* 99; épactes doublées, 1584; réunion des deux épactes, 1588; trouver l'épacte d'une année, 1591, défaut dans les épactes, 1589; épactes de mois, 1754.

**ÉPI** de la vierge, 609, 631, 767, *Talles*, *pag.* 212.

**EPICYCLES**, 867, 1444.

**ÉPITOME**, 495.

**ÉPOQUE** ou **ÈRE**, en chronologie, est la date ou le temps d'un événement célèbre. Époques de l'Histoire ancienne, 1595. Époque en Astronomie est la longitude moyenne d'une planète pour le commencement d'une année. Époque du soleil, 1282; époques des planètes, 1325 & *suiv.* Table des époques, 1330; méthode pour trouver l'époque, 1288, 1306; époques de siècles éloignés,

1327. M. Cassini compte une année de moins que les autres Chronologistes, 1330. Epôques des Satellites, 2913.
- EQUANT**, terme de l'ancienne Astronomie. C'est le cercle qui est placé de manière que le mouvement d'une planète soit uniforme autour du centre de ce cercle.
- EQUATEUR**, sa définition, 15; ses poles sont les poles de la terre ou les poles du monde, 14; ses parallèles, 27. Equateur terrestre; par où il passe, 44; sert à compter les latitudes, *ib.* Equateur solaire, 847, 3136; equateur lunaire, 388; son inclinaison, 3202.
- EQUATION**, quantité qu'on ajoute à la situation moyenne d'un astre pour avoir la situation vraie. *v. Inégalités.* Equation de l'orbite ou équation du centre, 857; ses propriétés, 1256. Trouver la plus grande équation par le calcul, 1257; par observation, 1259. Sa valeur pour chaque planète, 1278. Equation du midi ou des hauteurs correspondantes, 944; équation du temps, 967 & *suiv.* équations séculaires des planètes, 1163, 1484. (*v. les Tables*, pag. 47, 137, 152). équations de la lune, 1427 & *suiv.* équation annuelle, 1448, 3481. équations des Satellites, 2889; équations particulières à chacun, 2899; équation du 4<sup>e</sup>, 2904; équation du problème des trois corps, 3454; équation d'une orbite troublée, 3460; équations du mouvement de la terre produite par l'attraction, 3485. *v. les Tables* qui sont à la fin du premier volume.
- ÉQUERRE**, Constellation, 711.
- EQUINOXE**, égalité des jours & des nuits; jours des équinoxes, 66, 118; points des équinoxes, 67. Colure des équinoxes, 171. Observations des équinoxes, 882. Distance de l'équinoxe au soleil, ou passage du premier point du bélier au méridien, 991. Situations des équinoxes en divers siècles, 1615. *v. Précession.*
- EQUINOCTIAL (Cercle)**. *v. Equateur terrestre.*
- ERATOSTHENE**, 349, 2630.
- ÈRE vulgaire**, 1601.
- ERICHTON**, 673.
- ERIDAN**, Constellation, 695.
- ERIGONE**, 652.
- ERREURS**, possibles dans différentes observations, 883, 947, 3931, 1362; erreur du Calendrier, 1581; erreur possible sur la distance de la lune, 1719; erreur du mural de M. de la Hire, 1525; erreurs de quelques Astronomes, 957, 1283, 1511, 1518, 2539, 2871, 3562, *préf.* ix. erreurs populaires, *préf.* xvj, xvij.
- ETABLISSEMENT du port pour les marées**, 3597.
- ETALON**, mesure, 2636.
- ÉTÉ**, cette saison commence au solstice du Cancer. Quelle est la cause de la chaleur de l'été, 128. Le soleil est plus loin de nous en été qu'en hiver. *v. les diamètres du soleil*, pag. 40 des Tables.
- ETEROGENE**. *v. Homogène.*
- ETHER**, matière éthérée, 3513. C'est le fluide subtil qu'on peut imaginer dans l'immensité du ciel au-delà des bornes de notre atmosphère; il ne produit aucune résistance, 3383, 3514.
- ÉTOILES**, les anciens en comptoient 1022, art. 606. Immesité de leur nombre, 3249. 15 étoiles de la première grandeur, 608. Manière de les connoître, 750; leurs noms Arabes, 609. Étoiles nouvelles, 786; fameuse étoile de 1572, 792. Trouver la longitude des étoiles, 912. *v. Longitude, Catalogue.* Trouver l'ascension droite des étoiles, 877. Étoiles doubles ou singulières, 826. Levers & couchers des étoiles, 1013, 1601. Étoiles volantes, 2259. Diamètre des étoiles, 2786, étoiles cachées par la lune, 1990, par d'autres planètes, 1997. Étoile polaire. *v. Polaire.* Six espèces de mouvemens dans les étoiles, 2700. Leur latitude & leur longitude changent par un effet de l'attraction, 2741. Mouvement propre de quelques-unes, 2747. Théorie de leur parallaxe annuelle, 2758: elle est insensible, 2780; distance des étoiles, 2782. Étoiles informes sont celles qui ne sont pas comprises dans les Constellations qu'on a formées, 606, 714.
- ÉTOLEAU**, cheville de cuivre qui sert à arrêter

- arrêter une roue, ou une pièce d'instrument.
- ETYMOLOGIES grecques; on les trouvera jointes à chaque terme d'Astronomie.
- EUCLIDE, Géomètre qui vivoit environ 300 ans avant J. C.
- EULER, *Albert*, 2146, 3115.
- C. EULER, 2146.
- L. EULER leur pere, 849, 1441, 1477, 2195, 2295, 2308, 2727, 2830, 3300, 3498 &c.
- EVECTION, seconde inégalité de la lune, 1433; méthode pour la calculer, 1440, elle est variable, 1466. Idée de la cause, 3479. *v. les Tables*, pag. 61.
- EXCENTRICITÉS des orbites planétaires imaginées par les disciples de Pythagore, 859, déterminées par Hipparque, 353. Méthode pour trouver celle du soleil, 1209, celle de Mars, 1212. Excentricités de toutes les planètes, 222, de la Lune, 1480, du quatrième Satellite de Jupiter, 2905; elles doivent s'exprimer en secondes, 1242.
- F.
- FABLES relatives à l'ancienne Astronomie, 242 & *suiv.* 644 & *suiv.*
- FACULES du soleil, 3126.
- FAUCON, 685.
- FAUTES. *v. Erreurs.*
- FEMMES qui se sont distinguées dans l'Astronomie, 376, 583, 1942, *prés.* xl.
- FESTES mobiles, 1592.
- FEUX pour servir de signaux, 2647.
- FIGURES des Constellations. *v. Cartes.* Figure des orbites planétaires, 1234, 3423; figures des planètes, ou de leurs disques apparens, 3216; figure aplatie de la Terre, de Jupiter, de la Lune. *v. Apl. tissement, Sphéroïde, Lune, Jupiter.* La figure de la terre est elliptique si on la suppose homogène, 3582. Figures que l'on fait au compas avec exactitude; leur utilité, 1869. Servent à calculer les éclipses. *v. Opérations graphiques.*
- FIL horizontal, fil vertical d'un quart-de-cercle, temps que le Soleil met à les traverser, 897. Manière de tendre les fils du micromètre, 2375. Fil à plomb. *v. Suspension.* Manière d'éclaircir les fils, 2395, 2511. Parallaxe des fils, 2456, 2599.
- FIN d'une éclipse. *v. Eclipsé.* Son usage, 1988.
- FIRMAMENT, assemblage des étoiles fixes, ainsi appelé parce que les anciens les considéroient comme placées sur la dernière enveloppe céleste & comme formant le dernier rampart des cieux.
- FLAMSTEED, (on a quelquefois écrit *Flamstead*) astronome célèbre d'Angleterre, 569, 724, 732, 2323, &c.
- FLECHE, Constellation, 684.
- FLEXION des barres d'un instrument, 2597.
- FLEUR-DE-LYS, Constellation, 714.
- FLINT-GLASS, 2300.
- FLOT ou haute mer, 3590.
- FLUX & reflux de la mer, ses phénomènes, son explication 3590 & *suiv.*
- FOMAHANT, étoile de première grandeur, 707, 777. C'est ainsi que Tycho l'écrivit; Hévélius écrit *Fomahant*, d'autres *Fomahant*.
- FONTAINE, 2830, 3300.
- FONTENELLE, 599, 3247.
- FORCE centrale. *v. attraction.* Force accélératrice, 3368. Expression des forces, 3385; décomposition des forces, 3437. Force de la lune, 3413, 3576. Force de projection, 3418. Force centrifuge, 3391, 3420, 3589; elle est  $\frac{1}{149}$  de la pesanteur, 3395. Force des lunettes, 2286, des télescopes, 2423.
- FORMULES, expressions algébriques, dont on fait un usage fréquent, 891, 927, 3254 & *suiv.* *v. Différentiel, Triangles.*
- FOUCHY, 599, 1813, 2315, 2334, 2668, 2984.
- FOURNEAU, Constellation, 711.
- FRISI, 3422, 3526.
- FUSEAUX de globes, leur figure, 3887; Fuseau, constellation, 674.
- G.
- GALILÉE, 508, 1103, 2880, 3176.
- GANYMEDE, 658, 683.
- GARDE-FILET, 2314.
- GARDINER, 3904.

GASSENDI, 517, 2006, 2718.  
 GEMEAUX, constellation, 628, 648, 755.  
 GEMINUS, auteur contemporain de Cicéron, dont les élémens d'Astronomie ont été traduits par le P. Petau, 1608.  
 GEMMA, 677.  
 GENOU pour supporter un instrument, 2311, 2322.  
 LE GENTIL, 839, 1775, 2146, 2291.  
 GÉOGRAPHIE, sa définition, 47. Géographes célèbres, 3870, 3881, 3883, 3891, *note de la page 20.* Usage de l'Astronomie pour la Géographie, *v. la préface xvij.* Longitudes Géographiques, 47, 3966 & *suiv.* Cartes Géographiques, 3368.  
 GERBE de bled, 674.  
 GIRAFFE, constellation, 714.  
 GLOBE ARTIFICIEL, 100, 169. Les premiers globes qu'on ait eu, 736. Globes de M. de l'Isle, 737, de Coronelli, 736, de Vaugondy, de Denos, nouveaux globes plus exacts, *v. la préface p. l.* Usage du globe pour la Gnomonique, 3895, pour les éclipses 1814, pour les passages de Vénus, 2101. Manière d'en tracer les fuseaux, 3887.  
 GNOMONIQUE, principes de cette science, 3893. Auteurs qui en ont traité, 3898.  
 GNOMONS pour observer les hauteurs, 72, 322, 350, 554, 2281. Catalogue des plus fameux gnomons, 2281.  
 GRANDEURS des planètes. *v. Grossseurs.*  
 DE LA GRANGE. *v. préf.* 2981, 3185.  
 GRAPHIQUES, (*opérations*) qui se font avec de grandes figures, & tiennent lieu de calcul, 1848, 2079, 3864. Pour trouver les longitudes en mer, 3992.  
 GRECS, leurs premières connoissances en Astronomie, 249, 320 : ils sont instruits par les voyages de Platon & d'Eudoxe, 339. Leurs fables sur les constellations, 644.  
 GREENWICH, observatoire royal d'Angleterre, 569, 2323, *pref.* xxxvj. Sa position, *pag. 2* des tables. Sa figure, *Planche XVII.*  
 GROSSEUR ou volume d'une planète, 1396, de la terre, 2693. Table des grosseurs de chaque planète, 1398,

des Satellites, 2979. Combien grossissent les lunettes. *v. simplification.*  
 GRUE, constellation, 710.  
 GUALTHERUS, c'est le nom que Longomontanus donne à Waltherus, 432.  
 GUERIN, 3922, *pref.* x.  
 GUILLAUME Landgrave de Hesse, Prince fameux dans l'Astronomie, non seulement comme protecteur, mais encore comme savant, 462, 471, *préface xxxv.*

H.

HALEY, 585, 3022, 1526, 3092, 3879, 3880, 3972.  
 HARPOCRATE, 628.  
 HAUTEUR d'un astre, 22. Manière de la mesurer, 23, de la trouver sur le globe, 200, de la calculer, 1034, d'en conclure l'heure qu'il est, 960, 1030. Hauteurs méridiennes, 2581. Changement de la hauteur méridienne dans un petit intervalle, 2572. Hauteur du pôle, 33, de l'équateur, 35. *v. la table des hauteurs du pôle pour différentes villes, page 1* des tables. Hauteur de la lune en mer donne la longitude du lieu, 3996. Hauteurs correspondantes, 920, 2578, servent à trouver le temps vrai, 960, leur équation, 944. leurs usages, 2580. Corrections qu'il faut faire dans certains cas à des hauteurs, 2567 & *suiv.* Hauteur du nonagéisme, 1660. Hauteur de l'atmosphère, 2190, 2218. Hauteur des montagnes, 2695.  
 HÉBREUX, noms héb. des étoiles, 611.  
 HÉLIAQUE, 687.  
 HELL, 1752, 2494.  
 HÉLICE, 661.  
 HÉLIOCENTRIQUE, 1138.  
 HÉLIOMÈTRE, 2433.  
 HÉLIOSCOPE, 2476, 2478.  
 HÉLIOSTATE, 2469.  
 HÉMISPÈRE, moitié du globe; oriental ou occidental, 19; supérieur ou inférieur, 11; lumineux ou obscur, 1406; visible & invisible, *ib.* boréal ou austral, 44.  
 HERCULE, 681.  
 HÉRODOTE, né 482 ans avant J. C. il nous reste 9 livres de son histoire, 323, &c.

HESPER; nom de Vénus lorsqu'elle brille le soir, 1194.

HÉTÉROGÉNÉITÉ de la terre, 3576, 3579.

HÉTÉROSCIENS, 144.

HEURES, 950, 1531. Astron. & civiles, 751. Planétaires, 1531, des Babyloniens, des Juifs, des Italiens, 1532. Trouver l'heure qu'il est dans tous les pays du monde, 204, 223; heure du lever du soleil, 175; heures du premier mobile, 979; heures solaires moyennes, 211, 977, 979; leur différence, 981; heure d'une observation. *v. Temps vrai*. Trouver l'heure par la hauteur d'un astre, 1030, par le moyen des étoiles circompolaires, 1049.

HÉVELIUS, célèbre observateur, 531, 714.

HADES, 647.

HIDRE, 701, 710.

HIDROSTATIQUE, ses loix servent à trouver la figure de la terre, 3579.

HYPOTHÈSE, 1103. Hypothèse de Ptolémée, 867, 1068. L'Eglise permet le système de Copernic comme hypothèse, 1103. Hypothèse elliptique simple, 1252, 1309; corrigée par M. Halley, 1255. Hypothèses de réfractions, 2191, 2209. Hypothèse pour la figure de la terre, 2683.

HIPPARQUE, le plus habile des anciens Astronomes, 351, &c.

DE LA HIRE, *v. préf.* xli, 480, 574, 1294, 2663.

HIPPOLYTE, 673.

HISTOIRE de l'Astronomie, 240, & *suiv.* *v. le Livre II* tout entier.

HOMÈRE (vivoit 900 ans avant J. C.) 321.

HOMOGÈNE, & HÉTÉROGÈNE. *v. la note de l'art.* 3579. La terre ne paroît pas homogène, 3576, 3589, 3591.

DE L'HÔPITAL, 3250.

HORAIRE. *v. Angle horaire, Cercle horaire, Mouvement horaire.*

HORIZON, 11. Horizon sensible, 12; rationel ou mathématique, *ib.* Poles de l'horizon, 18. Horizon apparent marqué par une tangente à la terre, 1624.

HORLOGES astronomiques, appellées improprement des pendules, 542; manière de les régler, 955, 2505.

Horloges anciennes, 2460. Calibre d'une horloge astronomique, 2461; des horloges marines, 3968. Exactitude des horloges, 2465.

*Horloge*, constellation, 711.

HOROCCLUS ou HORROKES, 505, 569, 1435.

HOROSCOPE, 1054.

HORUS, 628.

HUYGENS. Il est appelé *Hugenius* dans tous les ouvrages: on trouve tantôt *Huygens*, tantôt *Hughens* dans la table des Transactions philosophiques, *Huygens* dans l'Histoire céleste, *Huyghens* dans les Œuvres de M. Bernoulli, *Haguens* dans plusieurs endroits des Mémoires de l'Académie & des Tables, *Huyghens* dans la Table des Mémoires de l'Académie imprimée en Hollande en 1741; cependant Bayle écrit *Huygens*, en faisant un article exprès pour cette famille, & je m'en suis tenu à son autorité, 541, 2162, 2347, 2658, 2993, 3247.

HYPOTHÈSE. *v. Hypothèse.*

## I.

ICARE, 675.

ICETAS, *v. Nicetas.*

IMMERSIONS & émerf. 1784, 1861, 2493.

INCLINAISONS des orbites planétaires, 1116, 1355. Méthodes pour les déterminer, 1357. Table des inclinaisons, 1376. *Inclinaison* signifie quelquefois la latitude héliocentrique, 1123. Changement des inclinaisons, 1376. *Inclinaison* de l'orbite lunaire, 1490. *Inclinaison* apparente, 1974. *Inclinaison* des Satellites, 2921, 2941, 2951, 2972. Changement des inclinaisons, 2941; cause de ces variations, 2943; découverte de la cause, 2944. *Inclinaison* des axes de rotation ou des équateurs; du soleil, 3150, de la lune, 3202, 3204, des planètes, 3219, de l'anneau de Saturne, 3237. *Inclin.* des comètes, 3064; *inclin.* d'un cadran, 3897.

INDICTION, 1561.

INDIEN, constellation, 710.

INÉGALITÉS. *v. Equation.* Première inégalité, 1202. Inégalités de la lune, 1423, 3468. *v. Lune.* Inégalités des

Satellites, 2883. Inégalités que cause l'attraction, 3430 & *suiv.*  
 INFINIMENT PETITS, 3294.  
 INFLEXION des rayons solaires, de 4"  $\frac{1}{2}$  1386, 1992. *v. Diffraction.*  
 INFORMES, étoiles qui ne sont point renfermées dans les constellations, 606, 714.  
 INSTRUMENS d'Astronomie. Liv. XIII. Instrumens des anciens, 2274. Instrumens d'Hévélius, 2280; de Tycho, 2279; des Arabes, 2279. Usage des instrumens, *Tom. III. Livre XIV.* Instrument des passages ou lunette méridienne, 2387, 2613. L'art de faire les instrumens sera décrit, 2469. Instrumens pour observer sur mer, 2458, 3976. Prix des instrumens, *prés. xlix.* Instrumens pour les éclipses, 1813, pour les comètes, 3107, 3110 pour les configurations des Satellites, 2987, 2994 pour le mouvement de la terre, 1112.  
 INTÉGRAL (Calcul), 3300. Nécessité de ce calcul pour trouver l'effet des attractions 3445.  
 INTERCALAIRE, 476, 1547.  
 INTERPOLATIONS, 3916 & *suiv.*  
 INVENTION du Zodiaque, 60. *v. Découvertes.*  
 IO, 645.  
 IRRADIATION, 1386, 1395. C'est l'extension apparente des objets lumineux par le trop grand éclat de lumière, 1991, 2141, 2490.  
 ISIS, 631, 645, 652.  
 IXION 681.  
 JARDINIER de Vezille, nommé Eléazar Feronce, observateur rustique, mais intelligent, qui mérita d'être cité par Boulliaud, &c. 512.  
 JASIDES, 666.  
 JASION, 648.  
 JEURAT, 1321, 2279, 2779, 3343.  
 JOVILABE, instrument pour trouver les configurations des Satellites, 573, 2987.  
 JOUR astronomique & jour civil, 751. Jour que l'on ôte des époques des bissextiles, 2974.  
 JOURDAIN, constellation, 714.  
 JUGLANS, 691.  
 JUGUM, 653.  
 JUPITER. Son aphélie, 1321, son aplatissement, 2910, 3221; son attrac-

tion sur la terre, 3430 & *suiv.* les bandes, 3222; sa densité, 1398; son diamètre, 1393; sa distance, 1222, 1398; les époques, (*T. II. p. 110*); son équation & son excentricité, 1222, 1272, 1278; son équation séculaire, 1169, Tables, *pag.* 137, 138; sa grosseur, 1398; son inclination, 1372, 1376; inégalités qu'il éprouve par Saturne, 1273, 1274, 1322, *pag.* 141 & 148 *des Tables*; son mouvement, 1160, 1170 (*T. II. p. 100*); son nœud, 1343, 1347; sa rotation, 3220; observations de Jupiter (*T. II. p. 172*). *v. les Tables, pag.* 136.

JUPITER Ammon, 644.

JUSAN ou basse mer, 3590.

JXION, 709.

K.

KÉPLER, Astronome célèbre, 492; ses ouvrages, 455; ses découvertes, 1205, &c. Elles sont citées presque à chaque instant, dans toutes les parties de cet ouvrage. Problème de Képler, 1237. Loix de Képler, 1224, 1226, 2887, 3038. Hypothèse de Képler, 1247. Combien elle est préférable à celle de Wardus, 1309.

KIRCH, astronome d'Allemagne, 563, 838, son fils & ses filles, 583.

KIRCHER, Jéuite, 625, 1162.

L.

LA CAILLE, 595, 727, 1711, 2162; 2455, 2650, 2830, 3992 &c.

LACTÉE (voie), partie blanche du firmament, 832 & *suiv.*

LAMPADIAS. *v. Aldébaran*, 609.

LAOCOON, 678.

LATITUDES géographiques, 43, 44; *v. Hauteur du pôle.* Latitudes des astres, 87, 55. Cercles de latitude, *ib.* Latitudes géocentriques & héliocentriques, 1123, 1138. Manière de les calculer, 1109, 1145. Latitude de la lune, 1495. *v. les Tables, pag.* 73. Changement des étoiles en latitude, 2739. *v. Longitude*; car ces deux choses vont toujours ensemble. Latitudes croissantes en mer, 3879.



**LEPAUTE** (Madame) 1942, M. Lepaute, 2459, 2461, 2462. *v.* aussi la préface, pag. 1.

**LETTRÉS Dominicales**, 1551. Manière de les trouver, 1552.

**LEVER** du soleil, se trouve par le moyen d'un globe, 175. Lever d'un astre, 210. Méthode pour le calculer, 1013. Difficulté pour la lune, 1022. Effet de la réfraction, 1028. Lever héliaque, 218, 687 & *suiv.* 1604 & *suiv.* Lever cosmique ou acronyque, 1607.

**LEZARD**, Constellation, 714. Cap Léopard, sa situation, 3892.

**LIBRATION**. Les anciens donnoient ce nom à un mouvement alternatif de la neuvième & de la dixième sphère par lequel ils expliquoient certaines inégalités. *v.* *Clavius*, &c. Aujourd'hui il s'applique seulement aux inégalités sélénographiques, 3174. Explication de la libration de la lune, 3187 & *suiv.*

**LICORNE**, Constellation, 714.

**LIEU** d'une planète. *v.* *Longitude*.

**LIEUES** de France de 25 au degré ou de 283 toises. 41, 1394, 2652.

**LIEUES** marines de 20 au degré, 3999.

**LIEVRE**, Constellation, 696.

**LIGNE équinoxiale**, 44.

**LIGNE** DE FOY, ligne qui va du centre de l'alidade au point qui marque la division.

**LIMITES** des éclipses, 1770. Limite d'une orbite planétaire; c'est le point de la plus grande latitude. Limites des erreurs de différentes observations, 883, 947, 1362, 3931. Limiter ou corriger des observations, 3923.

**LION**, Constellation, 630, 651, 757. Petit lion, 714.

**L'ISLE** (M. de) *v.* *De l'Isle*.

**LIVRES** d'Astronomie; les plus utiles sont ceux de Ptolomée, Képler, Longomontanus, Tycho, Hévélius, Scheiner, Horoccius, Street, Mouton, Riccioli, Boulliaud, Flamsteed, Halley, Grégori, Whiston, Keill, Wing, Leadbetter, Cassini pere & fils, le Monnier, de l'Isle, de la Caille, Bouguer, de la Condamine, Boscovich, Long, Ximenez, Ferguson, Tobie Mayer, Weidler, d'Alembert, Clairaut, Euler, Mau-

pertuis, Pézenas, Bailly; ils sont cités avec beaucoup d'autres dans les différentes parties de cet ouvrage. *v.* la Bibliographie de Weidler, & le Catalogue que j'ai donné dans la Connoissance des Mouvements célestes de 1766, & de 1767. *v.* aussi *Tables d'Astronomie*.

**LOGARITHMES**. Leur inventeur, 496, 3902. Leur nature, 3900. Tables qu'on en a faites, 3903: leur usage, 3911. Petite édition que j'ai procurée, 1889, 3903. Logarithmes logarithmiques, 3911.

**LOIX** du mouvement, 1231, 3438. **LOIX** de Képler, 1224, 1226. Loi de l'attraction, 3396.

**LONGITUDES** du soleil, 76, des astres, 94. Raisons de compter par longitudes, 98. Méthode pour observer la longitude du soleil, 835, 858, celle d'une étoile, 900, celle de la lune, 3937, celle de Vénus sur le soleil, 2125. Trouver la longitude géocentrique, 1142. Parallaxe de longitude, 1664, 1876, 2083. Aberration en longitude, 2816. Nutation en longitude, 2863. Longitudes des taches, 3144, 3190. Longitudes sélénographiques des taches de la lune, 3208. Mesure des degrés de longitudes sur la terre, 2698. Longitudes terrestres ou géographiques, 47; d'où elles se comptent, 43, 3891; elles se trouvent par les angles horaires, 1012, se calculent par les éclipses de soleil, 3175. Table des longitudes des Villes. *v.* la Table I. Prix proposé pour les longitudes, 3966. Méthode pour trouver les longitudes en mer par les montres marines, 3967, par le moyen de la lune, 54, 3966 & *suiv.* par la distance de la lune à une étoile, 3978, par la hauteur de la lune, 3996. Avantages de la première de ces deux méthodes, 3977.

**LONGOMONTANUS**, 509.

**LOXODROMIE**, 3880.

**LOUP**, Constellation, 705.

**LUMIERE** des planètes, 600, leur irradiation. 1386, 1991, 2141, 2450. *v.* *Diffraction*, *Irradiation*. Lumière de la lune, 1413. Lumière cendrée, 1412. Lumière zodiacale, 845. Courbe que décrit un rayon de lumière,

2196. Vitesse de la lumière, 2806, la propagation successive, 2798, 2895; équation de la lumière, 2806, 2897.
- LUNAISON**, révolution synodique de la lune, 1403.
- LUNE**, 1400; son apogée, 1429; son accélération, 1433. (*v. les Tables*, pag. 47); son allongement, 3186; son aplatissement, 1818, 3183; son attraction sur le sphéroïde, 2576; sa densité, 1717, 3414; son diamètre, 1503, 1717; sa distance, 1718; ses éclipses, 1404; grandes équations, 1423; petites équations, 1454; éléments de la lune suivant différens auteurs, 1480; excentricité, 1480; figures ou cartes de la lune, 3170; force de la lune, 3413, 3575, 3576; grandeur apparente de la lune à l'horizon, 1512; grosseur réelle de la lune, 1717; ses habitans, 3246; son inclinaison, 1490; ses inégalités, 1423, 3468; sa latitude, 1495; sa libration, 3174; sa lumière, 1414; sa masse, 1717, 3413; ses mers & ses montagnes, 3214; son mouvement horaire, 1519; ses nœuds, 1486, 3524; observations de la lune, 588, 1523; partie éclairée, 1408; parallaxe, 1657, 1711, 3388; phases, 1400; révolution, 1415, 1421, 1481; quadratures, 1495; rotation, 3208; sélénographie, 1683; syzygies, 1400, 1433. *Tables de la lune*, 1475. *v. les Tables*, pag. 47. Taches de la lune, 3165. Théorie de la lune par Tycho, 1442, par Newton, 1454. Usages des mouvemens de la lune pour avoir les longitudes en mer, 3966 & *suiv.*
- LUNE** ou *lunaison* prend son nom du mois de l'année où elle finit. Art de vérif. les dates, p. xxij. Connoissance des temps. 1773.
- LUNETTES**, 2284; leurs ouvertures, 2290. Lunettes achromatiques, 2298. Tuyaux des lunettes, 2473. Support des lunettes, 2495; leur application aux quarts de cercles, 561, 2310. Effet de la différence des lunettes, 1395, 2472, 2494, 2983. Lunette méridienne, 2387, 2600; ses usages, 2613. Lunette parallatique, 2400, 2618. Prix des lunettes, *v.*
- la fin de la préface*, p. xlix.
- LUNETTE d'épreuve**, 2503, 2555, 2569, 2595.
- LYCAON**, 675.
- LYON**, *v. Lion*.
- LYONS** (M.) ses tables, 3989.
- LYRE**, Constellation, 684, 776. Belle étoile, 609.
- LYNX**, Constellation, 714.
- M.
- M**ACERIS, nom d'Hercule, 681.
- MACHINE** parallatique, 2400, 2618. Machine pour calculer les éclipses de soleil, 1813; pour représenter le mouvement de la terre, 1112; pour éclairer les fils, 2395. *v. Instrumens*.
- Machine pneumatique**, Constellation méridionale, 711.
- MAC-LAURIN**, 2490, 3400, 3579.
- MAIA**, 646.
- DE MAIRAN**, 599, 837, 849, 2636 & *suiv.* 3119.
- MAISONS**; division du ciel en douze maisons, 1054.
- MALLET**, *v. préf.* x. 2146.
- MANFREDI**, 582, 2779.
- MANILIUS**, 607, 2281.
- MANUSCRITS** intéressans pour l'Astronomie, 462, 480, 498, 554.
- MAPPEMONDES** & leur construction par la projection, 3870.
- J. P. MARALDI**, 578, 3233.
- D. MARALDI**, 578, 2895 & *suiv.* 2942; 3086, 3242.
- MARÉES**, *v. Flux & reflux de la mer*.
- MARINE**, son utilité, *préf.* xx.
- MARS**, son aphélie, 1319; sa densité, 1398; son diamètre, 1392; sa distance, 1222, 1398; les époques, (T. II. p. 110); équation & excentricité, 1212, 1222, 1271, 1278; grosseur, 1398; inclinaison, 1370, 1376; son mouvement, 1161 (T. II. p. 110); son nœud, 1341, 1347; sa figure & ses taches, 3220. Ouvrage fameux de K'pler sur la théorie de Mars, 1206. Extrait de cet ouvrage, 1215. Observations de Mars, (T. II. p. 170). *Tables de Mars*, p. 124.
- MARSHAM** (Jean), savant Chronologiste Anglois; son ouvrage est intitulé, *Canon Chronicus*; il fut imprimé à Londres en 1672. On y trouve l'é-

- claircissement de beaucoup de questions difficiles dans l'histoire obscure de l'antiquité, & particulièrement dans celle des Egyptiens. Il est cité dans les articles 280, 285, 326, &c.
- MASKELYNE**, 1640, 2678, 3982 3986.
- MASSE** d'une planète: quantité de matière; se distingue de la grosseur ou du volume, 1399, 3408; masses des planètes, 1308; de la lune, 3413.
- Méthode pour trouver les masses, 3403, 3412.
- MAUPERTUIS**, 592, 824, 838, 849, 1682, 2669, 2675.
- MAYER**, sa théorie de la lune, 594, 1441 & *suiv.* 3173, 3188.
- MÉCANIQUE**, principes de mécanique, 1231, 3438.
- MÉDECINE**, usage de l'Astronomie pour cette science, *prés.* xxij.
- MÉDIATION**, *culmination* ou passage au méridien, *v.* *Passage*.
- MÉDITERRANÉE**, son étendue mal connue autrefois, *prés.* p. xvij.
- MÉLICERTE**, 681.
- MÉNALIPPE**, 670.
- MENDÈS**, 634.
- MER**, flux & reflux de la mer, 3383, 3412.
- MERCURE**, son aphélie, 1286, 1315; sa densité, 1398; son diamètre, 1391; ses plus gr. digressions, 1269; sa distance, 1222, 1398; ses époques, (Liv. vi. p. 110); son équation & son excentricité, 1222, 1269, 1278; sa grosseur, 1398; son inclinaison, 1366, 1376; son mouvement, 1161, (Liv. vi. p. 110). ses nœuds, 1337, 1347; sa figure, ses phases, 3216; difficulté de l'observer, 1154, 1260, 1315. Méthode pour déterminer les éléments de son orbite, 1303. Observations de Mercure (Liv. vi. p. 164) sa table d'équation exige d'être corrigée par les secondes différences, 3929. *v.* *Passages sur le soleil.* *v.* aussi les tables p. 100. Mercure ou Persée, 669.
- MÉRIDIEN**. Son étymologie & sa définition, 19. Différences des méridiens ou différences de longitude, 20. Manière de les trouver par les éclipses de soleil, 1970. Premier méridien, 48, 3891. Passage au méridien. *v.* *Passage*. Temps que le soleil & la lune emploient à traverser le méridien, 895, 1516. Méridien universel dans les éclipses, 1829, 2104. Méridien lunaire, 3208.
- MÉRIDIENNE**, 155. Tracer une ligne méridienne, 160. Méridienne filaire, 2579. *v.* *Gnomons*. Catalogue des plus célèbres méridiennes, 2281. Méridienne de la France, 2664.
- MÉROPE**, 646.
- MESSIER**, a beaucoup observé les comètes, & les a découverts plusieurs fois, 3090, 3002: il a observé aussi beaucoup de nébuleuses, & a donné un Mémoire à l'Académie sur cette matière. 1529, 1741, 2983, 3002.
- MESURE** des angles, 26; des degrés de la terre, 2633, 2651. Mesure du temps, 210, 959. Mesure universelle proposée par les Astronomes, 2634. Du pied de Paris, *note de la pag.* 18; mesures des principales villes de l'Europe, 2639.
- MICROMETRE**, 2346, 2357, 2362, 2366. Micromètre objectif, 2381. Trouver la valeur des parties du micromètre, 2525. Ses vérifications & ses usages, 2519 & *suiv.*
- MICROSCOPE**, Constellation, 711.
- MIDI**, équation du midi, (Liv. iv. p. 412).
- MILIEU DU CIEL**, 1011. Milieu d'une éclipse, 1777. Milieu de l'éclipse au lever du soleil, 1957. Milieu d'un passage de Vénus, 2052. Milieu entre plusieurs inégalités, ou entre plusieurs observations, 3931, 3932.
- MINAUTAURE**, 655, 704.
- MIROIR** concave, 2408.
- MOBILE**. Premier mobile; c'est le mouvement diurne, avec tout ce qui en dépend; second mobile comprend les orbites planétaires suivant le langage de Tycho, 1086. *v.* *Mouvement*, *Tables*.
- MOCHOS**, 653.
- MOIS** synodique ou lunaire, 1403; 1418, 1421. Mois périodique, 1418. Mois égyptiens, 1598. Mois romains, 1538.
- MONDES**, pluralité des mondes, 543, 3246.
- LE MONNIER**, 730, 1527, 2226 & *suiv.* 2669, 2749, 3975, 3996.
- MONOCEROS**, Licorne, Constel. 714.

- MONT-MENALE, Constellation , 714.  
 MONTAGNE de la Table , Constellation , 711. Hauteurs des montagnes , 2695. Attraction des montagnes , 2695. Montagnes de la lune , 3214.  
 MONTUCLA , 3286, 3321, 3376.  
 MOUCHE, Constellation , 710.  
 MOUFON, 528, 2634, 2921.  
 MOUVEMENT, diurne; c'est le premier de tous les phénomènes qui se présentent à observer, *art. 1, & suiv.* sa vitesse, 2812. Mouvement annuel, ou mouvement propre, 59. Mouvement du soleil en ascension droite, 890. Mouvement apparent des étoiles en longitude, 917. Mouvement de la terre, 1090. *v. Terre.* Explication des phénomènes du mouvement diurne, 1105. Mouvement annuel du soleil, 1106. Mouvement annuel des planètes, 1162. Loix du mouvement en général, 1231, 3438. Mouvement elliptique des planètes, 1234, 3423. Mouvement relatif dans les éclipses, 1765, dans les passages de Vénus, 2052, 2057. Mouvement apparent, 1974. Mouvement horaire de la lune, 1519, 3928. *v. les Tables, p. 83.* Mouvement parallatique des instrumens, 2325. Six espèces de mouvemens dans les étoiles, 2700. *v. Etoiles.* Mouvement des Satellites. *v. Satellites.* Mouvement du nœud de l'équateur lunaire, 3205. Mouvement des apsidés, 1310, 3509. Mouvement des nœuds des planètes, 1332, 3515, des nœuds de la lune, 3524. Mouvement de l'axe de la terre, 3555.  
 MOYEN. Temps moyen. 962, 972; on l'appelle quelquefois temps vrai. Lieu moyen ou longitude moyenne, 857, par opposition au lieu apparent ou lieu vrai. Mouvement moyen des planètes, 1162.  
 MURAL, 2328. M. Bird en a fait 3 de 8 pieds, 2333. Vérifications d'un mural, 2590. Prix d'un mural, *v. la préface xlix.*  
 MUSÆUM ou Bibliothèque d'Alexandrie 344.  
 N.  
 NADIR, point opposé au Zénit, 9. *v. Zénit.*  
 NABONASSAR (Ere de), 1597.  
 NAVIGATION des Phéniciens, 318, des Juifs, 319. Utilité de la navigation pour un état, & de l'Astronomie pour la navigation, 3966. *v. la préf. xxv.* Cartes de navigation, 3878.  
 NAVIRE, Constellation, 708.  
 NÉBULEUSES, 606, 650, 835. M. de la Caille a observé 42 nébuleuses, 841.  
 NEOMENIE, nouvelle lune, 1401.  
 NEPA, 654.  
 NEFER, 496.  
 NEPTIS, 636.  
 NEREUS, 666.  
 NEROS, période, 1566.  
 NESSUS, 681.  
 NEWTON, 576, 1456, 2162, 2402; 3381 &c.  
 NICETAS, 334, 1070, 3246.  
 NIL ou Lion, 630.  
 NIVEAU, instrument d'Astronomie; 2397, 2404; ses usages, 2592, 2615. Niveau des eaux de la mer, 2659, 3579 Réfraction au niveau de la mer, 2235. Abaissement du niveau vrai, 2654. Niveau, Constellation, 711.  
 NŒUDS des planètes, 1122, 1136, 1332. Méthodes pour trouver le lieu du nœud d'une planète, 1332. Application à toutes les planètes, 1337 & *suiv.* Mouvement des nœuds, 1347 3518. Dans quel cas ce mouvement est direct, 1349. Inégalité de ce mouvement, 1354. Nœuds de la lune, 1486: on les appelle tête du dragon, queue du dragon, 1486; leur révolution, 1487, 1489; leur inégalité, 1492; leur mouvement par l'attraction, 3524. Nœuds de l'équateur solaire, 3162; de l'équateur lunaire, 3217; de l'anneau de Saturne, 3233.  
 NONAGÉSIME, 1660, 1675. Usage du nonagésime pour les éclipses, 1876. Nombre d'or, 1556.  
 NONIUS ou Nonnius, 457. Division qui porte son nom, 2342.  
 NUAGE, Constellation, 710, 711, 842.  
 NUÉES DE MAGELLAN, blancheurs semblables à la voie lactée, 842.  
 NUTATION, mouvement de l'axe de la terre qui produit un mouvement apparent dans les étoiles, 2853. Histoire de cette découverte, 2855. Phénomène

nomène de la nutation, 2857. Nutation en longitude, 2863; en ascension droite, 2864; en déclinaison, 2866. Calcul des effets de la nutation, 2861. Nutation dans l'ellipse, 2873. Calcul de la nutation par l'attraction de la lune, 3559.

## O.

**OBLIQUITÉ** de l'écliptique, ou angle de l'écliptique avec l'équateur, 70, 381. Grand nombre de faits qui prouvent la diminution, 2717 & *suiv.* Quelle étoit la quantité moyenne en 1750, 2726. Cause de la diminution, 2733. Quantité de ce changement, 2743. Nutation de l'obliquité de l'écliptique, 2861.

**OBJECTIF**, verre de lunette qui est tourné vers l'objet, 2284.

**OBJECTIONS** contre le mouvement de la terre, avec les solutions, 1090.

**OBSERVATIONS** choisies du soleil & des planètes, 1399. *Tome II.* pag. 161 & *suiv.* Indication des observations de la lune, 1523, de toutes les observations à faire, 2623. Méthode pour les disposer dans les catalogues d'observations, 3947. Méthode pour observer un passage de Vénus ou de Mercure sur le soleil, 2117. Observations faites en 1769, pour le passage de Vénus 2146. Observer une éclipse de lune, 2470, de soleil, 2476, de satellite, 2493. Observations des taches de la lune, 3190. Observation du lieu de la lune dans le méridien avec tous les détails, 3937. Ordre des différentes observations que l'on peut faire, 3936. Réductions que l'on fait aux observations pour les rapporter à une même époque, 3930. Précision actuelle de nos observations, 3931. Observations à faire chaque jour, 2623; les plus anciennes observations qu'on ait conservées, 267. Observations sur mer, 3995. Conséquence qu'on déduit de chaque observation, 3933 & *suiv.*

**OBSERVATEURS** célèbres, Hipparque, Ptolomée, Tycho, Hévélius, Flamsteed, Cassini, Halley, La Caille. *v. Auteurs.*

**OBSERVATOIRES** célèbres, 2523. On

*Tome III.*

en trouve le détail dans la *Préface* xxxv & *suiv.* de Paris, 557, de Greenwich, 569, 2323: ils sont représentés dans la *Planche XVII.*

**OCCIDENT**, ouest, couchant, l'un des quatre points cardinaux. Couchant d'été & couchant d'hiver, sont les points de l'horizon où le soleil paroît se coucher dans les solstices. *v. Amplitude.* Ce que c'est que d'aller d'occident en orient, 2050.

**OCCULTATION**, éclipse d'une étoile ou d'une planète, 1977 & *suiv.* 1995.

**OCULAIRE**, verre tourné du côté de l'œil, 2284.

**OCTANT**, Constellation, 711.

**Océant**, instrument pour observer en mer, 2458, 3975. Auteurs qui en ont parlé, 3976.

**Océant**, phase de la lune, 1407.

**OSILLETON**, 2416, 2456.

**OISEAU** de paradis, *Paradisæa*, 710.

**OLENIA**, 673.

**OMBRE** des corps terrestres; elle disparaît quelquefois dans la zone torride, comme à Syene, 141, 142. Ombre de la terre dans les éclipses de lune, 1771. Calcul de la route de l'ombre dans une éclipse de soleil, 1930. Vitesse de l'ombre, 1942. Ombre de Jupiter sur les Satellites, 2918, des Satellites sur Jupiter, 2985. Ombres sur le soleil, 3127. Ombre de l'anneau de Saturne, 3241, des montagnes de la lune, 3214.

**OPÉRATIONS** graphiques, leurs usages, 2079, 2050, 3046, 3864.

**OPHIUCUS**, *v. Serpentinaire.*

**OPPOSITION** d'une planète, 1405; utilité des oppositions, 1201. Observation & calcul des oppositions, 3950. Méthode la plus parfaite de toutes, 3961. Précision qu'on en peut espérer, *ib.* Tables des oppositions, *Tome II.* pages 170 & *suiv.* Opposition de la lune, ou pleine lune, 1405.

**OPTIQUE**, 2284. Phénomène d'optique, 1512. Auteurs qui ont parlé de l'optique, 2162, 2284, 2308. *v. Lunettes.* Parallaxe optique, 2456. Inégalités optiques, 2984.

**ORBE**, **ORbite**, c'est le cercle ou la courbe qu'une planète décrit. Képler démontre que les orbites des planètes ne sont pas circulaires. 12145 qu'elles

M m m m m

sont elliptiques, 1280. Déterminer une orbite par 3 observations, 1288, 1293. Orbite relative dans les éclipses 1763, dans les passages de Vénus, 2050. Orbite apparente, 1879, 1919. Orbites des satellites, *v. Satelliter*. Orbites des comètes, 3024. Orbite troublée, 3460.

ORGYA, toise, terme employé par Tycho.

ORIGINE de l'Astronomie prise dans la Mythologie, 241.

ORION, grande Constellation, 691, 753. Sa figure est sur la *Planche II*.

ORPHÉE, 681, 685.

ORTOGRAPHIQUE. *v. Projection*.

ORUS, 673.

OSIRIS, 631, 645.

OURSE; la grande ourse est de toutes les constellations la plus facile à connoître, 7; son étymologie, 311; les différens noms, 661. Petite ourse, 663, 765.

OUVERTURE des lunettes, 2290, des télescopes, 2410.

## P.

**P**ALÆMON, 681.

PALILICIUM, *Lampadias*, *Aldebaran*, *Fulgens succularum*, ou l'œil du Taureau, 609, 647, 754.

PAN (on écrit quelquefois Paon), Constellation, 710.

PAPES qui se sont occupés du calendrier, *préf. page xx*. Benoît XIV, xlv, &c.

PAPIER, se retrécit & déforme les figures, 2090, 3889.

PARABOLE, une des sections coniques, propre à représenter le mouvement des comètes, 3024. Courbes paraboliques, 3329.

PARADIGMA, *παράδειγμα*, exemple, modele, exemple de calcul.

PARALIPOMENES, 495.

PARALLACTIQUE (Angle) 1036; son usage dans les éclipses de soleil, 1883, dans les passages de Vénus, 2118.

PARALLATIQUE, lunette ou machine parallatique, 2400, 2612. Mouvement parallatique, 2325.

PARALLAXE, sa définition, 1620, 1625; son effet, 1626; méthode pour l'observer, 1635, 1649. Parallaxe du

soleil, 1720 & *suiv.* 2143 & 2148, 3473. Manière de la trouver par la théorie de la lune, 3474, par la parallaxe de Mars, 1731, par celle de Vénus, 1741, 2148: on pourroit même y employer celle d'une comète, 3070. Méthode d'Aristarque par le temps des quadratures, 1722. Méthode d'Hipparque par les éclipses de lune, 1725. Parallaxe de la lune, 1657. Méthode pour la trouver par les hauteurs, 1648; par les ascensions droites, 1641; par les plus grandes latitudes, 1647; par la longueur du pendule, 3358, 3483. Différence que la parallaxe produit entre le parallèle vrai & le parallèle apparent, 2532. Parallaxe des planètes, 1731 & *suiv.* 3954. Parallaxe des étoiles fixes, 2758, 2780. Parallaxe de hauteur, 1628, d'azimut, 1685, 1892. Usage de la parallaxe pour trouver la distance, 1634. Parallaxe d'ascension droite, 1644, 2075; de longitude, 1664, 1876, 2083, de latitude, 1668; de distance, 2072, 2084; dans le sphéroïde aplati, 1653, 1682, & *suiv.* Table de ces parallaxes, *page 84 des Tables*. La constante pour la lune, 1711; ses équations, 1711. Echelles de parallaxes, 1858, 2079. Parallaxe de Mercure & de Vénus dans leurs passages sur le soleil, 2060; se calcule avec le compas, 2079. Effet de la parallaxe sur la durée de la sortie, 2157. Effet de la parallaxe sur les hauteurs méridiennes de la lune, 3942; d'une planète, 3954. Correction qu'exige la parallaxe pour les distances observées en mer, 3978, 3992. Parallaxe optique des lunettes, 2456 2590.

Parallaxe annuelle ou parallaxe du grand orbe, 1141, 2758; son effet sur les satellites, 2889, 2988, sur les comètes, 3110.

PARALLÈLES, petits cercles parallèles à l'équateur, 27. Projection d'un parallèle, 1835. Différence du parallèle vrai au parallèle apparent, 2539.

PARALLÉLISME de l'axe de la terre, 1095, 1111. Parallélisme des rayons visuels rend une planète stationnaire, 1113. Parallélisme des rayons solaires, 1796. Parallélisme de la lunette au

- plan d'un instrument, 2569, 2594.  
 PARRHASIS, 661.  
 PASCAL, 3285.  
 PASSAGES de Vénus & de Mercure sur le soleil (Liv. xi). Utilité des passages de Vénus, 1742, 2001, 2041. Années où il y a eu des passages sur le soleil (Tome II, pag. 587). Calcul du milieu d'un passage, 2052. Effet de la parallaxe, 2060 ; se trouve par une opération graphique, 2079 ; son effet pour le passage de 1769, 2081, 2059. Circonstances du passage de 1769 pour tous les pays de la terre, 2095. Voyages proposés pour ce passage, 2115. Voyages entrepris, 2149. Méthodes pour observer ces passages, 2117. Observations de l'entrée & de la sortie, 2140, 2147. Conclusions qu'on tire d'un passage, 2143, 2148. Passage de 1761, 2153 : on en déduit le nœud de Vénus, 2154, 2155 ; son diamètre, 2157.  
 PASSAGE au Méridien, médiation, culmination d'un astre, se trouve par le moyen du globe, 206 ; se calcule par les ascensions droites, 750, 984. Méthode rigoureuse pour la lune, 690. Passage de l'équinoxe au méridien, 1000. Observations faites dans le méridien, 3937.  
 PASSEMENT, 2297, 2469.  
 PAUTE, v. *Lepaute*.  
 PAYSANS qui se sont distingués dans l'Astronomie, 512.  
 PÉGASE, Constellation, 670, 763.  
 PENDULE, corps suspendu de manière à pouvoir faire des oscillations ou vibrations. Il s'applique aux horloges, 541. Pendule astronomique ou horloge, 2461. v. *Horloge*. Pendule composée pour remédier à la dilatation, 2462. Pendule simple, sa longueur, 2657. Table de ses accroissemens, 2699. Il serviroit de mesure universelle, 2634 ; son accourcissement sous l'équateur, 2657, 3373. Il sert à trouver la distance de la lune, 3398, 3483.  
 PENOMERE, 1788, 1819.  
 PÉRICÉE, 853. v. *Apogée*.  
 PÉRIHÉLIE. v. *Aphélie*.  
 PÉRIODES d'observations, 588. Périodes, ou révolutions des planètes, 1160. Périodes ou intervalles d'années qui servent à la chronologie, 1556 & *suiv.* Périodes qui ramènent les planètes à pareilles situations, 1173. Période julienne, 1562. Période des passages de Vénus, 2031. Période caldaïque de 18 ans & 10 jours, 1425, 1501. Périodes lunaires, 1564. Période de Louis le Grand, ou de 600 ans, 1565. Période de la précession, 1569, 2745. Période caniculaire, 296, 1605. Période de 437 jours qui ramène les satellites à même configuration, 2888. Trouver la période d'une comète par une seule observation, 3107.  
 PÉRISCIENS, 144.  
 PÉRICIENS, 150.  
 PERSEA, 668.  
 PERSÉE, Constellation, 669, 761.  
 PERTURBATIONS, dérangemens que cause l'attraction, 3430.  
 PESANTEUR, gravité, attraction, idée de cette force, 151, 3360. v. *Attraction*. La pesanteur diminue sous l'équateur, 3373. La pesanteur de la lune est diminuée dans les deux syzygies, 3477. Ce que pèse la terre, 2693.  
 PETAU, 516, 1562, &c.  
 PETITS CERCLES. v. *Cercles*.  
 PEYRESC, 504.  
 PEZENAS, 2126, 2342, 2447, 2458 ; 2584, 3530.  
 PHAËTON, 673.  
 PHASES de la lune, 1400. Calcul de la phase ou de la partie qui paroît éclairée, 1408. Phases d'une éclipse de lune, 1777 ; d'une éclipse de soleil, 1848. Phases de Mercure, 1194, 3216, de Vénus, 1194, 3217, de Saturne, 3233, des comètes, 3117.  
 PHÉNICIENS, leurs connoissances en Astronomie, 309 ; leurs navigations, 318.  
 PHENIX, Constellation, 710.  
 PHÉNOMÈNES célestes, ordre dans lequel il faut les observer & les considérer, *art. 1, & suiv.* Détail de tous ceux qui méritent l'attention des Astronomes, 2623.  
 PHILOLAUS, 333, 1070, 3246.  
 PHOCA, veau marin, 668.  
 PHÉNICIE, petite Ourse, 663.  
 PHÉNICIENS. v. *Phéniciens*.  
 PHORBAS, 678.

PHOSPHORE, nom de Vénus, 1194.

PICARD, 560, 2223, 2641, 2771, &c.

PIED de Paris, sa grandeur. *v. Mesure.*

Pied d'Angleterre, 2422. Pied Romain, 2626; de différentes nations, 2639.

PINGRÉ, 2144, 3089, 3119, 3848, 3996.

PIRITHOÛS, 648.

PITISCUS, 456, 485, 3904.

PLAN; en parlant des cercles célestes, on entend souvent le plan de ces cercles plutôt que leurs circonférences. Définition d'un plan, 1120, 3646; ce qu'on entend en disant qu'un astre est dans l'équateur, 3648. Angles des plans, 1121. Mesure de l'inclinaison des plans, 3651.

PLANÉTAIRE, instrument qui représente les mouvements des planètes, *v. celui de Huygens* dans ses œuvres, celui de Romer dans les œuvres de Horrebow, *Tome III*, & les Leçons de Physique de M. Nollé.

PLANÈTES, leurs noms, 83, 630. Signes qui les représentent, 641; leurs révolutions périodiques, 85, 1153. Dans quel temps elles furent connues, 327; comment on les distingue des étoiles, 600; origine de leurs noms, 639; révolutions synodiques, 1193; retours à même situation, 1173; leur mouvement annuel, 1159; leurs époques, (*Tome II*, page 100); leurs diamètres & leurs grosseurs, 1393, 1398; leurs observations, 1399; leur ressemblance avec la terre, 3246; leurs rotations, 3120; comment elles s'éloignent & se rapprochent du soleil, 3427, *v. le nom de chacune.*

PLÉIADES, 646, 754.

PLEÏONE, 646.

PLINE, 243, 1655, 1720. Période de Pline, 1501; cet auteur avoit peu de connoissance en Astron. 1720.

PLURALITÉ des mondes, 543, 3246.

POÈTES, passages des Poètes relatifs à l'Astronomie, 76 &c. 607 &c. *v. Auteurs.* *v. aussi la Préface* où j'ai rapporté l'éloge que des Poètes célèbres ont fait de l'Astronomie, page xxv.

POIDS de la terre, 2693.

POINTS cardinaux, 8; point d'égalité, *punctum aequantis*, 1204; point cul-

minant, 183; points de la plus grande distance. *v. Ap. des.*

POISSONS, 635, 659, 761.

*Poisson austral*, 707, 777.

*Poisson volant*, 710.

POLAIRE, étoile polaire; c'est une des premières qu'il importe de connoître, 5; elle le reconnoît par le moyen de la grande ourse, 6; sert à tracer une méridienne, 164; les différents noms, 314; triangle polaire, 3663. *v. Cercle.*

POLE; ce que c'est en général, 17, 3654. Poles du monde ou de l'équateur, 14. Le pole septentrional boréal, ou arctique, est celui que nous voyons, *ib.* Manière de le connoître, 4, d'observer sa hauteur, 38. Connoître le pole de l'écliptique, 784. Mouvement d'un pole autour d'un axe, 1398, 2705.

POLLUX, 609, 648.

POLESCOPE (*πόλος, multus*), instrument avec lequel on voit de plusieurs côtés, 2432.

PORPHYRE, Philosophe du troisième siècle, 266.

POSIDONIUS, 359, 1721.

POSITION, angle de position, 1044; son changement, 2714; table des angles de position, 1046. Étoiles qui ont cet angle de 90°. 2712. Arc de position, terme d'Astrologie, 1054.

POUND, 1737, 2428, 2993, 3229.

PRÆSEPE, 650.

PRÉCESSION des équinoxes, sa découverte, 355, 412; sa quantité, 917, 2701. Précession en ascension droite, 2702, 2705, 2707. Précession en déclinaison, 2704, 2710; son changement par l'attraction des planètes, 2741; calcul de la précession par l'attraction du soleil & de la lune sur le sphéroïde aplati, 3528; équation de la précession. *v. Nutation.*

PREMIER méridien, 48, 3891.

PRINCES ou Ministres à qui l'Astronomie doit ses progrès. *v. la Préface*, 344, 378, 395, 404, 408, 423, 433, 462, 471, 473, 561, 2168, 3232, 2664, 3966, &c.

PRIN des instruments. *v. la fin de la Préf.*

PRODROMUS, 532.

PROBLÈME de Kepler, 1237. Solution indirecte, 1239; solution directe, 1247; solution analytique, 3334.



- solution de Ward par l'hypothèse elliptique simple, 1252. Problème des trois corps, 3446.
- PROCYON, 609, 754.
- PROGRESSION successive de la lumière, 2894.
- PROGYNASMES, 478 *en note*.
- PROJECTIONS en général, auteurs qui en ont parlé, 3868. Projection dans les éclipses, 1798. Ouvrage de M. Cassini, 555, 1821. Cercle de projection, 1804, 1837, 2072. Projection orthographique, 1823, 3869, stéréographique, 1824, 2111, 3870. Projection d'un cercle sous la forme d'une ellipse, 1827. Plan de projection, 1836. Ellipse du parallèle de Paris, 1839. Les phases d'une éclipse trouvées par la projection, 1848. Calcul de la projection, 1870. Usage de la projection dans les passages de Vénus sur le soleil, 2071, 2079, 2111. Projections des cartes géographiques, 3868, de la Hire, 3877; de Flamsteed, 3886. Projection employée par M. Buache, & M. Robert, 3881, par M. Bonne, 3883, par M. Murdoch, 3885; projection des cartes réduites, 3878.
- PROJECTION, force ou vitesse de projection, 3418.
- PROLEGOMÈNES, 571.
- PROMETHÉE, 681, 682.
- PROMISSEUR, terme d'Astrologie, 1054.
- PROPAGATION successive de la lumière, 564, 2894.
- PROPORTIONS des distances des planètes avec leurs révolutions, 1224, des aires avec les temps, 1226.
- PROPUS (ou Prepes) à l'accusatif *propoda*, étoile de la cinquième grandeur située à 12' au midi de l'écliptique devant le pied de Castor, marquée H dans nos catalogues.
- PTOLOMÉE Philadelphie, restaurateur de l'Astronomie, 344.
- Ptolomée, Astronome d'Alexandrie, quels sont les auteurs qui écrivent Ptolémée, 364; ses hypothèses, 865, 1204; son système, 1063; son Astrolabe, 2275, 3871; ses observations Liv. vi.
- PUPILLA, 685.
- PYTHAGORE, 331 &c.
- PYTHÉAS, 341.
- PYTHON, 665.
- Q.
- QUADRATURE de la lune, ou quartier, 1400. Quadrature du cercle, 3322.
- QUARRÉ. *v.* Carré.
- QUART-DE-CERCLE. *v.* Hauteur. Son usage pour les passages de Vénus, 2117; sa description, 2311. Manière de le dresser, 2320; mural, 2328, mobile en tout sens, 2325. Vérification d'un quart-de-cercle mobile, 2550. *v.* Division, Suspension, Prix.
- QUARTIER de réflexion, 3976.
- R.
- RAYON vecteur, 1234; manière de le calculer, 1245, 1250, 1254, 3270, 3343, 3447; dans la parabole, 3253; d'une comète, 3042. Rayon osculateur ou rayon de la développée, 3276.
- Rayons de la terre, 2690. *v.* Diamètres.
- RAMEAU, Constellation, 715.
- RAPPORT de réfraction, 2191. Rapport du diamètre à la circonférence, 3322.
- REAU-MUR, son thermomètre, 129.
- RÉDUCTION à l'écliptique, 1130. La plus grande réduction, 1376. Inégalité de la réduction pour la lune, 1496. Formule analytique pour la réduction, 3639. *v.* les Tables, page 72. Réduction dans les éclipses, 1777, 2911. Réduction de différentes observations à un même jour, 3930.
- RÉFRACTION de la lumière augmente la durée du jour, 107. Formule qui en exprime l'effet, 1028; son effet sur les amplitudes, 1040. Réfraction horizontale, 2172, plus petite au Cap, 2178; égale dans le nord, 2231; son effet peut se quadrupler, 2183. Rapport de réfraction, 2191. Courbe de réfraction, 2194. La réfraction ne dépend que de l'air inférieur, 2200. La réfraction est comme la tangente de la distance au zénit, 2203, 2207. Règle plus générale, 2210, 2211. Inégalité des réfractions, 2222, 2254; son effet sur les éclipses de lune, 1249; sur les distances, 2247, 3978; sur les diamètres, 2246.

- Méthode pour avoir la réfraction absolue, 2215. Réfraction à différentes hauteurs, 2219, au dessous de l'horizon, 2220, sur les montagnes, 2221. Réfraction dans la zone torride, 2234. Diminution relative au thermomètre & au baromètre, 2236. Réfraction terrestre, 2250. Différence qu'elle produit entre le parallèle vrai & le parallèle apparent, 2546; son effet sur les observations faites à la lunette parallatique, 2546; correction de la réfraction pour les distances observées en mer, 3978, 3986.
- REGIOMONTANUS, Astronome célèbre, 431. M. Astruc le cite encore comme le premier qui ait écrit sur les maladies vénériennes.
- REGLE, Constellation, 711.
- REGULUS, Basiliscus, cœur du lion, 609, 717. C'est aussi le nom de Céphée, 666.
- RENARD, Constellation, 714.
- RENVERSEMENT, espèce de vérification, 2552.
- RETARDEMENT de Saturne, 1163.
- RÉTICULE, 2136, 2353; ses usages, 2507, 2514; sa vérification, 2504, 2514.
- Réticule*, Constellation, 711.
- RÉTICUS, 442. 456, 3904.
- RETOURNEMENT, espèce de vérification, 2556.
- RÉTROGRADATION apparente des planètes, 1080, 1181; leur durée, 1192. Rétrogradation des comètes, 3110.
- RÉVOLUTIONS arrivées dans l'Astronomie, 343, 537, 2309. Révolutions des planètes, 1153, 1160. Manière rigoureuse de les calculer, 1422. Révolutions synodiques, 1173. Révolutions par rapport aux étoiles fixes, 888, 1160, 1421. Retours à mêmes configurations par rapport à la terre, 1174. *v. Période, Année*. Révolutions de la lune, 1421, des Satellites de Jupiter, 2882, 2972. Révolutions exactes, 2973. Révolutions des taches du soleil, 3160.
- RICCIOLI, 529, 1062, 1545.
- RICHER, son voyage à Cayenne, 538, 546, 2168.
- RIGEL, 609, 755.
- ROMBOÏDE, Constellation, 714. *Réticule romboïde*, 2353, 2518.
- ROMER, 564, 573, &c.
- ROTATION, mouvement d'une planète autour de son axe, 120. Rotation de la terre, 950, 2466, 3583; des Satellites de Jupiter, 2985; du soleil, 3123 & *suiv.* Durée de la rotation, 3160. Rotation de la lune, 3208, de Vénus, 3218, de Mars, 3220, de Jupiter, 3223.
- S.
- SAGITTAIRE, 633, 655, 775.
- SAISONS, cause des saisons, 81, 128. Explication des saisons dans le système de Copernic, 1108.
- SAROS, période des anciens, 1501, 1566.
- SATELLITES de Jupiter, 2880. Époques de leurs conjonctions, 2974; leurs éléments, 2972; inégalités, 2889 & *suiv.* Excentricité du 4<sup>e</sup>. 2905; son effet, 2920; mouvement de ses apsidés, 2910. Éclipses des Satellites, 2917. *v. les Tables*, p. 162; leurs inclinaisons, 2941; leurs nœuds, 2959. Qui est-ce qui a découvert la cause des changemens d'inclinaisons, 2944. Observer leurs éclipses, 2493. Temps où l'on voit les deux phases, 2948. Inégalités optiques, 2984. Effet de l'aplatissement de Jupiter, 2935; effet des différentes lunettes, 2494, 2983; configurations des Satellites, 2587; leurs latitudes, 2987, 2990; leurs grosseurs, 2979; leurs masses, 2981; leurs attractions mutuelles, 2969; manière de calculer leurs Tables, 2973; Satellites de Saturne, 557, 2592; leurs inclinaisons, 2958, 2998; leurs nœuds, 2982, 2998. Pour leurs révolutions périodiques & synodiques. *v. la Connoissance des Temps*, 1773.
- SATURNE. Son anneau, 3125; son aphélie, 1323; son diamètre, 1393; sa densité, 1398; sa distance, 1222, 1398, *I. II*, p. 110; ses époques, 1330. Inégalité singulière découverte dans son mouvement, 1167. Equation séculaire qui vient de son retardement, 1165. *Tables*, pag. 152. Equation & excentricité de son orbite, 1222, 1274, 1278; sa grosseur, 1398; son inclinaison, 1374,

- 1376; son mouvement moyen, 1160  
*& suiv.* 1330; son nœud, 1345,  
 1347; les phalès, les bandes, 325  
*& suiv.* Observations de Saturne,  
*T. II*, p. 176. v. aussi les Tables,  
 p. 151.
- SATURNILABE, instrument, 2994.
- SCEPTRE, Constellation, 714.
- SCORPION, 632, 654, 773.
- SECTEUR, instrument d'Astronomie,  
 2380; ses usages, 2596, 2790. Sec-  
 teur de cercle, secteur d'ellipse, 1239,  
 3322.
- SECTION commune de deux plans, 1120  
 Sections coniques, 3254, section d'un  
 sphéroïde, 3282.
- SÉJOUR. v. *Du séjour*.
- SÉLÉNOGRAPHIE, 532, 3168.
- SEMAINES, 303, 1534. Ordre des jours  
 de la semaine, 1531.
- SERPENT, *Serpentaire*, Constellations,  
 678, 680, 776. Différentes espèces  
 de serpents dans le ciel, 680.
- SEXTANT, (M. de la Caille écrit *Sex-  
 tant*) 2323; ses vérifications, 2559.  
*Sextant d'Uranie*, constellation, 714.
- SEXTUS EMPIRICUS, Médecin que l'on  
 croit avoir vécu vers l'an 200. art.  
 271.
- SIDÉRAL, (année) 888. Révolutions  
 sidérales, 1160, 1421.
- SIGNAUX pour la mesure de la terre,  
 2647.
- SIGNES du zodiaque; ce sont les douze  
 parties du cercle de l'écliptique com-  
 ptées depuis le point équinoxial: leurs  
 noms, 76; leurs caractères, 643; se  
 distinguent des Constellations, 77,  
 602, 1614. Signes ascendants, 119.  
 Signes ambigus, 1583.
- SIGNIFICATION, terme d'Astrologie,  
 372, 1054.
- SILIQUASTRUM, 667.
- SIMPLICIUS, auteur du 6<sup>e</sup> siècle, 289.
- SIMPSON, 1251, 1479, 2195, 2830,  
 3516.
- SINODIQUE, 1418.
- SINUS, leur définition, 3600; leur  
 usage, 3602, &c. Les sinus sont des  
 fractions, 3609; formules qui sont  
 composées de sinus, 3615 *& suiv.*  
 Les sinus changent de signes, 3604.  
 Différentielles des sinus, 3307. For-  
 mules pour trouver les sinus, 3315.  
 Différences entre les arcs & les sinus,  
 1247, 3319. Sinus versé. 3600, 3353.
- SIRUS, M. de la Caille écrit *Syrus*;  
 mais cela est contraire à l'étimologie  
 grecque; c'est la plus belle étoile  
 visible en Europe; 609, 697, 754,  
 1605, 2751.
- SISTÈME du monde, 86, 1060; de Co-  
 pernic, 302, 333, 439, 1070; de  
 Ptolomée, 1062; des Egyptiens,  
 1065; de Tycho-Brahé, *ib.* de Lon-  
 gomontanus, 1089. Explication des  
 phénomènes dans le système de Co-  
 pernic, 1105. Preuves du système de  
 Copernic, 1074 *& suiv.* 1090 *& suiv.*  
 3589.
- SIZIGIES. v. *Syzygies*.
- SMITH, 2162, 2283, 2297, 3245.
- SOBIESKI (Firmament de), ouvrage  
 d'Hévélius, 532; écu de Sobieski,  
 Constellation, 714.
- SOCIÉTÉ royale de Londres, son établis-  
 sement, 539. Les Transactions Philo-  
 sophiques de cette célèbre Académie  
 sont citées fort souvent dans le cours  
 de cet ouvrage.
- SOLEIL, son mouvement apparent, 60,  
 76; son lever & son coucher, 175,  
 177; son amplitude, 181; sa révolu-  
 tion, 82, 127, 588. Trouver sa lon-  
 gitude, 853, 898; son équation,  
 858, 1265; son lieu moyen par les  
 observations de M. de la riire, & le  
 lieu de son apogée en 1684; 877,  
 1282; son excentricité, 864, 1211,  
 1266; sa parallaxe, 1742, 2149;  
 sa distance, 1746; son équateur,  
 848, 3126 *& suiv.* Temps qu'il  
 emploie à traverser le méridien & le  
 vertical, 894. v. *Diamètre, Rotation,  
 Année, Parallaxe*.
- SOLSTICE, *Solis statio*; jours des solsti-  
 ces, 64. Points des solstices, 68,  
 170. Détermination des solstices, 880.  
 La hauteur solsticiale se détermine par  
 plusieurs jours d'observations, 2930.
- SOTHIAQUE (*période*) des Egyptiens,  
 1605.
- SOUSTRACTION, en Astronomie, at-  
 tention qu'on doit avoir pour la faire,  
 921, 1009, 1126.
- SPARSILES, étoiles informes ou sparsil-  
 les; ce sont celles qui ne sont point  
 comprises dans les figures des constel-  
 lations, 714.
- SPHÈRE, ne signifie proprement qu'une

boule, & l'on emploie souvent le mot de sphère dans cette signification. En Astronomie c'est l'assemblage ou l'imitation des cercles célestes; principes de la sphère, 1. Invention de la sphère, 247, 328. Sphère armillaire, 100. Sphère d'Archimède, 105. Sphère droite, 109; oblique, 114. Parallèle, 124. Sphère de Chiron, 1616; d'Hésiode, 1618; d'Eudoxe, 1619.

SPHÉROÏDE, Solide qui diffère d'un globe, en ce qu'il est aplati ou allongé. Dimensions du sphéroïde terrestre, 2690. Degré du sphéroïde, 2661. Singularité du sphéroïde lunaire, 3183. Section d'un sphéroïde, 3282. Solidité d'un sphéroïde, 3330. Mouvement du sphéroïde terrestre par l'action du soleil, 3555. Attraction qu'il exerce, 3585. Parallaxes dans le sphéroïde aplati, *Tom. II*, p. 394. Tables, p. 96.

STADE d'Alexandrie, 40, 2626.

STATIONS des planètes, 1181. *v. Rétrogradations.* Trouver le point stationnaire, 1188.

STREET, 520, 3915, 3971.

STYLE, différence du vieux style au nouveau style, 1328, 1548. Style d'un cadran solaire, 3893.

SUCULÆ, 647.

SUD. *v. Midi.*

SUPPLÉMENTS à cet ouvrage d'Astronomie: il y en a pour la première édition dans la Connoissance des Mouvements célestes de 1767; j'espère en publier séparément pour cette seconde édition.

SUPPORTS des lunettes, 2495, des lunettes méridiennes, 2592.

SUSPENSION du fil à plomb, 2313, 2385. Quelle est la meilleure de toutes les suspensions, 2386.

SYDÉRALE. *v. Sidérale.*

SYNODIQUE. *v. Sinodique.*

SYRIUS. *v. Sirius.*

SYSTEME. *v. Système.*

SYZYGIES, conjonctions ou oppositions, 1433.

T.

**T**ABLES astronomiques, suites de nombres qui représentent les situa-

tions, les mouvemens ou les grandeurs des astres pour un temps quelconque. Manière de les étendre par les secondes différences, 3920; d'en corriger les parties proportionnelles, 3929. *v. le nom de chaque planète.*

#### TABLES contenues dans cet Ouvrage.

A la fin du premier volume, Table des principales villes du monde, *page 1.*

Tables du Soleil, 4.

Equation du temps, 38.

Réduction de l'écliptique à l'équateur, 41.

Seconde partie de la nutation, 46.

Tables de la lune, 47.

Parallaxe dans le sphéroïde, 96.

Épactes astronomiques, 99.

Tables des cinq planètes, 100.

Tables des satellites, 167.

Catalogue des étoiles, 202.

Changement des étoiles en latitude, 222.

Table pour la précession, 224.

Tables d'aberration & de nutation pour les principales étoiles, 230.

Réfractions astronomiques, 237.

Densités de l'air, 241.

Logarithmes logarithiques, 245.

#### TABLES répandues dans les 3 Volumes de cet Ouvrage.

Table des climats, art. 133.

Table du passage des étoiles au méridien, 750.

Table du temps que le demi-diam. du soleil met à passer le méridien, 895.

Tables pour trouver l'ascension droite & la déclinaison des astres, 911.

Correction des tables de Ptolomée, 918.

Table de l'équation des hauteurs correspondantes, *Tome I*, p. 412 & *suiv.*

Table du changement séculaire de l'équation du temps, art. 980.

Table de la quantité dont la réfraction accélère le lever ou retarde le coucher des astres, *Tome I*, p. 474.

Table des angles de position pour les principales étoiles, *T. I*, p. 488.

Table pour trouver l'heure par le moyen des étoiles, art. 1051.

Table

Table de la durée des révolutions, & du mouvement moyen des planètes, *Tome I*, p. 579, 580, 581.

Table de la durée des rétrograd. 1193.

Table de la quantité de lumière de Vénus suivant ses distances à la terre & au soleil, 1199.

Table des distances des planètes au soleil suivant différens Auteurs, 1222.

Table des logarithmes pour l'équation du centre, 1243.

Table de la différence entre les arcs & les sinus, 1248.

Table des excentricités des planètes suivant différens Auteurs, 1278.

Table des plus grandes équations de chaque planète, 1278.

Table des époques des planètes, 1330, *Tome II*, p. 110.

Table des nœuds des planètes & de leurs mouvemens, 1347.

Table des inclinaisons, 1376. Différence entre les tables de M. Cassini & celles de M. Halley, 1382.

Table de ce qu'il faut ôter ou ajouter aux tables de M. Halley, pour avoir les nouvelles, 1382.

Table des diamètres apparens de chaque planète en secondes, & en lieues, de leurs grosseurs, de leurs distances, & de la vitesse des graves pour chaque planète 1398.

Tables d'observations, *Tome II*, p. 161 & suiv.

Tables des élémens de la théorie lunaire suivant divers Auteurs, 1480.

Table pour trouver le jour écoulé depuis le commencement de l'année, 1553 & page 224 des Tables.

Table pour trouver le quantième par la lettre dominicale, 1555. Equation des épâtes, 1576. v. la Planche VIII.

Table pour les annés égyptiennes, 1598.

Table pour les annés turques, 1603.

Table du lever cosmique, héliaque, acronyque, 1608.

Table des parallaxes de la lune suivant divers Astronomes, 1658.

Table pour la parallaxe dans le sphéroïde aplati, 1705. v. aussi les Tables du premier volume, p. 96.

Table des passages de Mercure sur le soleil, 2029. *Tome II*, page 584.

Table des phases de l'éclipse de 1764 sur toute la terre, 1969.

*Tome III.*

Table des passages de Vénus sur le soleil pendant 12 siècles, 2038.

Table de la distance des centres de la projection & de l'ellipse dans les éclipses, 1865. Dans les passages de Vénus, 2077. Elémens du calcul des parallaxes pour le passage de Vénus en 1769. art. 2147.

Table des ouvertures des lunettes & télescopes, 2290, 2422. v. aussi la fin de la Préface, page 1.

Table pour la figure de la terre, *T. III*, p. 120.

Table de la mesure du degré par divers Astronomes, 2691.

Table du déplacement de l'écliptique sur l'orbite de chaque planète, 2737.

Table pour l'aberration des principales étoiles, 2847 & p. 230 des Tables.

Table des aberr. des cinq planètes, 2852.

Tables des élémens des satellites, 2972, *T. III*, p. 303.

Table pour réduire les heures & les minutes en fractions décimales, 3052.

Tables pour les comètes, *T. III*, p. 335 & 366.

Table des observ. faites sur Manilius pour la libration de la lune, 3190.

*TABLES qui sont citées dans cet Ouvrage.*

Tables des sinus, 429, 456, 3904, des logarithmes 496, 1889, 3903.

*Tabulae Toletanae*, 391, *Alphonsinæ*, 426. *Prutenicæ*, 450, *Rudolphinæ*, 494, *Medicæ*, 1148.

Tables de Wing, Riccioli, Iongomontanus, Rennerius, Lansberge, 1148.

Tables de Halley, 588, 3961; de Cassini, 1382; de M<sup>r</sup>s. Euler, Clairaut, d'Alembert, 1460.

Tables des hauteurs, 1034.

Tables des arcs semi-diurnes, 1014, des amplitudes, 1043.

Tables d'azimut, 1686.

Tables du nonagésime, 1681.

Tables des maisons, 1054 & suiv.

Tables de la parallaxe annuelle, 1157.

Différentes tables de la lune de Horrebow, Grammatici, Leadbetter, Wright, Capelli, Dunhorn, Flamsteed, 1457. Méthode pour les corriger, 1501.

Tables pour avoir les longitudes en mer, 3989, 3994.

Nnnnn

Table des conjonctions moyennes de la lune, 1756 & suiv.

Tables pour les éclipses, 1786.

Tables pour la précession, 2710, 2711.

Tables d'aberration, 2830, 2646.

Tables des satellites, 2995. Pour les tables en général v. le P. Riccioli, *Astronomia reformatæ*; Flamsteed, *Hisperia cælestis*; & la Connoissance des temps ou des Mouvements célestes, depuis 1760, dont les volumes sont remplis de Tables nouvelles, de même que les Ephémérides astronomiques du P. Hell, le *Nautical almanac*, &c.

TACHES du soleil, 3126; leur durée, 3130; taches de la lune, 3168. Choix de quelques taches de la lune, 3190. Taches des planètes, 3217 & suiv. des satellites, 2985.

TANGENTES, 3610. Tangente de la moitié d'un arc, 3636, de la différence de deux arcs, 3638.

TAUREAU, Constellation, 627, 754.

TAURÉTA, 646.

TÉLESCOPE. Ce mot qui, en général, signifie instrument propre à voir de loin, ne s'applique jamais en François qu'aux instrumens composés de deux miroirs 2408; les dimensions, 2421. Prix des différens Télescopes, v. la fin de la Préface, p. xlix.

Télescope, Constellation, 711.

TEMPS astronomique, civil, 751. Mesure du temps vrai, 211, 959. Trouver le temps vrai d'une observation, 960, 1030, 1047. Conversion du temps en degrés, 212, 954, 2505, & des degrés en heures solaires moy. 977. La rotation de la terre est la mesure du temps, 951. Temps moyen 962, 973. Equation du temps, 963 & suiv. Difficulté qui s'étoit élevée sur l'équation du temps, 976. v. les Tables du Soleil, p. 38 & 39.

TERRE, comment on a reconnu qu'elle étoit ronde, 38; sa grandeur suivant les Anciens, 40, 273, 350, 2626; son mouvement connu des Anciens, 302, 333, 439, 1106. La rotation de la terre est supposée égale, 950. Preuves du mouvement de la terre, 1074 & suiv. 1090 & suiv. 3589. Degrés de la terre, 2633, 2651, 2671; ses dimensions, 2676; elle ne paroît

pas homogène, 3576, 3589; son poids, 2693; sa figure. v. Aplatissement & Sphéroïde. De quelle manière on trouve la solidité, 3331. Attraction qu'elle éprouve, 3485, 3528.

TESTA, 685.

THALÈS, 322, 325.

THÈME de nativité, état du ciel au moment de la naissance. v. *Astrologie*, *Theologie astronomique*, préf. v.

THÉMIS, 652.

THÉSÉE, 648, 677, 681.

THERMOMÈTRE, 129; étymologie du mot & graduation de cet instrument, 129, 2222; son usage, 2229, 2640.

TOISE du grand Châtelet de Paris & de l'Académie royale des Sciences, 2635, 2636. Comparaison des mesures étrangères avec cette toise, 2639, v. *Dilatation*.

TOUCAN, Constellation, 710.

TRAJECTOIRE, courbe décrite par un corps en mouvement. Trajectoire des planètes. v. *Orbe*. D'un rayon de lumière. v. *Réfraction*.

TRÉBUCHET, 2029, 2038.

TREMBLEMENT des astres par l'effet des vapeurs, 2256.

TREPIDATION, terme de l'ancienne Astronomie qui exprimoit un des mouvemens de la huitième sphère, relatif à la précession des équinoxes.

TRIANGLES, Constellations, 672, 710, 714. Triangle d'aberration, 2807. Triangle parallactique, 1626. Triangles sphériques, 851, 3658. v. *Liv. XXIII*). Résolution de tous les cas des triangles sphériques rectangles, 3672 & suiv. des triangles obliques, 3688 & suiv. 3743. Trois propriétés fondamentales des triangles sphériques rectangles, 3665, 3667, 3743. Propriétés des triangles obliques, 3688 & suiv. 3710 & suiv. Triangle polaire, 3663. Résolution des triangles avec la règle & le compas, 3864. Formules des petites variations des triangles, 3746 & suiv. Triangles formés pour la mesure de la terre, 2645.

TRIGONOMÉTRIE, science des triangles, *Liv. XXIII*. Trigonométrie sphérique, 3652 & suiv. Proposition fondamentale, 3665. Table des 16 analogies, 3672. Solution des 12

cas des triangles obliques , 3696. Cas douteux , 3662. Autres propriétés des triangles , 3709. Analogies différentielles pour les triangles sphériques , 3745. Opérations graphiques , 3864. Usage de la trigonométrie dans la Gnomonique , 3893.

TRICPAS , 678.

TRIPTOLEME , 648.

TROPIQUES , 73.

TROUBLES , perturbations , 3430. *v. Attraction , Inégalités.*

TYCHO-BRAHE un des plus grands observateurs qu'il y ait eu ; sa vie , 466 ; ses ouvrages , 478 ; persécuté & fugitif , 474 ; son système , 1083 ; son catalogue d'étoiles , 719 ; sa théorie de la lune , 1442 ; les instrumens , 2279.

TURC ; le grand Turc a voulu se procurer des livres d'Astronomie , 1059. Années des Turcs . 1535. Epoque des Turcs , 1602. Réduction de leurs années aux nôtres , 1603.

TYGRE (fleuve du) , Constell. 714.

TYPHON , 632.

## U.

ULACQ , 3903.

ULULANS , n ni que Régiomontanus donne quelquefois à la constellation du Bouvier , 675.

URANIBOURG , observatoire de Tycho , 471 , 477 , 560.

URION , 691.

USAGE des Globes , 169 , &c.

## V.

VARENIUS , auteur d'une bonne Géographie , 233.

VARIATION , troisième inégalité de la lune , 1445 ; calculée par l'attraction du soleil , 3469. Idée de sa cause , 3481. *v. les Tables , page 70.* Formules des petites variations des côtés & des angles des triangles , 3746 &c.

DU VAUCEL , 1794 , 1799.

VAUTOUR , 685.

VEIDLER. *v. Weidler.*

VÉNUS. Cette planète est la seule dont parle Homère , 640 ; elle peut se voir en plein jour , 1197 ; son aphélie , 1286 , 1317 ; sa densité , 1398 ; son

diamètre , 1391 , 2157 ; sa grosseur , 1398 , 2158 ; sa distance , 1222 , 1308 ; les époques *T. II , pag. 110.* son équation & son excentricité , 1222 , 1270 , 1278 ; son inclinaison , 1369 , 1376 ; son mouvement moyen , 1162. *T. II , page 110.* les nœuds , 1339 , 1347 , 2154 ; la rotation & les phases , 1194 , 3217. Observations de Vénus , *T. II , page 167. v. PASSAGES de Vénus sur le soleil. v. aussi les tables page 113.*

VERGE de conduite ou de rappel , 2315.

Verger de pendules , 2462.

VERGILÆ , 646.

VÉRIFICATION des instrumens , Liv. XIV. 2530 &c. *v. Quart-de-cercle , Lunette parallatique , &c.*

VERNIER , auteur d'une division ingénieuse attribuée à Nonius , 2342.

VIRRES de lunettes , 2286 ; de la manière de les travailler , 2297. Méthode pour les essayer , 2454. Verres colorés , 2477. Verres fumés , 2479. Verres de différentes natures , 2502.

VERSEAU , 635 , 641 , 775.

VERTICAL ; un fil est vertical quand il est d'à plomb de haut en bas & perpendiculaire à l'horizon. Cercle vertical , 10 , 215. Temps que le soleil met à traverser un vertical , 896. Cadrans vertical , 3805.

Verticale (ligne) , ou ligne à plomb , 2659 , 3579. Angle de la verticale avec le rayon de la terre , 1708 , 2690.

VIDE universel dans les cieux , 3583 , 3514.

VIERGE , Constellation , 631 , 652 767. *v. Epi de la vierge.*

VITESSE de la lumière , 2806 ; changements de sa vitesse dans l'atmosphère , 2217 ; vitesse des planètes , 3418 ; de l'ombre de la lune dans les éclipses de soleil , 1942 ; d'un boulet de canon , 1942 ; du mouvement diurne , 2812 ; des corps qui tombent , 3372.

VOIE-LACTÉE , 832.

VOYAGEURS , les observations qu'on peut leur conseiller , sont les hauteurs du soleil à midi par le moyen des gnomons , 72 , pour les latitudes ; & les hauteurs de la lune hors du méridien pour les longitudes , quand ils peuvent transporter un quart-de-cercle , 3996.

VULTUR *cadens*, 685.

VURTZBOURG, observatoire, *prés.* xlj.

WALTERUS, 432, 1312, 2277, 2721.

WARGENTIN, *prés.* xliij. 1740, 2143, 2880. *v.* les Tables des Satellites à la fin du premier volume.

WEGA, ou la Lyre, 609, 685.

WEIDLER, auteur de la meilleure Histoire que nous ayons de l'Astronomie; elle est citée fort souvent dans cet ouvrage, parce que c'est le livre le plus complet, & celui qu'on peut avoir le plus facilement, 247, 368, 599 &c. & *suiv.*

WHISTON, 401, 550, 2005, 2029, *prés.* xxxij.

Y.

YED, aile de Pégase, 609.

Z.

ZÉNIT ou *Zénith*, mot Arabe qui signifie le point du ciel vers lequel se

dirige le fil à plomb : ils s'appelle *Vertex* en Latin; il est opposé au NADIR, 10. Distance au zénit & manière de la mesurer, 25. La ligne du zénit est perpendiculaire à la surface de la terre, 3579.

ZANOTTI, *prés.* xlv. 1740, 2179, 2779.

ZÉTHUS, 648.

ZODIAQUE, espace céleste, ou zone d'environ 17 degrés de largeur, qui fait le tour du ciel, dont l'écliptique occupe le milieu, & qui comprend tous les points du ciel où les planètes peuvent paroître, 103. Signes du zodiaque, 76; comment on le divisa en 12 parties, 76; carte du zodiaque, 742; largeur du zodiaque, 1149; lumière zodiacale, 845.

ZONE, espace compris sur la surface d'une sphère entre deux cercles parallèles entr'eux, 135; des cinq zones de la terre, *ib.*

ZUPPUS, 322.

*Fin de la Table des Matières.*





# ADDITIONS ET CORRECTIONS.

## TOME I.

- P**AGE 79, à la fin de la note; dont les cercles, *lisez*, dont les centres.  
 Page 115, ligne 26; Allen, *lisez*, Allin.  
 Page 190, ligne 6; & ce me semble, *lisez*, & en 15 chiffres dans le *Thesaurus mathematicus* de Pitiscus en 1613.  
 Page 232, ligne 20; Nécrologe de 1769, *lisez*, 1770.  
 Page 298, dans la seconde colonne; Aldeberan, *lisez*, Aldebaran.  
 Page 488, α au nœud du lien des poissons,  $21^{\circ} 0' 11''$ , *lisez*,  $21^{\circ} 0' 24''$ .  
     β de la petite ourse,  $95^{\circ} 29' 5''$ , *lisez*,  $95^{\circ} 25' 5''$ .  
 Page 489, δ de la grande ourse,  $+ 0' 5''$ , *lisez* —  $0' 5''$ .  
 Page 491, α queue du Cygne,  $+ 3' 30''$ , *lisez*,  $+ 3' 40''$ .  
     γ dans l'eau du verseau, *lisez*, λ.  
 DANS LES TABLES, page 33, au bas de la table, au-dessus de X, au lieu de 30, *lisez* VIII.  
 Page 57, dans le titre courant, au lieu de Tables du Soleil, *lisez* de la Lune.  
 Page 68, dans la dernière colonne on observera que tous les filets doivent être baissés d'un chiffre.  
 Page 76, Table L, dans la dernière colonne après 20, *lisez* 15 au lieu de 25.  
 Page 79, Table LVII; au bas de la table, au lieu de VI, *lisez* IV.  
 Page 132 & suiv. l'équation de Mars & ses distances sont un peu différentes du résultat indiqué dans les corrections suivantes, mais la différence n'est pas assez considérable pour qu'on ait cru devoir en recommencer l'impression.  
 Page 237 à la fin: *lisez* ces logarithmes sont les log. ordinaires ôtés du log. &c.

## TOME II.

- Page 47, ligne 18; reste celui de la tangente, *lisez*, la moitié du reste est celui de la tangente.  
 Page 56, ligne 35, 14218,1, *lisez*, 14208,1.  
     Ib. ligne dernière,  $10^{\circ} 40' 35''$ , *lisez*,  $10^{\circ} 41' 47''$ .  
     Ib. surpasse de  $37''$ , *lisez*, de  $1' 45''$ .  
 Page 62, pour l'excentricité de Mars, au lieu de 14218,1, *lisez*, 14208,1.  
     pour l'équation de Mars, au lieu de  $10^{\circ} 40' 39''$ , *lisez*,  $10^{\circ} 41' 47''$ .  
 Page 90, ligne 20, au lieu de 14218,1, *lisez*, 14208,1.  
     21, au lieu de  $10^{\circ} 42' 13''$ , *lisez*,  $10^{\circ} 41' 47''$ .  
     22, qui surpasse de  $2' 11''$ , *lisez*, de  $1' 45''$ .  
 Page 144, pour l'équation de Mars, au lieu de  $+ 0' 37''$ , *lisez*,  $+ 1' 45''$ .  
 Page 208, ligne 26; au lieu de Moore, *lisez*, Moor.  
 Page 322, ligne 29; après la grande, ajoutez, & la Compassion se célèbre le samedi. La Susception de la Couronne d'épines se célèbre le premier dimanche d'août, à moins que la Transfiguration ne la fasse renvoyer au second dimanche.  
 Page 323, ligne 23; M. Joannot, *lisez*, Jouannaud.  
 Page 416, ligne 17, par l'observation faite à la baye d'Hudson, &c. *lisez*, par l'observation faite en Californie, on trouve  $8'' 8$  pour la paralaxe moyenne; & nous pourrions, &c.  
 Page 501, ligne 27, les signes descendans, *lisez*, Ascendans.  
 Page 543, ligne 15, qui tombe en R, *lisez*, en Z.

Page 559, ligne 1, mouvement vrai de la lune seule, *lisez*, de la lune au soleil, ou la différence des mouvemens.

Ligne 6, plus grande par l'observation, *lisez*, plus grande que par le calcul des tables.

Page 648, ligne pénultième, au lieu de 0'', *lisez*, 39'' 3.

*Ib.* à la fin de la table, au lieu de — 38'' 7, *lisez*, + 38'' 7.

& au lieu de 7<sup>h</sup> 0' 8" 8, *lisez*, 7<sup>h</sup> 1' 26" 2.

### T O M E I I I.

Page 94, après la vare de Castille, *ajoutez*, le palme de Lisbonne suivant M. Ciera, 8 pouces 0'' 90.

Page 106, ligne 20, au lieu de Pernim, *lisez*, Pernin.

Page 221, ligne 11, au lieu de (3674), *lisez*, (3764).

Page 265, ligne 5, au lieu du 3<sup>e</sup> Satellite *lisez*, du second Satellite.

Page 301. Les révolutions périodiques des satellites de Saturne d'après les moyens mouvemens établis par M. Cassini, ont été calculées plus exactement par M. PROA, Secrétaire du Roi, de même que les révolutions synodiques. V. la *Connoissance des temps* de 1773.

Page 366, la Comète de 1533 est rétrograde & non dir ète.

A la fin de cette Table on ajoutera les élémens de la 60 Comète aperçue par M. Messier le 1 Avril 1771, & calculée par M. Pingré de la manière suivante, vers la fin de Juin, sur près de trois mois d'observations.

Nœud ascendant 0<sup>h</sup> 27' 51' 0''

Inclinaison 11 15 29

Périhélie 3 13 28 13

Distance périhélie 0,90576

Passage au périhélie le 18 Avril 12<sup>h</sup> 14' 27''

Mouvement direct

Page 757, lig. 7, après  $p \frac{(m+1)}{2}$ , *supposez*,  $\frac{d^2}{m^2}$  comme au terme suivant.

Page 796, ligne 32 ; est de 19° 16' 46" à 18<sup>h</sup> 28' 23", *lisez* étoit 70° 31' 27" à 16 heures ; la différence des ascensions droites du soleil & de la lune changeoit de 30' 12" par heure. Delà il suit, &c.

Page 797, ligne 3, cet angle horaire a lieu à Paris, *lisez*, cet angle horaire est plus petit que celui qui avoit lieu pour Paris à 16 heures, de 1° 22' 13", ce qui répond à 2<sup>h</sup> 45' 21" : donc la différence, &c.

### CORRECTIONS & ADDITIONS à faire dans le Recueil de Tables de Halley pour les Planètes, &c. imprimé en 1759, qui se trouve à Paris chez Bailly.

J'AI SUPPOSÉ dans plusieurs endroits de ce Livre, qu'on eût entre les mains le Recueil de Tables que j'ai donné en 1759, qui renferme les Tables de M. Halley pour les Planètes & les Comètes ; celles de M. Wargentin pour les Satellites, celles de M. de la Caille pour les Étoiles fixes, &c. L'usage de ce Livre ayant donné lieu d'y appercevoir plusieurs fautes, je vais en donner ici le Catalogue, avec quelques additions utiles. Je conseille à tous ceux qui font usage de ce Livre, de faire sur leur Exemplaire toutes les corrections suivantes.

Dans l'Explication, page 13, ligne 15, après planètes, *ajoutez ces mots*, exceptez de Jupiter (1349).

- Page 13, ligne 23 & 24, *effacez ces mots*, & nous ne connoissons que des causes capables de les faire rétrograder.
- Page 88, ligne 29, *ajoutez* que dans un autre ouvrage il attribue cette méthode à M. Bradley. (Théorie des Comètes, page XLII).
- Page 121, ligne 4, même anomalie moyenne, *lisez*, même distance au périhélie en jours. *Il faut effacer tout le reste de l'article, c'est-à-dire les 24 lignes suivantes, & renvoyer à l'art. 3105 de l'Astronomie.*
- Page 135, ligne 6, *ajoutez* M. Maraldi soupçonne que cette équation vient de l'excentricité du 3<sup>e</sup> Satellite, jointe à un mouvement de son apside, *voyez* art. 2903.
- Page 135, ligne 18, mais enfin, &c. *lisez*, cette inclinaison a continué d'augmenter jusqu'en 1763, & l'on croit qu'elle recommence à diminuer.
- Page 135, lignes pénultième & dernière, au lieu de l'année 1757, *lisez* pour le cas où elle continueroit d'augmenter jusqu'à 3° 36'; mais jusqu'ici elle ne passe pas 3°. 26' environ, en supposant l'ombre circulaire.
- Page 137, ligne 14, au lieu de 0, 01454, &c. *lisez* 0, 00727, un peu plus grande que celle de Vénus.
- Page 140, ligne 26, cette inclinaison semble, &c. *lisez*, cette inclinaison a continué d'augmenter jusqu'en 1763.
- Page 142, ligne 27, Table 1, équation du Temps 25' 18'', *lisez* 25' 27'', & *corrigez les trois lignes suivantes en conséquence.*
- Page 152, ligne 2, *ajoutez* que je crois la variation de l'obliquité de l'écliptique encore plus grande. *Voyez* art. 2746.
- Page 153, lignes 21 & suiv. *corrigez ainsi le reste de cet article*: cette longitude du nœud corrigée se retranche de l'ascension droite de l'étoile; avec le reste 6° 11', & avec 38° 34' de déclinaison, on trouve dans la Table 1x la seconde partie de la nutation + 7'' 0; dans la Table XI, avec 25° 27' & 7'', on trouve 1'' 7 à retrancher; ainsi la seconde partie de la nutation dans l'ellipse sera + 5'' 3; on réduira de même la nutation en déclinaison, mais cette correction est assez petite pour qu'on puisse la négliger dans cet exemple.
- Page 159, ligne 10, après 7° 8' 18', *placez ces mots*: il faut ajouter 6 lignes, parce que la déclinaison est boréale, & l'on aura 1° 8' 18' pour l'argument cherché ou la longitude, &c.
- Page 161, ligne 32, après 13'' 0, *lisez ces mots*: la correction du lieu du nœud prisé dans la Table XI est 8° 5'; ainsi le lieu du nœud corrigé est 1° 19° 21'; avec cet argument on trouve la seconde partie de la nutation en ascension droite dans la Table 1x, — 2'' 4, & la correction de la Table XI de 0'' 3; ainsi la seconde partie de la nutation sera — 2'' 1; on retranchera 1° 19° 21' de l'ascension droite de l'étoile, avec le reste 0° 16° 3', on aura (Table X) la nutation en déclinaison + 2'' 5. La correction de la Table XI est 0'' 4. Il reste donc + 2'' 1 pour la nutation en déclinaison dans l'ellipse. L'aberration en ascension droite sera — 15'' 5, parce que la plus grande est 20'' 5; l'aberration en déclinaison sera — 1'' 4; l'ascension droite apparente sera donc 65° 33' 25'' 3, & la déclinaison apparente 16° 0' 40'' 2.
- Page 162, ligne 1, *lisez* 15'' 5; ligne 2, *lisez* 20'' 5; ligne 4, au lieu de 7° 8' 18', *lisez* 1° 8' 18'. Ibid. ligne 5, au lieu de + 1'' 4, *lisez* — 1'' 4; lignes 6, & suiv. *lisez* l'ascension droite apparente sera donc 65° 33' 25'' 3, & la déclinaison 16° 0' 40'' 2.
- DANS LES TABLES, page 14, colonne 3, après 19', *lisez* 20.
- Page 15, col. 1, ligne dernière, *lisez* 3° 35' 33''.
- Ibid. col. 3, après 19' 24'', *lisez* 19' 21''.
- Page 16, col. 2, dans les deux dernières lignes, au lieu de 23°, *lisez* 20°.
- Page 40, en titre, au lieu de Vénus, *lisez* Mars.
- Page 49, col. 3, ligne 1, *lisez* 0° 55' 29''.
- Page 77, col. 4, ligne 2, *lisez* 3° 10' 6''.

Page 80, col. 2, vis-à-vis de  $11^{\circ}$ , lisez 76 194.

Page 83, après 1672, au lieu de Août, lisez Septembre.

Page 86, ajoutez : le signe + annonce que les tables donnent une longitude trop grande.

Page 91, pour la Comète de 1593, au lieu de  $4^{\circ} 26' 19''$ , lisez  $5^{\circ} 26' 19''$ .

Page 134, après le titre C, ajoutez, corrigé par la Table II.

Page 136, dans le titre de la seconde colonne, au lieu de D, lisez J.

Page 136, dans la 5<sup>e</sup> colonne, vis-à-vis de 1761, au lieu de 74, lisez 741.

Page 147, lisez, C corrigé.

Page 148, ajoutez au bas de la page cet avertissement : Lorsque le nombre A étant entre 166 & 566, ou entre 1966 & 2366, le nombre B se trouve entre 200 & 300 ou entre 700 & 800, l'on peut voir les immersions & les émergences du second Satellite.

Page 164, dans la 3<sup>e</sup> colonne des demi-durées, l'on a mis en tête & au bas de la colonne, 1757 ; il faut effacer 1757 & y substituer ce titre : Demi-durée pour le cas où l'inclinaison seroit de  $3^{\circ} 36'$ .

Page 166, dans la 5<sup>e</sup> colonne, on a mis en tête la lettre C, il faut y mettre G.

Page 169, le dernier nombre est  $5^h 10' 17''$ , lisez  $6^h 10' 17''$ .

Page 177, dans le titre de la Table IV, au lieu de la Table I, lisez la Table III.

Page 178, dans le titre de la Table V, au lieu des derniers mots, à leur longitude moyenne & apparente, lisez ceux-ci, à leur longitude vraie, actuelle & apparente.

*Ibid.* dans l'argument de la Table VI, on a mis longitude de la lune, lisez, longitude du nœud de la lune.

*Ib.* au bas de la Table V, au lieu de ces mots, voyez la Table XII, lisez ceux-ci, cette Table est calculée dans l'ellipse, & n'a pas besoin de la correction de la Table XII, son argument est le lieu moyen du nœud. La formule est à l'art. 2876.

Page 179, Table VII, la même observation a lieu.

Page 180 & 181, au bas des Tables IX & X, ajoutez ces mots : Pour avoir la réduction dans l'ellipse, il faut que le lieu du nœud soit corrigé par la Table XI ; & employer la correction de la Table XII aux nombres trouvés dans ces Tables IX & X. Voyez mon Astronomie (2879) Page 181, au bas de la Table XI, lisez, cette Table ne sert que pour l'usage des Tables IX & X.

Page 182, Table XII, dans les deux titres, où l'on a mis Tables V, VII, IX & X, effacez V, VII, parce que cette Table ne sert que pour corriger les Tables IX & X. Dans la même Table, vis-à-vis de  $1^{\circ} 20'$  & au-dessous de 14, lisez  $1^{\circ} 0'$  ; vis-à-vis de  $1^h 30'$  & au-dessous de 10, lisez  $0^h 9'$  ; vis-à-vis de  $11^{\circ} 20'$  & au-dessous de 4, lisez  $1^{\circ} 0'$  ; vis-à-vis de  $11^h 0'$  & au-dessous de 1, lisez  $1^h 0'$ .

Page 183, Table XIII, dans la 3<sup>e</sup> colonne de l'aberration en latitude, le dernier nombre est  $17^{\circ} 0'$ .

Page 184, dans le titre de la Table XIV, après ces mots, au temps de la plus grande aberration, ajoutez soustractive. Dans le titre de la Table XV, au lieu de 4 chiffres, lisez 3 chiffres, ou deux seulement si l'on veut avoir les dixièmes de secondes.

Pages 188, & suiv. jusqu'à la page 195, inclus. ajoutez dans le titre de chaque page cet avertissement : lorsque la déclinaison des étoiles est boréale, il faut augmenter de 6 signes l'argument trouvé dans cette Table. Ce changement est essentiel.

Page 190, au-dessous de  $5^{\circ}$  de déclinaison, le premier nombre doit être  $5^{\circ} 15' 13''$ .

Fin des Additions & Corrections.



